УДК 539.3

В.Д. Гонтар
Національний університет "Львівська політехніка", кафедра вищої математики

ВПЛИВ НЕДОСКОНАЛО ПРУЖНОГО МАТЕРІАЛУ НА КОЛИВАННЯ ПЛАСТИНКИ З ЦИКЛІЧНО ДІЮЧИМ НАВАНТАЖЕННЯМ

Запропонована багатовимірна апроксимація декремента коливань, яка врахована в диференціальних рівняннях коливань механічних систем.

Multidimentional approximation of decrement of oscillations reflected in differentional equations of mechancal system oscillations with energy dissipation has suggested &.

У випадку плоского напруженого стану узагальнений закон Гука подамо у вигляді

$$\sigma = [C]\{\varepsilon\} + [\delta][C]\{\varepsilon\}, \tag{1}$$

де

$$\delta = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & 0 \\ \delta_{21} & \delta_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \delta_{33} \end{bmatrix}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1-2\mu}{3(1-\mu)}(\delta_\varepsilon - \delta_\gamma); \delta_{33} = \delta_\gamma \tag{2}$$

$$\delta_{11} = \delta_{22} = \delta_\varepsilon \frac{1-2\mu}{3(1-\mu)} + \delta_\gamma \frac{2-\mu}{3(1-\mu)};$$

Тоді напруження, що враховують тільки недосконалу пружність матеріалу, можна представити так:

$$\sigma_x = \Lambda_x \varepsilon_x + \Lambda_y \varepsilon_y; \sigma_y = \Lambda_y \varepsilon_x + \Lambda_x \varepsilon_y; \tau_{xy} = 2\mu\delta_\gamma \gamma_{xy}, \tag{3}$$

де

$$\Lambda_x = (\lambda + 2\mu) + \lambda\delta_{12}; \Lambda_y = (\lambda + 2\mu)\delta_{21} + \lambda\delta_{22} \tag{4}$$

причому сталі Ламе, взагалі кажучи, залежать від темпереатури $\lambda = \lambda(T(x, y))$; $\mu = \mu(T(x, y))$, а гістерезисні оператори – від координат і температури.

Визначимо тепер складову, що вносить співвідношення (4) у диференціальне рівняння переміщень. Враховуючи те, що

$$\varepsilon_x = -\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} z; \varepsilon_y = -\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} z; \gamma_{xy} = -2z\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \tag{5}$$

знайдемо

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} = -\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\Lambda_x \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \Lambda_y \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right] z^2 dzf;$$

$$\frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[\Lambda_y \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \Lambda_x \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right] z^2 dzf; \tag{6}$$

$$\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} = -\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left[\Lambda_{xy} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}\right] z^2 dzf;$$

Підставимо вирази (6) у ліву частину рівняння коливань пластинки та проінтегруємо по Z. Отримаємо складову, яку вносять гістерезисні оператори у це рівняння

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\Lambda_x \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \Lambda_y \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right] + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left[\Lambda_{xy} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[\Lambda_y \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \Lambda_x \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right]\right] f = \varepsilon\Phi(\Lambda_k, W), \tag{7}$$

де ε відіграє роль малого параметра.

Остаточний вигляд рівняння коливання прямокутної пластинки сталої товщини збігатиметься з відомим виведенням*

$$\Delta^2 W + \Omega \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = -\varepsilon\Phi(\Lambda_k, W) \tag{8}$$

з дещо відмінною правою частиною. Але якщо розглядати сумарну складову декрементів коливань і покласти

$$f = 1 \pm 2\cos\psi - \cos^2\psi, \tag{9}$$

то отримаємо ті ж відомі формули*.

Тоді

$$\varepsilon\Phi = \pm 3/8\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\delta_x\left[\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right]\right]_{t=0} + \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[\delta_y\left[\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \mu\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right]\right]\right]_{t=0} + \right.$$

$$\left. + (1-m)\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left[d_t \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}\right]_{\overline{t=0}}\right] f. \tag{10}$$

Рівняння (8) розв′язується асимптотичними методами нелінійної механіки.

* *Гонтар В.Д. Про один підхід до дослідження вільних коливань систем зі змінними параметрами // Вісн. Львів. політехн. ін-ту. 1990. № 242. С. 24-26.*