УДК 536.7

Гащук П.М.
ДУ "Львівська політехніка", кафедра експлуатації
та ремонту автомобільної техніки

ПРО АЛГОРИТМІЧНЕ І ЗМІСТОВНЕ ОЗНАЧУВАННЯ ПОНЯТТЯ ІДЕАЛЬНОГО ТЕПЛООБМІННИКА В ТЕОРІЇ ТЕПЛОВИХ МАШИН

Розглянуто алгоритм організації ідеального обміну теплотою в теплових машинах. Алгоритм спирається на теоретичні засади класичної термодинаміки і відповідає загальноприйнятій концепції аналізу теоретичних термодинамічних циклів теплових машин різного призначення.

Теплообмінники – пристрої, що покликані впорядковано і якнайефективніше вирівнювати температури термодинамічних тіл – виконують найрізноманітніші функції навіть у рамках однієї теплової машини. Зокрема, в двигунах зовнішнього згоряння (наприклад, Стірлінга) на теплообмінники покладено функції нагрівача, охолоджувача, регенератора, підігрівача. Робоче тіло нагрівача сприймає теплоту від джерела теплоти з високою температурою і віддає її робочому тілу власне двигуна, яке при нижчій температурі знаходиться в робочій порожнині двигуна, з'єднаній з порожниною розширення. В охолоджувальному пристрої тепловий потік спрямований у довкілля: робоче тіло охолоджувального пристрою, відбираючи теплоту від охолоджуваного тіла, віддає її зовнішньому термодинамічному тілу – довкіллю. Охолоджувальне тіло покликане "наблизити" довкілля до робочого тіла власне двигуна в період бажаного вилучення теплоти з двигуна. Регенератор виконує роль "теплової губки", яка почережно відбирає від робочого тіла двигуна теплоту, а потім в іншому такті повертає її йому ж. Він є своєрідним накопичувачем, акумулятором теплоти з відносно коротким у часі циклом "заряджання–розряджання", що працює в умовах значних перепадів температур – від температури, яка є в охолоджувальному пристрої, до температури, яка є в нагрівальному пристрої. Теплове навантаження на регенератор пересічно перевищує теплове навантаження в нагрівальнику в три–чотири рази. Підігрівач, на відміну від інших перерахованих типів теплообмінних пристроїв, не належить до функціонально необхідних; він призначений тільки для підігрівання повітря, що подається у камеру згоряння, сприяючи підвищенню ефективності теплотворення і заощадженню палива (при використанні радіоізотопних джерел енергії, енергії сонця, акумуляторів тепла тощо, підігрівач як такий стає непотрібним).

Щодо холодильних машин, то використовується дещо інша термінологія. Замість терміна "нагрівач" використовується термін "конденсатор", а термін "підігрівач" замінюють на "теплообмінник попереднього охолодження". Коли йдеться про теплові помпи, що працюють з підведенням теплоти при температурі довкілля, “нагрівальний пристрій” називають “поглиначем (абсорбером) теплоти”, а “холодильник” – “нагрівачем”.

У двигуні, холодильнику, тепловій помпі напрям теплового потоку однаковий – в порожнину розширення і з порожнини стиску, але рівні температур при цьому різні: в двигуні температурний рівень у нагрівачі наближений до максимально допустимого для конструкційних матеріалів, а температурний рівень у холодильнику – до температури у довкіллі; в холодильниках конденсатор працює в умовах низьких температур, холодильник – також при температурі довкілля; в теплових помпах температура в абсорбері наближається до температури довкілля, а в холодильнику є підвищена температура. Теплові машини зовнішнього згоряння здатні працювати у режимах двигуна, холодильника, теплові помпи. Тож у теорії такого типу машин термінологічні однозначність, точність, універсальність є визначальними. Зауважимо й таке: якщо холодильником називають теплову машину, то той же термін зовсім недоцільно використовувати для означення теплообмінного пристрою, як це часто робиться. При означенні термодинамічних процесів і пристроїв нерідко використовуються неоднопорядкові ознаки. Достатньо широко вживаним термінам, таким, зокрема, як теплотворення, тепловивільнення-тепловиділення, тепловипромінювання-тепловіддання, теплорозвіювання-тепловтрачання, теплоспоживання-тепловикористання, теплопоглинання-теплонакопичення-теплоакумулювання, теплопересилання-теплопередавання тощо, рідко надають цілком окресленого і розмежованого змісту, що характеризувало б їх як наукові терміни.

