Гачкевич О.Р.[*], Будз С.Ф.[*], Асташкін В.І.[*], Ірза Є.М.[*], Яцюк Р.А.[**]

***Інститут прикладних проблем механіки і математики НАН України, Львів**

****ДУ "Львівська політехніка", кафедра “Охорона праці”**

МЕТОДИКА ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ В СКЛЯНИХ ТІЛАХ ПІД ЧАС ТЕПЛОВОГО НАВАНТАЖЕННЯ

Пропонується математична модель і методика визначення напружено-деформованого стану в скляних тілах під час теплового навантаження з врахуванням структурних перетворень та термов’язкопружних властивостей скла. Методика використана для опису гартування скляних пластин.

Mathematical model and method for calculation of stressed state in glass solids at heat loading with taking account the structural transformations and thermoviscouselastic properties are proposed. Solving method for posed problem is used for analyses of hardening process in glass plates.

Виготовлення та обробка виробів із скла пов’язані із застосуванням теплових навантажень, внаслідок яких вони можуть змінювати задану геометричну форму, руйнуватися, втрачати запас міцності чи отримувати високі рівні залишкових напружень. У зв’язку з цим для оцінки впливу режимів термообробки на міцність і надійність виробів (як під час виготовлення, так і під час експлуатації) актуальними є визначення і аналіз напруженого стану скляних тіл під час термосилового навантаження.

У цій роботі запропонована математична модель визначення напружено-деформованого стану скляних тіл, які перебувають в умовах функціонального теплового навантаження: це навантаження характеризується нагріванням скляних тіл до високих температур (порядку 700°C), при яких скло поводиться як в'язка рідина. Потім скло охолоджується до кінцевої натуральної температури. При охолодженні, коли скло проходить через температуру склування $t_g=630^{\circ}$C в ньому "заморожуються" залишкові деформації і відбуваються структурні зміни, які призводять до утворення залишкових напружень [1].

Порівняно з відомими в літературі математичними моделями [1,2], запропонована модель враховує термов'язкопружні властивості матеріалу, які зумовлюють утворення залишкових напружень під час охолодження. Вона формулюється для тривимірного випадку і описує теплове навантаження в цілому від нагрівання до охолодження.

Приймаємо, що скляне тіло займає область Ω евклідового простору R^3 і обмежене неперевною за Ліпшицем поверхнею Γ. У просторі введена криволінійна ортогональна система координат $Ox^1x^2x^3$. Тіло піддається нагріванню зовнішнім середовищем з температурою t_c через частину поверхні Γ_t і тепловим потоком q через частину поверхні Γ_q $\left(\Gamma_t \cup \Gamma_q = \Gamma\right)$. У тілі діють розподілені джерела тепла потужністю Q. Максимальна температура нагрітого тіла є t^* (порядку 700°C). Потім тіло охолоджується зовнішнім середовищем з температурою t_c до стану з максимальною температурою t_k. На частині Γ_u

загальної поверхні тіла Г задані переміщення $\bar{u} = \left(u_1^0, u_2^0, u_3^0\right)$, а на іншій, Γ_σ, силове навантаження, яке характеризується вектором $\bar{p} = (p^1, p^2, p^3)$, $(\Gamma_u \cup \Gamma_\sigma = \Gamma)$.

Задачу формулюємо в квазістатичній постановці і в переміщеннях (з врахуванням залежності теплофізичних характеристик скла від температури) .

За прийнятих припущень розподіл температури в тілі описується рівнянням теплопровідності [1]

$$\rho c \frac{\partial t}{\partial \tau} = \nabla(\lambda \nabla t) + Q \tag{1}$$

за граничних і початкових умов

$$\left[\lambda \frac{\partial t}{\partial n} + \alpha\left(t - t_c\right)\right]_{\Gamma_t} = 0 \;; \qquad \left[\lambda \frac{\partial t}{\partial n} + q\right]_{\Gamma_q} = 0 \;; \qquad t(M,0) = t_0 . \tag{2}$$

Тут c – питома теплоємність; ρ – густина; τ – час; λ – коефіцієнт теплопровідності; α – коефіцієнт теплообміну; ∇ – оператор Гамільтона; M – довільна точка області Ω; n – зовнішня нормаль до поверхні тіла. У зв'язку з тим, що максимальні температури нагрівання є порядку 700°C, коефіцієнт α може враховувати і теплообмін випромінюванням з зовнішнім середовищем [5].

