УДК 539.3

Римар О.М.
ДУ “Львівська політехніка”, кафедра “Нарисна геометрія та графіка”

СИСТЕМА ПЕРЕМІЩЕНЬ ДЛЯ ПРОСТОРОВОЇ КОНТАКТНОЇ ЗАДАЧІ

Запропонована система переміщень для задачі Герца, яка задовольняє умови теорії пружності. Система одержана за допомогою модифікації відомої системи.

The system of displacements for Hertzian contact problem, that satispies conditions of elastic theory, is offered. The system is obtained by modification of known system.

Відомий розв’язок задачі Герца [1.5] базується на класичній теорії пружності, у тому числі на її основних передумовах щодо ідеалізації матеріалу і поверхонь контактуючих тіл, зв’язку між деформаціями і напруженнями в межах закону Гука, малості переміщень відносно лінійних розмірів тіл [4]. Система переміщень задачі Герца одержана на основі системи переміщень Буссінеска для задачі про дію зосередженої сили на пружний півпростір. Строго це доказав Н.М.Беляєв [1].

Для відомого розв’язку переміщення точок вздовж осей *x,y,z* визначаються формулами

$$\left.\begin{aligned} u &= -\frac{z}{4\pi G}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{4\pi(\lambda+G)}\int_z^\infty \frac{\partial V}{\partial x}dz, \\ v &= -\frac{z}{4\pi G}\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{1}{4\pi(\lambda+G)}\int_z^\infty \frac{\partial V}{\partial y}dz, \\ w &= -\frac{z}{4\pi G}\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\lambda+2G}{4\pi G(\lambda+G)}V, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

де λ, G – постійні Ламе, V – ньютонів потенціал простого шару,

$$V = \frac{3P}{4}\int_t^\infty \frac{1-\dfrac{x^2}{a^2+s}-\dfrac{y^2}{b^2+s}-\dfrac{z^2}{s}}{\sqrt{(a^2+s)(b^2+s)s}}ds\,, \tag{2}$$

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)},\ \mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \tag{3}$$

E, ν – модуль пружності та коефіцієнт Пуассона, а t є найбільшим коренем рівняння

$$\frac{x^2}{a^2+t}+\frac{y^2}{b^2+t}+\frac{z^2}{t}-1=0\,. \tag{4}$$

У роботі [2] нами показано, що система (1) не задовольняє граничну умову

$$w_{z\to\infty} = 0\ . \tag{5}$$

Ця обставина дає змогу класифікувати відомий розв'язок [1,5] як наближений.

Знайдемо систему переміщень, яка задовольняє необхідні умови теорії пружності в рамках більш точного розв'язку задачі.

Розв'язок поставленої задачі не передбачає введення додаткових припущень, крім загальноприйнятих [4]. Нам видається більш коректною передумова і щодо відсутності дотичних напружень у точці (на лінії) початкового контакту, а не щодо площадки в загальному – такі напруження можуть виникнути внаслідок утворення площадки, що не суперечить факту відсутності зовнішніх дотичних навантажень.

В основу досліджень покладемо систему (1), застосувавши наслідок [3] із принципу Лагранжа, за яким модифікація системи переміщень, тобто зміна коефіцієнтів з постійними Ламе перед членами функцій, може призвести до виконання умови (5).

Запишемо такі необхідні умови теорії пружності для зміни комбінації коефіцієнтів з постійними Ламе перед складовими функцій (1):

1. Об'ємне відносне розширення

$$\Theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \tag{6}$$

повинно бути гармонійною функцією, тобто задовольняти рівняння Лапласа

$$\nabla^2 \Theta = 0. \tag{7}$$

Задовольняє умову (7) функція $\Theta = f\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)$.

