переміщення стали функцією неповного потенціалу $^*V$ (9), (24). Виконавши диференціювання функції переміщень w (20), одержимо

$$\nabla^2 w = -2k\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}, \qquad k = \frac{\lambda + 2G}{8\pi G(\lambda + G)}, \tag{31}$$

а також

$$\nabla^2\left(\nabla^{2*}V\right) = \nabla^2\left(\nabla^2 w\right) = -2k\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right) = 0,$$

тобто неповний потенціал $^*V$ є бігармонійною функцією, яка задовільняє рівняння (10). Отже, система (20) і потенціал (2) визначають більш точний розв’язок задачі Герца в межах теорії пружності.

Висновки:

1. Модифікована система переміщень задовольняє поставлені вимоги теорії пружності.

2. Модифікація відомої системи переміщень, строго одержаної Н.М. Беляєвим на підставі системи Буссінеска для задачі про дію зосередженої сили на пружний півпростір, здійснена строго на основі принципу Лагранжа.

3. Модифікована система є єдиною, одержаною на основі системи Буссінеска, системою, яка задовольняє поставлені вимоги теорії пружності.

4. Враховуючи наведені вище висновки, модифіковану систему (20) з потенціалом (2) можна вважати більш точним розв’язком задачі Герца.

1. Беляев Н.М. Труды по теории упругости и пластичности. М., Гостехиздат. 1957. 2. Римар О.М. Виконання граничних умов для відомого розв’язку задачі Герца // Проектування, виробництво та експлуатація автотранспортних засобів і поїздів. Зб. наук. пр. Львів. Асоціація “Автобус” 1999. Вип.2, с.84-87. 3. Римар О.М. Модифікація рівнянь переміщень для просторових контактних задач // Вісн. ДУ “Львівська політехніка”. Львів. 1999. № 371. С.21-24. 4. Подгорный А.Н., Марченко Г.А., Пустынников В.И. Основы и методы прикладной теории упругости. Киев: Вища школа, 1981. - 328 с. 5. Динник А.Н. Удар и сжатие упругих тел. Киев, Изд-во АН УССР, 1952. Т.1. - 151 с.

УДК 621.9.

Сокіл Б.І.

ДУ “Львівська політехніка”, кафедра “Теоретична механіка”

ДОСЛІДЖЕННЯ НЕЛІНІЙНИХ КОЛИВАНЬ СТРІЧОК КОНВЕЄРІВ

Розроблено методику дослідження нелінійних коливань для одного класу механічних систем, рух яких описується диференціальним рівняннями з частинними похідними.

Is designed a technique of a research of nonlinear oscillations for one class of mechanical systems, which motion is described by differential equations with fractional by derivative.

Важливою проблемою, пов'язаною з переміщенням вантажів за допомогою транспортерів, конвеєрних ліній тощо. Є вивчення впливу швидкості руху останніх на їх поздовжні (поперечні) коливання. Ця проблема достатньою мірою вирішена для випадку, коли стрічка (канат) рухається з постійною швидкістю, а матеріал стрічки задовольняє лінійний закон пружності (у вказаному випадку розв'язування задачі зводиться до інтегрування лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними). Якщо ж швидкість руху стрічки є змінною величиною, матеріал стрічки задовольняє нелінійний закон пружності, то розв'язання вказаної задачі пов'язано із значними математичними труднощами дослідження відповідних нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними. У статті дається методика визначення амплітудно-частотних характеристик коливань стрічки, яка рухається зі сталою швидкістю, а її матеріал задовольняє нелінійний закон пружності. Диференціальне рівняння, яке описує поздовжні коливання стрічки, у вказаному випадку набуває вигляду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial x} F_0\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + F_1\left(u, \frac{\partial u}{\partial t}\right)\right], \tag{1}$$

де ρ – маса одиниці довжини матеріалу стрічки, $2\alpha^2 = \dfrac{V}{\rho}$, V – швидкість руху стрічки, $F_0\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)$ – нелінійне співідношення, яке зв'язує поздовжнє напруження σ і відносне видовження $\varepsilon_x = \dfrac{\partial u}{\partial x}$, $(\sigma = F_0(\varepsilon_x))$; $F_1\left(u, \dfrac{\partial u}{\partial t}\right)$ – "вінклерівська сила" [1]. Беручи до уваги, що $F_0\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) = b_1 \dfrac{\partial u}{\partial x} + b_2\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^3$, а $F_1\left(u, \dfrac{\partial u}{\partial t}\right) = -\gamma^2 u^{\nu+1} + F_2\left(u, \dfrac{\partial u}{\partial t}\right)$, диференціальне рівняння (1) набуває вигляду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = \beta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^{\nu} + \gamma^2 u^{\nu+1} + F_2\left(u, \frac{\partial u}{\partial t}\right), \tag{2}$$