Спільним для теплових машин і теплових обмінників є наявність термодинамічно активного робочого тіла. Принципово ж відрізняє машини від обмінників те, що в них теплові процеси і процеси виконання роботи є яскраво вираженими і впорядковано супутніми, тоді як у теплообмінниках виконання роботи не належить до необхідних функцій, а найскоріше є виявом їх неідеальності у теоретичному смислі. Візьмемо, наприклад, детандер (франц. détendre – зменшувати тиск; лат. detendere – послаблювати). У тепловій техніці він використовується для охолодження газу (зокрема, як пристрій для зріджування і розділювання (сепарації) газових сумішей методом глибокого охолодження). Але процес охолодження в ньому здійснюється за рахунок розширення (в поршневому чи турбінному пристрої) газу. Отже, детандер є тепловою машиною, а не теплообмінником.

У двигуні внутрішнього згоряння теплотворення відбувається безпосередньо у робочому просторі (циліндрі). Тому джерело енергії і нагрівальник стають тут зайвими, а, отже, про якийсь процес теплонадсилання у робочий простір двигуна в даному випадку не може йти мова.

Цікавим щодо механізму втілення є процес пересилання теплоти з двигуна внутрішнього згоряння у довкілля. Він здійснюється виключно за рахунок масообміну між робочим простором двигуна та довкіллям.

Нехай в ідеальному термодинамічному циклі процес відведення теплоти є ізохорним (рис.1) (ac, zb, ba – процеси стискування, розширення, тепловідведення; v – об’єм робочого тіла; p, p_0 – тиск у робочому просторі, у довкіллі). Йому відповідатиме деякий ідеалізований процес $bb'rr'a'a$ тепловідведення у двигуні внутрішнього згоряння, який зображено на рис.2. Зрозуміло, що цей процес супроводжується виконанням певної роботи A, що є свідченням його функціональної неідеальності (за ідеал йому можна повною мірою поставити у відповідність відображений на діаграмі рис.3 теоретичний процес зі змішаним, ізохорно-ізобарним відведенням теплоти). Істинно ж ідеальним можна вважати процес теплопересилання у довкілля, відображений діаграмою bara на рис.4. Характерним тут є те, що теплообмін між робочим простором двигуна та довкіллям здійснюється у формі помпових тактів, у процесі реалізації яких вміст теплоти в робочому просторі двигуна зменшується спочатку за рахунок зменшення у ньому кількості теплоносія (процес випуску робочого тіла), а потім – за рахунок збільшення вмісту у робочому просторі речовини із довкілля (процес впуску).

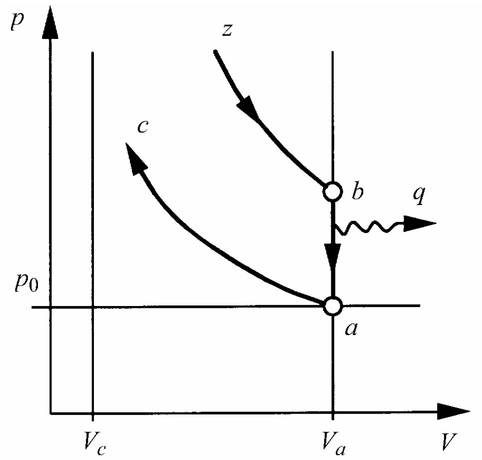


Рис.1. Діаграма ізохорного процесу відведення теплоти (q – потік теплоти)

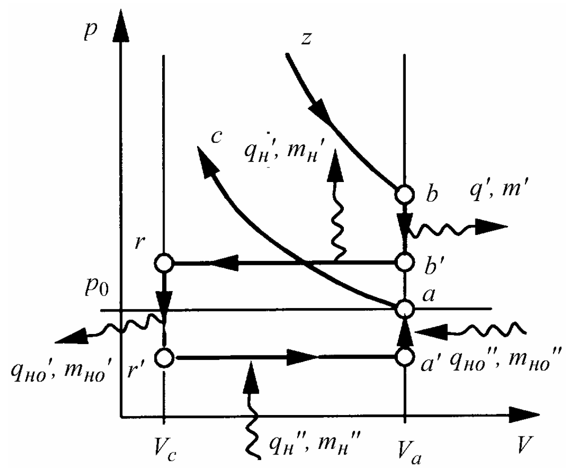


Рис.2. Спрощена діаграма реального процесу відведення теплоти у двигуні внутрішнього згоряння (q,m – потоки теплоти і маси)