Для кількісного опису напружено-деформованого стану скляних тіл під час теплового навантаження використовуємо принцип адитивності [3], згідно з яким приріст компонент тензора повної деформації має вигляд

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^{e} + d\varepsilon_{ij}^{t} + d\varepsilon_{ij}^{c} + d\varepsilon_{ij}^{ost} + d\varepsilon_{ij}^{str} . \tag{3}$$

Тут $d\varepsilon_{ij}^{e} = \frac{1}{9K} g_{ij} d\sigma + \frac{1}{2G} dS_{ij}$ – приріст компонент тензора пружної деформації в діапазоні температур нижчих від температури склування t_g [1], де S_{ij}, σ – відповідно девіаторна і кульова частини тензора напружень; α_t – лінійний коефіцієнт температурного розширення скла; K – модуль об'ємного стиску; G – модуль зсуву; g_{ij} – коваріантний метричний тензор; $d\varepsilon_{ij}^{t} = \alpha_t g_{ij} dt$ – приріст компонент тензора термічної деформації; α_t – лінійний коефіцієнт температурного розширення; $d\varepsilon_{ij}^{c} = \frac{1}{2G\eta} S_{ij} d\tau$ – приріст компонент тензора деформації повзучості в діапазоні температур, вищих від температури склування t_g; η – коефіцієнт в'язкості; $d\varepsilon_{ij}^{ost} = -\alpha_t g_{ij} d\Phi$ – приріст компонент тензора залишкової деформації при досягненні температури склування t_g. Функція навантаження Φ визначається з гіпотези «заморожуваня» [1]

$$\frac{\partial t}{\partial s} = \frac{\partial \Phi}{\partial s}, \text{ s – нормаль до ізотермічної поверхні } t\left(M, \tau_g\right) = t_g ;$$

$d\varepsilon_{ij}^{str} = \beta g_{ij} df$ – приріст компонент тензора структурної деформації, яка виникає в склі внаслідок фіксації нерівноважної структури (що зумовлена зростанням в’язкості скла під час пониження температури), β – коефіцієнт структурного розширення, зумовленого структурними змінами; f – зведений вільний об'єм скла, який визначається формулою [6]

$$f = \frac{1}{4} t_g \left(\alpha_T - \alpha_L \right);$$

де α_T і α_L – об'ємні коефіцієнти термічного розширення скла у рідкому і твердому станах. Температура склування t_g залежить від швидкості q охолодження скла за законом

$$t_g^{-1} = c_1 (1 - 0.03 \lg q);$$

де c_1 – матеріальна константа марки скла [4].

Крім співвідношень (1) - (3) в області $\overline{\Omega}$ повинні виконуватися рівняння рівноваги

$$\nabla_j \sigma^{ij} + F^i = 0 \tag{4}$$

і механічні граничні умови

$$\left(n_j \sigma^{ij} - p^i \right)_{\Gamma_\sigma} = 0; \qquad u_{i/\Gamma_u} = u_i^0; \qquad \left(i = 1,..,3 \right) \tag{5}$$

Тут σ^{ij} – контраваріантні компоненти тензора напружень; F^i – контраваріантні компоненти об'ємних сил. ∇_j – коваріантні похідні по координаті x_j; n_j – коваріантні компоненти одиничного вектора зовнішньої нормалі до поверхні Γ_σ; p^i – контраваріантні компоненти вектора зовнішнього навантаження до поверхні Γ_σ; u_i^0 – коваріантні компоненти заданого вектора переміщення на поверхні Γ_u; індекс j є індексом підсумовування (від 1 до 3).