2. Нормальний тиск *p(x,y)* розподілений по області Ω на границі тіл, де дійсна задача Неймана

$$\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_{z \to 0} = \left.\begin{cases} -p(x,y)\cdot 2\pi & \textit{всередині } \ \Omega, \\ 0 & \textit{зовні } \ \Omega, \end{cases}\right\} . \tag{8}$$

3. Переміщення вздовж осі *z* повинно задовольняти граничну умову на безмежності і бути функцією потенціалу V. Поставлені вимоги виконуються формулою

$$w = \frac{\lambda + 2G}{4\pi G(\lambda + G)}\left(V - \frac{z}{2}\frac{\partial V}{\partial z}\right) = \frac{\lambda + 2G}{4\pi G(\lambda + G)}\frac{3P}{4}\int_t^{\infty}\frac{\left(1 - \frac{x^2}{a^2+s} - \frac{y^2}{b^2+s}\right)ds}{\sqrt{(a^2+s)(b^2+s)s}}, \tag{9}$$

де

$$\frac{z}{2}\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{3P}{4}\int_t^{\infty}\frac{\frac{z^2}{s}ds}{\sqrt{(a^2+s)(b^2+s)s}},$$

а *V* задано формулою (2). Очевидно, що формула (9) задовольняє умову (5).

4. Модифікована система переміщень, якщо нехтувати об'ємними зусиллями, повинна задовольняти основні рівняння пружної рівноваги, тобто рівняння Ламе

$$\left.\begin{aligned}&(\lambda+G)\frac{\partial\Theta}{\partial x}+G\nabla^2 u=0,\\&(\lambda+G)\frac{\partial\Theta}{\partial y}+G\nabla^2 v=0,\\&(\lambda+G)\frac{\partial\Theta}{\partial z}+G\nabla^2 w=0,\end{aligned}\right\},$$

які в тому випадку приводяться до вигляду [4]

$$\nabla^4 u=0,\quad \nabla^4 v=0,\quad \nabla^4 w=0. \tag{10}$$

5. Потенціал (2) є гармонійною функцією, тобто

$$\nabla^2 V=\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0. \tag{11}$$

6. Для точки (точок) початкового контакту відсутні дотичні напруження, тобто не діють зовнішні дотичні навантаження.

Запишемо систему переміщень (1) у вигляді [3]

$$\left.\begin{aligned}&u=-\frac{n_3}{4\pi}z\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{n_1}{4\pi}\int_z^\infty\frac{\partial V}{\partial x}dz,\\&v=-\frac{n_3}{4\pi}z\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{n_1}{4\pi}\int_z^\infty\frac{\partial V}{\partial y}dz,\\&w=-\frac{n_3}{4\pi}z\frac{\partial V}{\partial z}+\frac{n_2}{4\pi}V.\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Для переміщень w із формули (9) виникає, що

$$n_3=\frac{\lambda+2G}{2G(\lambda+G)},\qquad n_2=\frac{\lambda+2G}{G(\lambda+G)}. \tag{13}$$

Продиференціюємо переміщення u, v, w системи (12) по x,y,z відповідно, добавивши і віднявши після диференціювання інтегральний вираз у формулі для переміщення w:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{n_3}{4\pi}z\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{n_1}{4\pi}\int_z^\infty\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}dz,\\&\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{n_3}{4\pi}z\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{n_1}{4\pi}\int_z^\infty\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}dz,\\&\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{n_3}{4\pi}z\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}+\frac{n_1}{4\pi}\int_z^\infty\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}dz+\frac{n_2-n_3+n_1}{4\pi}\frac{\partial V}{\partial z},\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

де

$$\frac{\partial V}{\partial z}=-\int_z^\infty\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}dz \tag{15}$$

знайдено простим диференціюванням відомого співвідношення ([1], с. 46)

$$W = -\int_z^{\infty} V dz\,,\quad \frac{\partial W}{\partial z} = V = \frac{\partial}{\partial z}\left(-\int_z^{\infty} V dz\right). \tag{16}$$