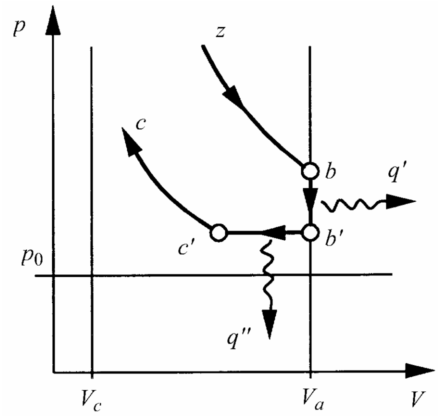


Рис.3. Діаграма ізохорно-ізобарного процесу відведення теплоти

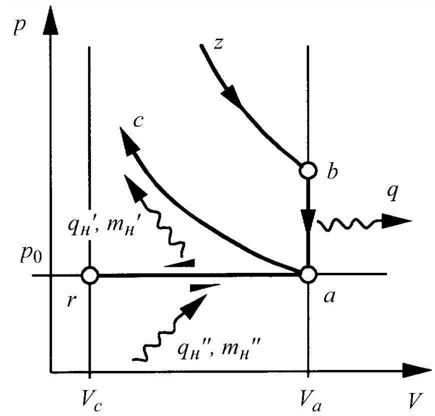
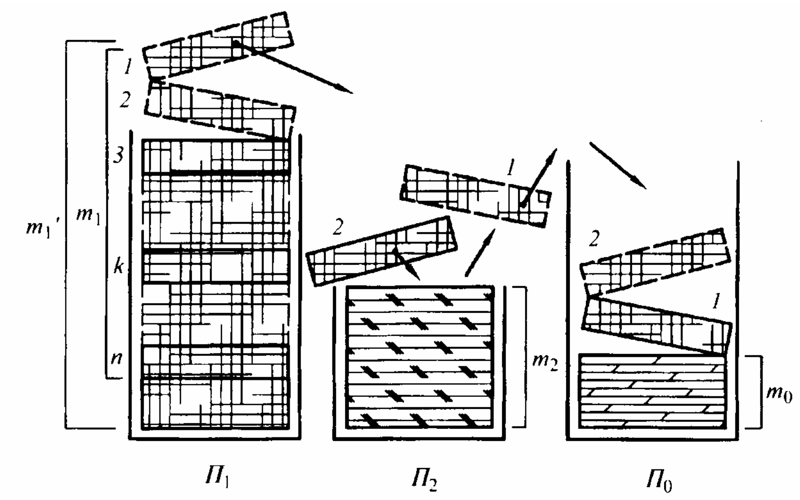


Рис.4. Діаграма ідеального процесу відведення теплоти у двигуні внутрішнього згоряння

Аналогічно відбуваються і теплообмінні процеси, що перебігають в двигуні зовнішнього згоряння. Причому ці уявлення про різні за функціональним призначенням процеси теплообміну повинні будуватись на єдиних засадах. Зазначимо, що під ідеальною регенерацією теплоти розуміють [1] такий процес, при якому чи температура на вході в насадку регенератора (температура в кінці процесу розширення), чи температура на виході з насадки (температура в кінці процесу стиску) залишається сталою. Таке вважається можливим при повільному зникаючому перебігу термодинамічних процесів або за умови, що коефіцієнт тепловіддачі чи площа поверхні теплообміну є нескінченно великими, а також у випадках, коли теплоємність робочого тіла дорівнює нулю, а теплоємність насадки – безмежно велика; ідеальний регенератор не може чинити аерогідравлічного опору; до того ж двигун не повинен мати вільного об’єму.

Розглянемо теплообмінні процеси, спираючись на дещо інші теоретичні закони. При цьому обмежимося лише випадком такого теплообміну, при якому не виконується робота (внутрішня) і не спостерігаються хімічні чи фазові перетворення. Такий підхід дасть змогу зосередити увагу на самому алгоритмі синтезу ідеального теплообміну, уникаючи формальних, аналітичних ускладнень заради наочності.