Обмежимось випадком малих деформацій. При цьому зв'язок між компонентами тензора деформацій $\hat{\varepsilon}$ і вектором переміщень $\overline{u} = \left(u_1, u_2, u_3 \right)$ приймаємо лінійним.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\nabla_i u_j + \nabla_j u_i \right). \tag{6}$$

Співвідношення (1) - (6) становлять повну систему рівнянь для визначення температурного поля, вектора переміщень, тензорів деформацій і напружень при заданих значеннях температури навколишнього середовища t_c, теплового потоку q, потужності внутрішніх джерел тепла Q і зовнішнього навантаження $\overline{p}$.

Розв'язання сформульованої задачі (1) - (6) здійснюємо в два етапи. На першому етапі розв'язуємо задачу теплопровідності (1) - (2), а на другому – термов'язкопружності (3) - (6).

Для розв'язання рівняння теплопровідності (1) з крайовими умовами (2) використовуємо метод зважених нев'язок в поєднанні з методом скінченних елементів [6]. При цьому задача зводиться до диференційних рівнянь першого порядку

$$\left[C_1(T) \right] \frac{d\{T\}}{d\tau} + \left[K_1(T) \right] \{T\} = \{F_1(T)\}, \tag{7}$$

для визначення температурного поля скляного тіла у вузлах елементів, на які воно розділене. Тут $[C_1]$ – динамічна матриця жорсткості; $[K_1]$ – глобальна матриця жорсткості; $\{F_1\}$ – вектор навантаження; $\{T\}$ – вектор значень температури у вузлах елементів [7].

Система звичайних диференційних рівнянь (7) розв'язується методом скінченних різниць. Для цього вибираємо дискретну за часом τ множину точок τ_0, τ_1, ...τ_n, ... і розкладаємо похідну вектора температури за часом в ряд Тейлора. У результаті отримаємо систему алгебраїчних рівнянь для визначення вектора значень температури у вузлах елементів

$$\left(\left[C_1(T_n)\right]+\theta\left[K_1(T_n)\right]\Delta\tau_n\right)\{T\}_{n+1}=\left(\left[C_1(T_n)\right]-(1-\theta)\left[K_1(T_n)\right]\Delta\tau_n\right)\{T\}_n+ \\ +\{F_1(T_n)\}\Delta\tau_n \tag{8}$$

де $\Delta\tau_n$ – крок за часом; $\{T\}_{n+1}$ – значення температури в момент часу τ_{n+1}; θ – точка колокації (θ = 0 схема Ейлера; θ = 0.5 – схема Кранка-Нікольсона; θ = 2/3 – метод Гальоркіна ; θ = 1 – схема різницею назад).

Під час розв'язання системи диференційних рівнянь (3) - (6), для визначення напружено-деформованого стану, використовуємо формулювання методу скінченних елементів прив'язане мінімізацією потенціальної енергії [7]. Згідно з цим, повну потенціальну енергію П тіла можна розділити на дві частини, одна з яких відповідає енергії деформації Λ, а друга – роботі прикладених до тіла сил W, тобто

$$\Pi = \Lambda - W, \tag{9}$$

де

$$\Lambda=\iiint_\Omega \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}dV \tag{10}$$

$$W=\iiint_\Omega F_i u_i dV+\oiint_\Gamma P_i u_i dS \tag{11}$$

Для визначення напружено-деформованого стану скляного тіла область Ω розділюємо на елементи. Потенційну енергію П представляємо як функціонал від переміщень у вузлах скінченних елементів і проводимо мінімізацію за методикою, викладеною в [7]. Внаслідок цього отримаємо систему звичайних диференційних рівнянь вигляду

$$\left[C_2(T,U)\right]\frac{d\{U\}}{d\tau}+\left[K_2(T,U)\right]\{U\}=\{F_2(T,U)\} \tag{12}$$

Тут $[C_2]$ – динамічна матриця жорсткості; $[K_2]$ – глобальна матриця жорсткості ; $\{F_2\}$ – вектор навантаження; $\{U\}$ – вектор значень переміщень у вузлах елементів.