Підставивши систему (14) в формулу (6) і враховуючи лапласіан (11), одержимо

$$\Theta = \frac{n_2 - n_3 + n_1}{4\pi}\frac{\partial V}{\partial z}\;. \tag{17}$$

Якщо за умовою (7) покласти

$$\Theta = \frac{1}{4\pi(\lambda + G)}\frac{\partial V}{\partial z}\;, \tag{18}$$

то коефіцієнт

$$n_1 = \frac{1}{\lambda + G} - n_2 + n_3 = -\frac{\lambda}{2G(\lambda + G)}\;. \tag{19}$$

Враховуючи формули (13), (19), запишемо шукану систему переміщень

$$\left.\begin{aligned} u &= -\frac{\lambda + 2G}{8\pi G(\lambda + G)} z\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\lambda}{8\pi G(\lambda + G)}\int_z^{\infty}\frac{\partial V}{\partial x}dz,\\ v &= -\frac{\lambda + 2G}{8\pi G(\lambda + G)} z\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\lambda}{8\pi G(\lambda + G)}\int_z^{\infty}\frac{\partial V}{\partial y}dz,\\ w &= -\frac{\lambda + 2G}{8\pi G(\lambda + G)} z\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\lambda + 2G}{4\pi G(\lambda + G)}V, \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

яка задовольняє поставлені умови.

Розглянемо дотримання умови (8). Осьове напруження визначається відомою формулою [1,4]

$$\sigma_я = \lambda\Theta + 2G\frac{\partial w}{\partial z}\;, \tag{21}$$

де

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\lambda + 2G}{8\pi G(\lambda + G)}\left(\frac{\partial V}{\partial z} - z\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right). \tag{22}$$

Підставивши в формулу (21) вирази (18), (22), після перетворень одержимо формулу

$$\sigma_z = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\lambda + 2G}{4\pi(\lambda + G)} z\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\,, \tag{23}$$

яка для z=0 задовольняє умову (8). Легко переконатися в тому, що умова (8) виконується тільки для прийнятого значення Θ (18), тобто система (20) має єдиний розв'язок.

Умова (7) одержана із синтезуючих рівнянь Ламе, тому задовольняються рівняння рівноваги (10) і рівняння сумісності деформацій Сен-Венана, але не справджується рівняння Ламе. Очевидно, що умова (8) виконується і, назвемо його так, неповним потенціалом (9)

$$*V = \frac{3P}{4}\int_t^{\infty}\frac{1-\dfrac{x^2}{a^2+s}-\dfrac{y^2}{b^2+s}}{\sqrt{(a^2+s)(b^2+s)s}}ds, \tag{24}$$

похідна якого

$$\frac{\partial * V}{\partial z} = -\frac{3P}{2}\frac{\dfrac{z^2}{t}\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2+t}-\dfrac{y^2}{b^2+t}}}{\sqrt{(a^2+t)(b^2+t)}\left[\dfrac{tx^2}{(a^2+t)^2}+\dfrac{ty^2}{(b^2+t)^2}+\dfrac{z^2}{t}\right]} \tag{25}$$

для z=0, t=0

$$\left(\frac{\partial * V}{\partial z}\right)_{z\to 0} = -\frac{3P}{2ab}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,. \tag{26}$$

Враховуючи формули (9), (24), можна записати:

$$\frac{\partial * w}{\partial z} = \frac{\lambda+2G}{4\pi G(\lambda+G)}\frac{\partial * V}{\partial z}\,. \tag{27}$$

Неповний потенціал $*V$ – функція не гармонійна, тому не може використовуватися в системі (12) замість потенціалу V (2). Осьове напруження σ_z, знайдене за формулами (21), (22) і (27), (21) ідентичне

$$\sigma_z = -\frac{\lambda}{4\pi(\lambda+G)}\frac{3P}{2}z\int_t^{\infty}\frac{ds}{s\sqrt{(a^2+s)(b^2+s)s}} - \frac{(\lambda+2G)3P}{4\pi(\lambda+G)}\frac{\dfrac{z^2}{t}\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2+t}-\dfrac{y^2}{b^2+t}}}{\sqrt{(a^2+t)(b^2+t)}\left[\dfrac{tx^2}{(a^2+t)^2}+\dfrac{ty^2}{(b^2+t)^2}+\dfrac{z^2}{t}\right]}. \tag{28}$$