ųųų.5. ųųųųų ųųųųųųųųųųųų ųųųųųųųųųųųųųų

Нехай три теплоізольовані простори $П_1, П_2, П_0$ містять у собі термодинамічні тіла T_1, T_2, T_0 (рис.5) з температурами, відповідно, t_1^0, t_2^0, t_0^0. Маси цих тіл m_1', m_2, m_0 є різними, а їх теплоємності – однаковими і незалежними від температури. Вважатимемо також, що термодинамічні тіла не здатні розширюватись чи стискатись.

Розділимо частину m_1 маси m_1' тіла T_1 на n однакових за масою часток. Кожну з цих часток тіла T_1 зконтактуємо з тілом T_2, а далі долучимо до тіла T_0. У результаті між просторами $П_1, П_2, П_0$ буде здійснено процес теплообміну, а точніше – процес пересилання маси і теплоти з простору $П_1$ у простір $П_0$ через проміжний простір $П_2$. При цьому вважатимемо, що поза ізольованими просторами будь-який теплообмін взагалі неможливий, а от кожний контакт тіл у межах цих просторів завершується абсолютно повним теплообміном.

Зрозуміло, що температура у просторі $П_1$ залишатиметься сталою (рівною t_1), а температури у просторах $П_2$ і $П_0$ з пересиланням чергової частки m_1/n маси тіла T_1 набуватимуть нових значень. Зокрема, після деякого k-го теплообміну у просторах $П_2$, $П_0$ встановляться температури

$$t_2^k = \frac{\frac{m_1}{n} t_1^0 + m_2 t_2^{k-1}}{\frac{m_1}{n} + m_2}; \qquad (1)$$

$$t_0^k = \frac{\frac{m_1}{n} t_2^k + \left[(k-1)\frac{m_1}{n} + m_0\right] t_0^{k-1}}{k\frac{m_1}{n} + m_0}, \quad k = \overline{1,\ n}. \tag{2}$$

Визначивши і підставивши у вираз (1) послідовно значення t_2^{k-1}, t_2^{k-2}, ..., t_2^1, можна використати при цьому позначення

$$\frac{m_2}{\frac{m_1}{n} + m_2} = \alpha$$

і записати

$$t_2^k = (1-\alpha)\left(1 + \alpha + \alpha^2 + ... + \alpha^{(k-1)}\right) t_1^0 + \alpha^k t_2^0 =$$

$$= \left(1-\alpha^k\right) t_1^0 + \alpha^k t_2^0 = \left[1 - \left(\frac{m_2}{m_2 + \frac{m_1}{n}}\right)^k\right] t_1^0 + \left(\frac{m_2}{m_2 + \frac{m_1}{n}}\right)^k t_2^0. \tag{3}$$

Виразу ж (2) після низки перетворень можна надати такого вигляду:

$$t_0^k = \left(\frac{1}{k+\beta} t_2^k\right) + \left(1 - \frac{1}{k+\beta}\right)\left[\frac{1}{(k-1)+\beta} t_2^{k-1}\right] +$$

$$+ \left(1 - \frac{1}{k+\beta}\right)\left(1 - \frac{1}{(k-1)+\beta}\right)\left[\frac{1}{(k-2)+\beta} t_2^{k-2}\right] + ... +$$

$$+ \left(1 - \frac{1}{k+\beta}\right)\left(1 - \frac{1}{(k-1)+\beta}\right) ... \left(1 - \frac{1}{2+\beta}\right)\left[\frac{1}{1+\beta} t_2^1\right] +$$

$$+ \left(1 - \frac{1}{k+\beta}\right)\left(1 - \frac{1}{(k-1)+\beta}\right) ... \left(1 - \frac{1}{2+\beta}\right)\left(1 - \frac{1}{1+\beta}\right) t_0^0 =$$

$$= \frac{1}{k+\beta}\left[\left(t_2^k + t_2^{k-1} + ... + t_2^1\right) + \beta t_0^0\right],$$

де $\beta = \frac{m_0}{m_1} n$. І нарешті, зваживши на (3), матимемо:

$$t_0^k = \frac{1}{k+\beta}\left[\left(k - \alpha\frac{1-\alpha^k}{1-\alpha}\right) t_1^0 + \alpha\frac{1-\alpha^k}{1-\alpha} t_2^0 + \beta t_0^0\right]. \tag{4}$$

