

Розклади визначників W_{n+1} і V_n за елементами останнього рядка (або стовпця), згідно з (2), дають рекурентні формули для підхідних дробів ланцюгового дробу (1) з розгалуженнями вгору-вниз

$$\begin{aligned} P_{2n} &= b_{n+1}\beta_n P_{2n-2} + b_{n+1}b_n\alpha_n P_{2n-4} + a_{n+1}\beta_n T_{2n-3} + \alpha_n(b_{n+1}a_n + a_{n+1})T_{2n-5}; \\ Q_{2n} &= b_{n+1}\beta_n Q_{2n-2} + b_{n+1}b_n\alpha_n Q_{2n-4}; \\ P_{2n+1} &= b_{n+1}\beta_{n+1} P_{2n-1} + b_{n+1}b_n\alpha_{n+1} P_{2n-3} + a_{n+1}\beta_{n+1} T_{2n-1} + \alpha_{n+1}(b_{n+1}a_n + a_{n+1})T_{2n-3}; \\ Q_{2n+1} &= b_{n+1}\beta_{n+1} Q_{2n-1} + b_{n+1}b_n\alpha_{n+1} Q_{2n-3}; \\ T_{2n+1} &= \beta_{n+1} T_{2n-1} + \alpha_{n-1} T_{2n-3}, \quad n=1,2,3,\dots \end{aligned}$$

з початковими умовами

$$P_{-2}=1/q_0; Q_{-2}=0; T_{-3}=0; P_{-1}=1; Q_{-1}=1/q_0; T_{-1}=0; P_0=q_0; Q_0=1; T_1=1.$$

1. Ремез Е.Я. О знакопеременных рядах, которые могут быть связаны с двумя алгоритмами М.В.Остроградского для приближения иррациональных чисел // Успехи матем. наук. 1954. Т.6. № 5. С. 33–42. 2. Хованский А.Н. Приложения цепных дробей и их обобщений к вопросам приближенного анализа. М., 1956. 3. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М., 1978.

УДК 518.61

Р.В. Слоньовський, О. М. Нечай, Р.І. Желяк

Національний університет "Львівська політехніка", кафедра прикладної математики

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТА ЧИСЛОВЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ДИНАМІКИ РОБОТИ ГЕНЕРАТОРА ГАРМОНІЙНИХ СИНУСОЇДАЛЬНИХ КОЛИВАНЬ

© Р.В. Слоньовський, О. М. Нечай, Р.І. Желяк, 2000

У статті наведена математична модель автогенератора гармонічних коливань, для дослідження параметрів якої використано дробово–раціональні методи обчислення. Крім того, проаналізовано результати порівняно з іншим аналітичним методом дослідження, де виявлено ефективність використання дробово–раціонального методу для розрахунку подібних задач.

This article presents the mathematical model of the automatic generator of the harmonious vibration. The methods of the fraction-rational calculation are used for the investigation of its measures. The results are analyzed and compared with the other analytical method of investigation. The efficiency of the usage of the fraction-rational method for the calculation of such tasks is confirmed.

Порівняльний аналіз методів пошуку усталеного режиму і дослідження динаміки роботи автогенератора становить завдання розв'язку диференціальних рівнянь математичної моделі з визначенням таких його характеристик, як гармонік, частоти і амплітуди та проведення експерименту. Якщо корені диференціальних рівнянь вище третього порядку, доводиться поєднувати числові та аналітичні методи, а проблемою останніх є, зокрема, виділення лінійної частини.

Асимптотичний метод Крилова-Боголюбова-Митропольського застосовується для розв'язку звичайних диференціальних рівнянь вигляду

$$\dot{x} + Cx = \varepsilon \cdot f(x, \dot{x}), \quad (1)$$

які містять малий параметр ε ($0 < \varepsilon < 1$), лінійну (N -вимірну квадратну матрицю C) і нелінійну (N -вимірну вектор функцію $f(x, \dot{x})$) частину. Ці рівняння є однією з можливих форм запису рівнянь ПС для автономних динамічних систем.