Систему звичайних диференційних рівнянь (12) розв'язуємо за схемою, вище викладеною під час визначення температури. За знайденими із (12) переміщеннях за допомогою залежностей (3) знаходимо напружено-деформований стан скляного тіла.

Запропонована методика використана під час опису гартування скляної пластини завтовшки h = 6мм , яка виготовлена із скла С-93.

Гартування скляних пластин здійснюється в два етапи. На першому етапі пластина нагрівається зовнішнім середовищем з температурою $t_c(\tau)$. У початковий момент пластина прогріта рівномірно по всій товщині до температури t_0. Від початкового стану з температурою t_0 пластину нагріваємо до моменту, коли на її поверхнях досягається температура t^*, яка вища від температури склування t_g,. На другому етапі пластина охолоджується зовнішнім середовищем (від досягнутого стану з температурою поверхонь t^*) до стану з температурою t_k на серединній поверхні пластини, яка є нижчою від температури склування. Нагрівання пластини регулюється зміною температури зовнішнього середовища. Охолодженням керуємо зміною коефіцієнта теплообміну $\alpha(\tau)$ із навколишнім середовищем. Метою гартування є отримання необхідного рівня залишкових напружень.

На рис. 1 суцільною і штрих-пунктирними лініями зображені два режими нагрівання скляної пластини до максимальної температури t^* на поверхнях пластини. На рис. 2 подані режими охолодження скляної пластини до кінцевої температури t_k. Кожному з розглянутих режимів нагрівання-охолодження відповідає свій закон зміни температури на поверхні пластини (рис. 3) і свій закон зміни максимальних розтягувальних напружень (рис. 4). Після завершення термообробки в пластині виникають залишкові напруження, які істотно залежать від вибраного режиму (рис.5).

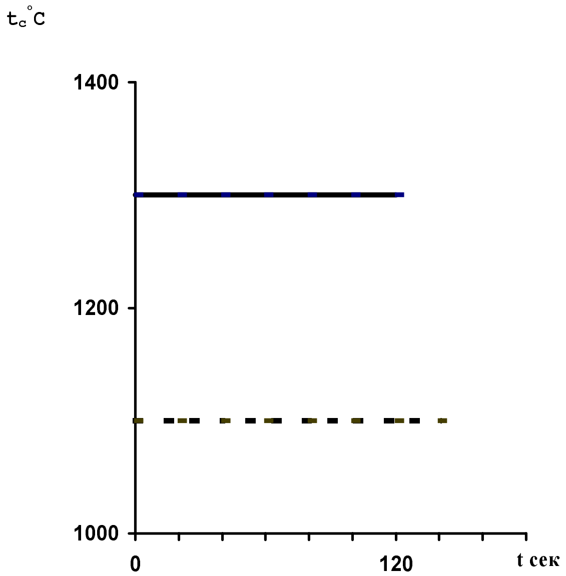

Рис.1. Режими нагрівання.

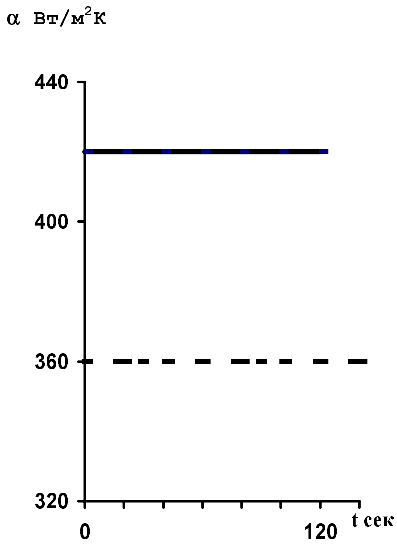

Рис.2. Режими охолодження.

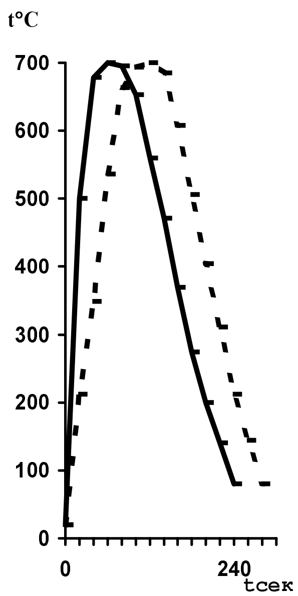

Рис.3. Закон зміни температури на поверхні пластини.