Використовуючи формули (3) і (4), можна визначити температури t_2^n і t_0^n, які встановляться у просторах, відповідно, Π_2 і Π_0 після повного завершення пересилання маси m_1 тіла T_1 з простору Π_1 у простір Π_0:

$$t_2^n = \left(1-\alpha^n\right) t_1^0 + \alpha^n t_2^0; \tag{5}$$

$$t_0^n = \frac{m_1 - m_2\left(1-\alpha^n\right)}{m_0 + m_1} t_1^0 + \frac{m_2\left(1-\alpha^n\right)}{m_0+m_1} t_2^0 + \frac{m_0}{m_0+m_1} t_0^0 . \qquad (6)$$

При k=n матимемо:

$$\alpha^n = \left(\frac{m_2}{m_2 + \frac{m_1}{n}}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{m_1}{m_2}\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{\left[\left(1+\frac{m_1}{m_2}\frac{1}{n}\right)^{\frac{m_1}{m_2}n}\right]^{\frac{m_1}{m_2}}} = \frac{1}{\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]^{\frac{m_1}{m_2}}},$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{m_2}{m_2+\frac{m_1}{n}}\right)^n = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]^{\frac{m_1}{m_2}}} = e^{-\frac{m_1}{m_2}} . \qquad (7)$$

Отже, при необмеженому зростанні кількості n часток, на які ділиться частина m_1 маси m_1' тіла T_1, після участі в теплообміні останньої з цих часток у просторі Π_2 встановиться температура (див. (5) і (7))

$$t_2 = \lim_{n\to\infty} t_2^n = \left(1 - e^{-\frac{m_1}{m_2}}\right) t_1^0 + e^{-\frac{m_1}{m_2}} t_2^0 .$$

У той же час у просторі Π_0 встановиться температура (див. (6) і (7))

$$t_0 = \lim_{n\to\infty} t_0^n = \frac{m_1 - m_2\left(1-e^{-\frac{m_1}{m_2}}\right)}{m_0+m_1} t_1^0 + \frac{m_2\left(1-e^{-\frac{m_1}{m_2}}\right)}{m_0+m_1} t_2^0 + \frac{m_0}{m_0+m_1} t_0^0 .$$

Розглянемо тепер найпростіший випадок «зустрічного» теплообміну. Для цього оперуватимемо двома термодинамічними тілами T_x, T_y, які мають однакові маси і теплоємності, але різні температури – t_x^0, t_y^0. Вважатимемо, що тіла не здатні розширятись-стискатись та змінювати питому теплоємність із зміною температури.

Розділимо і тіло T_x, і тіло T_y на n однакових часток (рис. 6). Кожну з них у межах кожного тіла теплоізолюємо від усіх інших, усуваючи таким чином можливість невпорядкованого теплообміну всередині тіл.

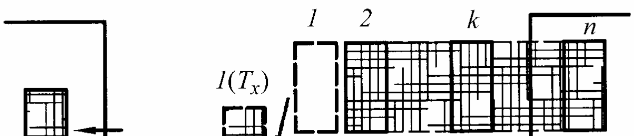


Рис.6. Схема “зустрічного” обміну масою і теплотою

Введемо тепер першу частку (частку 1) тіла T_x в контакт з першою часткою (часткою 1) тіла T_y. В результаті повного теплообміну обидві частки набудуть однакової температури. Далі частку 1 тіла T_x зконтактуємо з частками 2, 3, ..., k, ..., n тіла T_y, кожного разу здійснюючи новий повний теплообмін.

Після деякого чергового теплообміну частка 1 тіла T_x набуде температури

$$t_{x1}^{k} = \frac{1}{2}\left(t_{x1}^{k-1} + t_{y}^{0}\right),\ k = \overline{1,\ n} \tag{8}$$

(тут необхідно розуміти, що $t_{x1}^{0} = t_{x}^{0}$). У той же час температури відповідних часток тіла T_y набувають значень

$$t_{yk}^{1} = t_{x1}^{k},\ k = \overline{1,\ n}, \tag{9}$$

де нижній цифровий індекс є номером частки тіла, позначеного літерним (також нижнім) індексом, а верхній індекс позначає номер відповідної частки іншого тіла.