Якщо серед множини власних значень є пара комплексно-спряжених власних значень $\lambda_{1,2} = \gamma \pm j\omega$, причому для самозбуджувальних автоколивальних пристроїв $\gamma > 0$, то для такої пари власних значень амплітуда коливань з частотою ω за один цикл коливань період T збільшиться в $\exp(2\pi\gamma/\omega)$ разів. Відносний приріст амплітуди σ за один цикл коливань [1]

$$\sigma = \exp(2\pi\gamma/\omega) - 1 \quad (2)$$

За умови малості параметра ε ($\varepsilon < 1$)

$$0 < |\exp(2\pi\gamma/\omega) - 1| < 1 \quad (3)$$

і для оцінки числового значення малого параметра ε можна застосувати вираз

$$\varepsilon = \sigma = \exp(2\pi\gamma/\omega) - 1 \quad (4)$$

Так, для рівняння Ван дер Поля

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \eta(1 - x^2)\dot{x} \quad (5)$$

власні значення в точці статичної рівноваги ($\ddot{x} = 0$ і $\dot{x} = 0$) і відносний приріст амплітуди σ коливань за один цикл дорівнюють [1]

$$\lambda_{1,2} = \eta/2 \pm j\sqrt{\omega^2 - \eta^2/4} \quad (6)$$

$$\sigma = \exp\left(\pi\eta/\sqrt{\omega^2 - \eta^2/4}\right) - 1 \quad (7)$$

де x, \dot{x}, \ddot{x} – шукана змінна і її похідні за часом; η – малий параметр; ω – власна частота коливань.

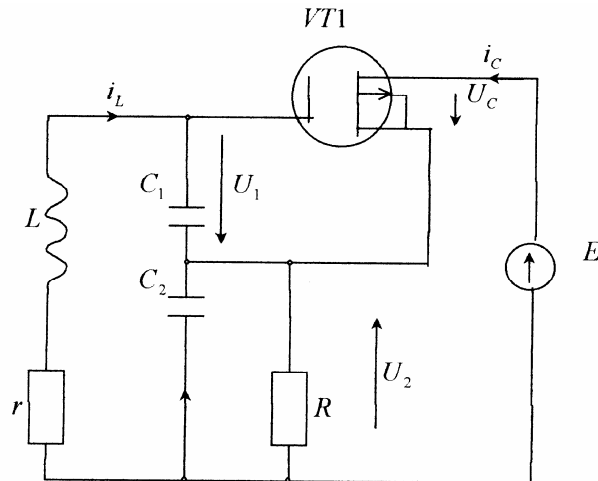
Порівняння значень σ , обчислених числовим інтегруванням і на основі виразу (7) при різних значеннях параметра η показали зміни η в широкому діапазоні ($10^{-6} < \eta < 1$). При цьому залишається основна проблема виділення лінійної частини математичної моделі автономних квазігармонійних автоколивних пристроїв і оцінки параметра ε .

Знаючи дійсні і уявні частини коренів, можна судити про малість параметра і якщо він набагато менший від одиниці, то доцільно застосовувати асимптотичні методи.

Поєднання числових методів інтегрування з одного боку і аналітичних методів з іншого, дозволяє зберегти їх переваги і на їх основі створити ефективний аналіз автоколивних пристроїв. Прикладом цього може стати розрахунок автоколивального процесу генератора гармонійних синусоїдальних коливань на польовому транзисторі (див. рисунок).

Важливо дослідити залежність роботи генератора від параметрів його схеми з метою встановлення оптимального режиму його роботи.

Практично підбором резистора R регулюють режим роботи генератора за постійним струмом, змінюючи добротність змінюється значення ε . Тільки певний набір параметрів спричинює збуджуваність автогенератора. Найбільший вплив на самозбуджуваність мають конденсатори $C1$ і $C2$, а точніше співвідношення між цими ємностями, подібно до автотрансформатора (з ємностями замість обмоток), де напруга подається на середину, а знімається з його країв.