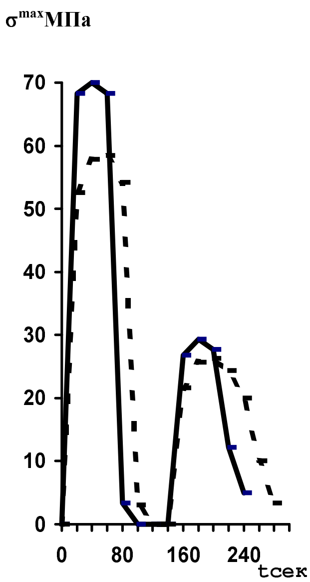

Рис.4. Закон зміни максимальних розтягувальних напружень.

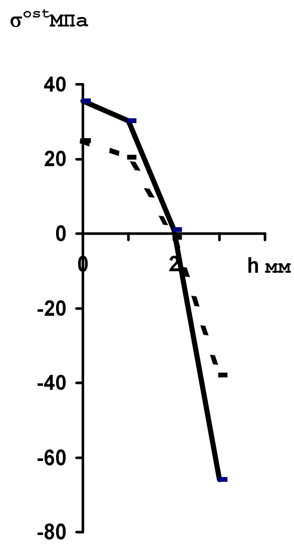

Рис.5. Залишкові напруження.

Як видно із отриманих даних інтенсивніші режими нагрівання-охолодження (більша температура нагрівального середовища і вищий коефіцієнт теплообміну) скорочують тривалість термічної обробки в цілому і забезпечують вищий рівень залишкових напружень на поверхні скляної пластини.

Запропонована методика дає можливість прогнозувати результати впливу теплових режимів навантаження на напружений стан скляних тіл. На її підставі можна здійснити параметричну оптимізацію гартування скляної пластини (чи окремих його етапів).

1. Бартенев Г.М. Механические свойства и тепловая обработка стекла. М., 1960. 2. Инденбом В.Л. К теории закалки стекла // Техн. физика. 1954. 24. Вып.7. С.925-927. 3. Махненко В.И. Расчетные методы исследования кинетики сварочных напряжений и деформаций. К., 1982. 4. Сандитов Д.С., Бартенев Г.М. Физические свойства неупорядоченых структур. М., 1982. 5. Асташкін В.І. Моделювання і розрахунок фазового складу сталей при нерівномірному нагріві-охолодженні. Львів, АН України, Фізико-механічний інститут. Препринт № 191, 1994, 28с. 6. О. Зенкевич, К. Морган. Конечные элементы и аппроксимация. М., 1986. 7. Л.Сегерлинд Применение метода конечных элементов. М., 1979.

УДК 621.833.002-19

Гуліда Е.М.

ДУ "Львівська політехніка", кафедра "Технологія машинобудування"

ВИЗНАЧЕННЯ ЗМІНИ НАДІЙНОСТІ ЗУБЧАСТИХ ПЕРЕДАЧ

Розглянуто методику визначення зміни надійності зубчастих передач зовнішнього зачеплення за її показниками під час впровадження прогресивних технологій виготовлення зубчастих коліс.

The technique of definition of change of reliability of gears of an external gearing on its indexes is considered at implantation of progressive techniques of manufacture of cog-wheels.

Одним з головних показників надійності зубчастих передач є середній наробіток до відмови, який визначається залежно від границі витривалості зубців коліс [1]

$$T_{сер.} = N_0 / n_ц 60(\sigma_e / \sigma_r)^k \tag{1}$$

або від зношування бічних поверхонь зубців [2]

$$T_{сер.} = \frac{\lfloor h_I \rfloor}{I_h \cdot L_S \cdot n_ц \cdot Z_S}, \tag{2}$$