У таблиці наведені числові розрахунки для молодших семи власних значень, отриманих при різних значеннях N розбиття сітки ω_N

Таблиця 1

Залежність власних значень $\lambda_n / 4\pi^2$ від розбиття сітки N

n	$N=2^{13}$	$N=2^{14}$	$N=2^{15}$
0	0.012629967821	0.012629967836	0.012629967834
1	1.010658650706	1.010658688037	1.010658697373
2	1.014690154445	1.014690190787	1.014690199630
3	4.011659588793	4.011660177751	4.011660325054
4	4.013675315223	4.013675901810	4.013676048520
5	9.011990705590	9.011993682972	9.011994427616
6	9.013334524590	9.013337498401	9.013338242175

Відзначимо, що наближені власні значення, отримані за допомогою функціонально-дискретного методу в [3], добре узгоджуються з наведеними в таблиці результатами.

Вказаний спосіб можна успішно застосувати для інших крайових задач з умовами Неймана, з власним параметром в одній із крайових умов тощо, наприклад

$$y'(0) = 0, \quad y'(1) - \lambda y(1) = 0.$$

Тоді, зокрема, характеристичний визначник в (2) набуває трикутного вигляду з одиничною наддіагоналлю, а вектор $\vec{b}$ в різницевій схемі матиме лише три ненульові елементи, останній з яких міститиме власний параметр.

1. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М., 1978.
2. Дьяконов В.П. Математическая система MAPLE V R3/R4/R5. М., 1998.
3. Бандырский Б.И., Макаров В.Л., Уханёв О.Л. Достаточные условия сходимости неклассических асимптотических разложений для задачи Штурма-Лиувилля с периодическими условиями // Дифференц. уравнения. 1999. Т.35, №3. С.45-60.

УДК 518:511.2

З.І.Крупка
Національний університет "Львівська політехніка", кафедра вищої математики

РЕКУРЕНТНІ ФОРМУЛИ ДЛЯ ЛАНЦЮГОВИХ ДРОБІВ З РОЗГАЛУЖЕННЯМИ ВГОРУ–ВНИЗ

Одержано рекурентні формули для підхідних дробів ланцюгового дробу з розгалуженнями вгору-вниз.

Recurrent formulas for approximants of a continued fraction with branching up and down are obtained.

Під час дослідженя алгоритмів (наприклад – перший алгоритм М.В.Остроградського знаходження спільної міри двох чисел [1], узагальнений алгоритм Якобі знаходження найбільшого спільного дільника декількох чисел [2], алгоритм "прогонки" для розв'язування різницевих рівнянь [3]) виникають дроби з розгалуженнями в знаменнику і чисельнику одночасно. Такі дроби є природним узагальненням відомого поняття ланцюгового дробу [2], який з цього погляду, є дробом з розгалуженням тільки в знаменнику.

Розглянемо дріб вигляду

$$q_0+\cfrac{p_1+\cfrac{a_2+\cdots+\cfrac{a_n+\cdots}{b_n}}{b_2}}{q_1+\cfrac{\alpha_2}{\beta_2+\cdots+\cfrac{\alpha_n}{\beta_n+\cdots}}}, \qquad (1)$$

який будемо називати ланцюговим дробом з розгалуженнями вгору-вниз, і скорочено, за аналогією з [2], записувати у вигляді

$$q_0+\frac{p_1}{q_1}\mathop{+}\frac{a_2}{b_2}\mathop{+}\frac{\alpha_2}{\beta_2}\mathop{+}\cdots\mathop{+}\frac{a_n}{b_n}\mathop{+}\frac{\alpha_n}{\beta_n}\mathop{+}\cdots.$$

Для дробу (1) визначимо послідовність підхідних дробів $\{P_n/Q_n\}$, $n=0, 1, 2, \ldots$, елементами якої є

$$P_0/Q_0=q_0;\ P_1/Q_1=q_0+p_1/q_1;$$

$$P_{2k}\big/Q_{2k}=.q_0+\frac{p_1}{q_1}\mathop{+}\frac{a_2}{b_2}\mathop{+}\frac{\alpha_2}{\beta_2}\mathop{+}\cdots\mathop{+}\frac{a_k}{b_k}\mathop{+}\frac{\alpha_k}{\beta_k}\mathop{+}\frac{a_{k+1}}{b_{k+1}},k=\overline{1,\infty},$$

$$P_{2k+1}\big/Q_{2k+1}=.q_0+\frac{p_1}{q_1}\mathop{+}\frac{a_2}{b_2}\mathop{+}\frac{\alpha_2}{\beta_2}\mathop{+}\cdots\mathop{+}\frac{a_{k+1}}{b_{k+1}}\mathop{+}\frac{\alpha_{k+1}}{\beta_{k+1}},k=\overline{1,\infty}.$$