Електрична схема автогенератора

За законом Кірхгофа струми в контурах фізичної моделі генератора мають вигляд

$$\begin{cases} i_L - C_1 \frac{du_1}{dt} = 0 \\ -i_L - C_2 \frac{du_2}{dt} - i_C = 0, \partial e i_C = f(u_1, u_2) \\ r \cdot i_L + L \frac{di_L}{dt} + u_1 - u_2 = 0 \\ u_C - u_2 - E = 0 \end{cases} \quad (8)$$

Для зручності представимо цю систему чотирьох рівнянь контурів у вигляді системи трьох диференціальних рівнянь динаміки генераторного процесу

$$\begin{cases} L \frac{di_L}{dt} = -r \cdot i_L - u_1 + u_2 \\ C_2 \frac{du_2}{dt} = -i_L - \frac{u_2}{R} - f(u_1, u_C) \\ C_1 \frac{du_1}{dt} = i_L \end{cases}$$

Введемо відповідну заміну змінних

$$u_1 = y_1; \quad u_2 = y_2; \quad i_L = y_3; \quad (9)$$

при початкових умовах

$$y_1(0) = 0; \quad y_2(0) = 0; \quad y_3(0) = 0; \quad E = const; \quad (10)$$

Зважаючи на штивність диференціальних рівнянь математичної моделі, розв'язуємо її дробово-раціональними методами. Побудуємо наближення різних порядків узгодження із відповідною операторною функцією [2]

$$y_{n+1}^{[1]} = \frac{T_1 - \frac{h}{2} J_n T_0}{E - \frac{h}{2} J_n};$$

$$\begin{aligned}
y_{n+1}^{[2]} &= \frac{T_{2,n} - \frac{h}{2} J_n T_{1,n} + \frac{h^2}{12} J_n^2 T_{0,1}}{E - \frac{h}{2} J_n + \frac{h^2}{12} J_n^2} \quad (11) \\
y_{n+1}^{[3]} &= \frac{T_{3,n} - \frac{h}{2} J_n T_{3,n} + \frac{h^2}{10} J_n^2 T_{1,n} - \frac{h^3}{120} J_n^3 T_{0,n}}{E - \frac{h}{2} J_n + \frac{h^2}{10} J_n^2 - \frac{h^3}{120} J_n^3}; \\
y_{n+1}^{[4]} &= \frac{T_{4,n} - \frac{h}{2} J_n T_{3,n} + \frac{3h^2}{28} J_n^2 T_{2,n} - \frac{h^3}{84} J_n^3 T_{1,n} + \frac{h^4}{1680} J_n^4 T_{0,n}}{E - \frac{h}{2} J_n + \frac{3h^2}{28} J_n^2 - \frac{h^3}{84} J_n^3 + \frac{h^4}{1680} J_n^4};
\end{aligned}$$

де $T_{\kappa,n}$ – часткова сума κ -го порядку ряду Тейлора, J_n – коефіцієнти матриці Якобі.

Для визначення $T_{\kappa,n}$ випишемо один клас коефіцієнтів k_i методу Рунге-Кутта [2]

$$\begin{aligned}
k_1 &= h f(x_n, y_n), \quad k_2 = h f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}), \quad k_3 = h f(x_n + h, y_n - k_1 + 2k_2), \\
k_4 &= h f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}), \quad k_5 = h f(x_n + h, y_n + k_4). \quad (12)
\end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned}
T_{1n} &= y_n + k_1, \quad T_{2n} = y_n + k_2, \quad T_{3n} = y_n + \frac{1}{6} (k_1 + 4k_2 + k_3), \\
T_{4n} &= y_n + \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_4 + k_5). \quad (13)
\end{aligned}$$

Значення J_n , які входять у (13), визначаємо безпосереднім диференціюванням правої частини системи по y або числовим диференціюванням. Після підстановки у вищенаведені формули значення T_{kn} , одержимо методи, порядки яких збігаються з порядками узгодженості наближених вихідних формул.

Якщо знайти корені такого рівняння методом малого параметра не можна через невиконання умови малого параметра, то використання асимптотичних числових методів дозволяють швидко отримати результат і з високою точністю.

Результати експериментальних досліджень швидкозмінних процесів генератора підтвердили високу ефективність дробово-раціональних методів наближення розв'язку.

Час, за який коливання автогенератора стабілізуються, відповідає приблизно 300 періодам.

1. Желяк Р.І. Моделювання автономних квазігармонійних автоколивальних пристроїв на ЕОМ: Автореф. ... дис. канд. техн. наук. Львів. 1989. 2. Слоневський Р.В., Яремко Т.М. Чисельні методи розв'язання жорстких систем диференціальних рівнянь. Львів. 1990.