де b_1, b_2, γ, ν – сталі, причому $\nu + 1 = (2m+1)(2n+1)^{-1}$, $m, n = 0,1,2,...$, $\beta^2 = b_1\rho^{-1}$, $\varepsilon = 3b_2\rho^{-1}$, $\rho^{-1}F_2\left(u, \dfrac{\partial u}{\partial t}\right)$ – нелінійна функція така, що $\max \rho^{-1} F_1\left(u, \dfrac{\partial u}{\partial t}\right) \sim \varepsilon$. У припущені, що $\beta^2, \gamma^2 >> \varepsilon$ рівняння (2) можна записати у вигляді

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} - \beta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \gamma^2 u^{\nu+1} = \varepsilon f\left(u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right), \tag{3}$$

де $\varepsilon f\left(u, \dfrac{\partial u}{\partial t}, \dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = \varepsilon\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^{\nu} + F_2\left(u, \dfrac{\partial u}{\partial t}\right)\right)$.

Легко переконатись, що розв'язком незбуреного рівняння, яке відповідає (3), тобто рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} - \beta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \gamma^2 u^{\nu+1} = 0, \tag{4}$$

є система Ateb-функцій [2]

$$u = a\begin{cases} ca(\nu+1, 1, kx - \omega t + \theta) \\ sa(\nu+1, 1, kx - \omega t + \theta) \end{cases}, \tag{5}$$

де a, θ – сталі інтегрування, k і ω – функції, які зв'язані співвідношенням

$$\omega^2 - 2\alpha^2 \omega k - \beta^2 k^2 = \frac{\nu+2}{2}\gamma^2 a^\nu. \tag{6}$$

Як випливає з (6), хвильове число k і ω є функціями амплітуди. Вказане явище є характерним тільки для нелінійних коливних систем і з ним пов'язані значні труднощі дослідження збуреного рівняння (3).

Нижче, не зменшуючи загальності, за розв'язок незбуреного рівняння приймемо першу залежність у співвідношенні (5), диференціюючи яку по x і t, отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{2a}{\nu+2}\omega sa(1, \nu+1, kx - \omega t + \theta), \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{2a}{\nu+2} k sa(1, \nu+1, kx - \omega t + \theta). \end{aligned} \tag{7}$$

Залежності (5), (7), в яких $a(x,t)$, $\theta(x,t)$, будемо вважати згідно з методом усереднення [3,4] розв'язком збуреного рівняння (3), тобто для збуреного випадку розв'язок шукатимемо у вигляді

$$u(x,t) = a(x,t) ca(\nu+1, 1, kx - \omega t + \theta(x,t)). \tag{8}$$

Із (8), з врахуванням (7), для знаходження невідомих функцій $a(x,t)$ і $\theta(x,t)$, отримуємо систему диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} &\left[\frac{\partial a}{\partial t}\left(\omega + a\frac{d\omega}{da}\right) + \frac{\partial a}{\partial x}\left(k + a\frac{dk}{da}\right)\right] sa(1, \nu+1, kx - \omega t + \theta) + \\ &+ \left[\frac{\partial \theta}{\partial t}\omega + \frac{\partial \theta}{\partial x}\alpha^2 k\right] sa^{\nu+1}(1, \nu+1, kx - \omega t + \theta) = \frac{\nu+2}{2}\left\{\left[\frac{2a}{\nu+2}\left(\omega^2 - 2\alpha\omega k - \beta k^2\right) - \gamma^2 a^{\nu+1}\right] \times \right. \\ &\left. \times ca^{\nu+1}(\nu+1, 1, kx - \omega t + \theta) + \varepsilon f\left(u, \frac{\partial u}{\partial t}\right)\Bigg|_{u = aca(\nu+1,1,kx-\omega t+\theta)}\right\}, \end{aligned}$$

$$\text{де } f\left(u, \frac{\partial u}{\partial t}\right)\Bigg|_{u = aca(\nu+1,1,kx-\omega t+\theta)} = \varepsilon\left((\nu+1)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^\nu + \rho^{-1} F_2\left(u, \frac{\partial u}{\partial t}\right)\right)\Bigg|_{u = aca(\nu+1,1,kx-\omega t+\theta)}. \tag{9}$$

Окрім цього, невідомі функції $a(x,t)$ і $\theta(x,t)$ пов'язані умовами сумісності