Для площадки контакту [1] (z=0, t=0) із формули (2)

$$\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_{z\to 0} = -\lim_{z\to 0}\frac{3P}{2}z\int_t^{\infty}\frac{ds}{s\sqrt{(a^2+s)(b^2+s)s}} = -\frac{3P}{ab}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,, \tag{29}$$

а із формули (28)

$$\sigma_z = -\frac{3P}{2\pi ab}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}} = -p_0\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}, \tag{30}$$

що підтверджує правильність системи переміщень (20). Після перетворень стають ідентичними формули (22), (27).

Залишається перевірити виконання системою (20) умов (10). Відомо, що для системи (1) умови (10) виконуються [1,5]. Очевидно, що переміщення *u, v* модифікованої системи (20) теж задовольняють рівняння (10). Щодо переміщень *w* (20), то тут ситуація дещо інша. Модифікація формули (1) привела до зміни самої функції для переміщень *w*, тобто ці переміщення стали функцією неповного потенціалу ${}^{*}V$ (9), (24). Виконавши диференціювання функції переміщень w (20), одержимо

$$\nabla^2 w = -2k\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}, \qquad k = \frac{\lambda + 2G}{8\pi G(\lambda + G)}, \tag{31}$$

а також

$$\nabla^2\left(\nabla^{2^*}V\right) = \nabla^2\left(\nabla^2 w\right) = -2k\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right) = 0,$$

тобто неповний потенціал ${}^{*}V$ є бігармонійною функцією, яка задовільняє рівняння (10). Отже, система (20) і потенціал (2) визначають більш точний розв’язок задачі Герца в межах теорії пружності.

Висновки:

1. Модифікована система переміщень задовольняє поставлені вимоги теорії пружності.
2. Модифікація відомої системи переміщень, строго одержаної Н.М. Беляєвим на підставі системи Буссінеска для задачі про дію зосередженої сили на пружний півпростір, здійснена строго на основі принципу Лагранжа.
3. Модифікована система є єдиною, одержаною на основі системи Буссінеска, системою, яка задовольняє поставлені вимоги теорії пружності.
4. Враховуючи наведені вище висновки, модифіковану систему (20) з потенціалом (2) можна вважати більш точним розв’язком задачі Герца.

1. Беляев Н.М. Труды по теории упругости и пластичности. М., Гостехиздат. 1957. 2. Римар О.М. Виконання граничних умов для відомого розв’язку задачі Герца // Проектування, виробництво та експлуатація автотранспортних засобів і поїздів. Зб. наук. пр. Львів. Асоціація “Автобус” 1999. Вип.2, с.84-87. 3. Римар О.М. Модифікація рівнянь переміщень для просторових контактних задач // Вісн. ДУ “Львівська політехніка”. Львів. 1999. № 371. С.21-24. 4. Подгорный А.Н., Марченко Г.А., Пустынников В.И. Основы и методы прикладной теории упругости. Киев: Вища школа, 1981. - 328 с. 5. Динник А.Н. Удар и сжатие упругих тел. Киев, Изд-во АН УССР, 1952. Т.1. - 151 с.

УДК 621.9.

Сокіл Б.І.

ДУ “Львівська політехніка”, кафедра “Теоретична механіка”

ДОСЛІДЖЕННЯ НЕЛІНІЙНИХ КОЛИВАНЬ СТРІЧОК КОНВЕЄРІВ

Розроблено методику дослідження нелінійних коливань для одного класу механічних систем, рух яких описується диференціальним рівняннями з частинними похідними.