Із елементів дробу (1) складемо нескінченний визначник $W=|w_{ij}|$, i,j=1, 2, 3, …, який містить всі нульові елементи, крім

$$w_{i+1\,i+1}=q_i,\ i=0,1;\qquad w_{1\,2}=p_1;\qquad w_{2\,1}=-1;$$

$$w_{1\,2i-1}=a_i;\quad w_{2i-1\,2i-1}=b_i;\quad w_{2i-2\,2i}=\alpha_i;\quad w_{2i\,2i}=\beta_i;\quad w_{i+1\,i-1}=-1,\quad i=2,3,4,\ldots,$$

і нескінченний визначник $V=/v_{ij}/$, $i,j=1,2,3,\ldots$, елементами якого є $v_{ij}=w_{i+1\ j+1}$, $i,j=1,2,3,\ldots$ Введемо позначення: W_n – головний мінор порядку n визначника W, V_n – головний мінор порядку n визначника V. Справедлива теорема

Теорема. n–ий підхідний дріб P_n/Q_n ланцюгового дробу з розгалуженнями вгору-вниз (1) представляється у вигляді відношення визначників

$$P_n/Q_n=W_{n+1}/V_n,\qquad n=1,2,3,\ldots, \qquad (2)$$

Розклади визначників W_{n+1} і V_n за елементами останнього рядка (або стовпця), згідно з (2), дають рекурентні формули для підхідних дробів ланцюгового дробу (1) з розгалуженнями вгору-вниз

$$P_{2n}=b_{n+1}\beta_n P_{2n-2}+b_{n+1}b_n\alpha_n P_{2n-4}+a_{n+1}\beta_n T_{2n-3}+\alpha_n(b_{n+1}a_n+a_{n+1})T_{2n-5};$$

$$Q_{2n}=b_{n+1}\beta_n Q_{2n-2}+b_{n+1}b_n\alpha_n Q_{2n-4};$$

$$P_{2n+1}=b_{n+1}\beta_{n+1}P_{2n-1}+b_{n+1}b_n\alpha_{n+1}P_{2n-3}+a_{n+1}\beta_{n+1}T_{2n-1}+\alpha_{n+1}(b_{n+1}a_n+a_{n+1})T_{2n-3};$$

$$Q_{2n+1}=b_{n+1}\beta_{n+1}Q_{2n-1}+b_{n+1}b_n\alpha_{n+1}Q_{2n-3};$$

$$T_{2n+1}=\beta_{n+1}T_{2n-1}+\alpha_{n-1}T_{2n-3}, \qquad n=1,2,3,\ldots$$

з початковими умовами

$$P_{-2}=1/q_0;\ Q_{-2}=0;\ T_{-3}=0;\ P_{-1}=1;\ Q_{-1}=1/q_0;\ T_{-1}=0;\ P_0=q_0;\ Q_0=1;\ T_1=1.$$

1. Ремез Е.Я. О знакопеременных рядах, которые могут быть связаны с двумя алгоритмами М.В.Остроградского для приближения иррациональных чисел // Успехи матем. наук. 1954. Т.6. № 5. С. 33–42. 2. Хованский А.Н. Приложения цепных дробей и их обобщений к вопросам приближенного анализа. М., 1956. 3.Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М., 1978.

УДК 518.61

Р.В. Слоньовський, О. М. Нечай, Р.І. Желяк
Національний університет "Львівська політехніка", кафедра прикладної математики

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТА ЧИСЛОВЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ДИНАМІКИ РОБОТИ ГЕНЕРАТОРА ГАРМОНІЙНИХ СИНУСОЇДАЛЬНИХ КОЛИВАНЬ

У статті наведена математична модель автогенератора гармонічних коливань, для дослідження параметрів якої використано дробово–раціональні методи обчислення. Крім того, проаналізовано результати порівняно з іншим аналітичним методом дослідження, де виявлено ефективність використання дробово–раціонального методу для розрахунку подібних задач.

This article presents the mathematical model of the automatic generator of the harmonious vibration. The methods of the fraction-rational calculation are used for the investigation of its measures.The results are analyzed and compared with the other analytical method of investigation. The efficiency of the usage of the fraction-rational method for the calculation of such tasks is confirmed.

Порівняльний аналіз методів пошуку усталеного режиму і дослідження динаміки роботи автогенератора становить завдання розв’язку диференціальних рівнянь математичної моделі з визначенням таких його характеристик, як гармонік, частоти і амплітуди та проведення експерименту. Якщо корені диференціальних рівнянь вище третього порядку, доводиться поєднувати числові та аналітичні методи, а проблемою останніх є, зокрема, виділення лінійної частини.