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial t} ca(\nu+1, 1, kx - \omega t + \theta) - \frac{2a}{\nu+2}\frac{\partial \theta}{\partial t} sa(1, \nu+1, kx - \omega t + \theta) = 0; \\ \frac{\partial a}{\partial x} ca(\nu+1, 1, kx - \omega t + \theta) - \frac{2a}{\nu+2}\frac{\partial \theta}{\partial x} sa(1, \nu+1, kx - \omega t + \theta) = 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Система диференціальних рівнянь (9), (10) визначає, аналогічно як і в [5], невідомі функції a і θ у вигляді

$$\begin{aligned}
\frac{\partial a}{\partial t} &= \frac{-2\varepsilon\omega sa(1,\nu+1,\psi)}{(\nu+2)\gamma^2 a^{\nu}} f\left(u, \frac{\partial u}{\partial t}\right)\Bigg|_{u=aca(\nu+1,1,\psi)}, \\
\frac{\partial a}{\partial x} &= \frac{2\varepsilon k sa(1,\nu+1,\psi)}{(\nu+2)\gamma^2 a^{\nu}} f\left(u, \frac{\partial u}{\partial t}\right)\Bigg|_{u=aca(\nu+1,1,\psi)}, \\
\frac{\partial \theta}{\partial t} &= \frac{-\varepsilon\omega ca(\nu+1,1,\psi)}{\gamma^2 a^{\nu+1}} f\left(u, \frac{\partial u}{\partial t}\right)\Bigg|_{u=aca(\nu+1,1,\psi)}, \\
\frac{\partial \theta}{\partial x} &= \frac{\varepsilon k ca(\nu+1,1,\psi)}{\gamma^2 a^{\nu+1}} f\left(u, \frac{\partial u}{\partial t}\right)\Bigg|_{u=aca(\nu+1,1,\psi)}.
\end{aligned} \tag{11}$$

де $\psi = kx - \omega t + \theta(x,t)$.

Як випливає з (11) $a(x,t)$ і $\theta(x,t)$ є повільно змінними функціями своїх аргументів, тому беручи до уваги, що їх значення змінюються під час розв’язування відповідного незбуреного рівняння на незначне значення, можна цю систему диференціальних рівнянь замінити простішою [6]

$$\begin{aligned}
\frac{\partial a}{\partial t} &= \frac{-2\varepsilon\omega}{(\nu+2)\gamma^2 a^{\nu}} A_1(a), \\
\frac{\partial a}{\partial x} &= \frac{2\varepsilon k}{(\nu+2)\gamma^2 a^{\nu}} A_1(a), \\
\frac{\partial \theta}{\partial t} &= \frac{-\varepsilon\omega}{\gamma^2 a^{\nu+1}} B_1(a), \\
\frac{\partial \theta}{\partial x} &= \frac{\varepsilon k}{\gamma^2 a^{\nu+1}} B_1(a),
\end{aligned}$$

де $A_1(a) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} sa(1,\nu+1,\psi) f\left(u, \frac{\partial u}{\partial t}\right)\Bigg|_{u=aca(\nu+1,1,\psi)} dx$,

$$B_1(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} ca(1,\nu+1,\psi) f\left(u, \frac{\partial u}{\partial t}\right)\Bigg|_{u=aca(\nu+1,1,\psi)} dx, \quad \Pi = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{\nu+2}\right)\Gamma^{-1}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\nu+2}\right).$$

Як окремий випадок із викладеного маємо при $\alpha = 0$ нелінійні коливання нерухомої стрічки (поздовжні коливання нелінійно-пружного стержня), а при $\alpha = \beta = 0$ – методику дослідження нелінійних коливань звичайного механічного осциляра.

1. Коломиец В.Г., Порхун Л.М. Случайные колебания упругих нелинейных систем с распределенными параметрами // Математическая физика, 1968, В.5. С. 103–108. 2. Сеник П.М. Обернення неповної Beta-функції // Укр. Мат. журн. 1969 р. 21, № 3. С.325-333. 3. Митропольский Ю.А. Нелинейная механика. Одночастотные колебания. К., 1997. 4. Митропольский Ю.А., Мосеенков Б.И. Асимтотические решения уравнений в частичных производных. К., 1976. 5. Сокіл Б.І. Побудова одночастотних розв’язків деяких крайових задач для неавтономного хвильового рівняння // Укр. мат. журнал. 1994. 46. № 9. С.1275-1279. 6. Митропольский Ю.А. Метод усереднения в нелинейной механике. К., 1971.