Аналогічно, послідовно зі всіма частками 1, 2, ..., n тіла T_y зконтактуємо частку 2, а далі – частки 3, ..., n тіла T_x. Температури, які набувають частки 2, ..., n тіла T_x після теплообміну з деякою k-ю часткою тіла T_y, враховуючи (9), можна буде визначити за формулами, аналогічними (8)

$$t_{x2}^{k} = \frac{1}{2}\left(t_{x1}^{k} + t_{x2}^{k-1}\right),\ t_{x3}^{k} = \frac{1}{2}\left(t_{x2}^{k} + t_{x3}^{k-1}\right), \ldots,\ t_{xn}^{k} = \frac{1}{2}\left(t_{x(n-1)}^{k} + t_{xn}^{k-1}\right),\ k = \overline{1,\ n},$$

$$t_{x2}^{0} = t_{x3}^{0} = \ldots = t_{xn}^{0} = t_{x}^{0}.$$

Узагальнюючи, можна записати:

$$t_{xi}^{j} = t_{yj}^{i} = \frac{1}{2}\left(t_{x(i-1)}^{j} + t_{xi}^{j-1}\right),\quad i,j = \overline{1,\ n}, \tag{10}$$

де

$$t_{xi}^{0} = t_{x}^{0},\quad t_{x0}^{j} = t_{y}^{0}. \tag{11}$$

Послідовно, знаходячи за формулою (10) величини $t_{xi}^{1}, t_{xi}^{2}, \ldots, t_{xi}^{k-1}$ для будь-яких заданих j=k, i=p, можна побудувати вираз:

$$t_{xp}^{k} = \frac{1}{2} t_{x(p-1)}^{k} + \frac{1}{2^2} t_{x(p-1)}^{k-1} + \frac{1}{2^3} t_{x(p-1)}^{k-2} + \ldots + \frac{1}{2^k} t_{x(p-1)}^{1} + \frac{1}{2^k} t_{x}^{0}. \tag{12}$$

Аналогічно, застосовуючи формулу (12) для визначення величин $t^1_{x(p-1)}, t^2_{x(p-1)}, ..., t^k_{x(p-1)}$ і в неї ж підставляючи отримані результати, (враховуючи (11)), матимемо:

$$t^k_{xp} = \left(\frac{C^{p-1}_{p-1}}{2^p} + \frac{C^{p-1}_{p}}{2^{p+1}} + \frac{C^{p-1}_{p+1}}{2^{p+2}} + ... + \frac{C^{p-1}_{p+k-2}}{2^{p+k-1}} \right) t^0_y + \left(\frac{C^{k-1}_{k-1}}{2^k} + \frac{C^{k-1}_{k}}{2^{k+1}} + \frac{C^{k-1}_{k+1}}{2^{k+2}} + ... + \frac{C^{k-1}_{k+p-2}}{2^{k+p-1}} \right) t^0_x =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{k-1} \frac{C^{p-1}_{p+\nu-1}}{2^{p+\nu}} t^0_y + \sum_{\nu=0}^{p-1} \frac{C^{k-1}_{k+\nu-1}}{2^{k+\nu}} t^0_x, \tag{13}$$

де C^i_j – біноміальні коефіцієнти.

Вираз (13) дає можливість обчислити значення будь-якої з величин t^k_{xp} $\left(k, p = \overline{1, n}\right)$ безпосередньо за значеннями величин t^0_y, t^0_x. Зокрема, при p=1

$$t^k_{x1} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^k} \right) t^0_y + \frac{1}{2^k} t^0_x = \left(1 - \frac{1}{2^k} \right) t^0_y + \frac{1}{2^k} t^0_x,$$

при p=2

$$t^k_{x2} = \left(\frac{1}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \frac{3}{2^4} + ... + \frac{k}{2^{k+1}} \right) t^0_y + \left(\frac{1}{2^k} + \frac{k}{2^{k+1}} \right) t^0_x = \left[1 - \frac{1}{2^k}\left(1 + \frac{k}{2}\right) \right] t^0_y + \frac{1}{2^k}\left(1 + \frac{k}{2}\right) t^0_x,$$

при k=1; p=k

$$t^1_{xk} = \left(1 - \frac{1}{2^k} \right) t^0_y + \frac{1}{2^k} t^0_x = t^1_{x1} \ ,$$

(що відповідає (9)), при k=p=n

$$t^n_{xn} = \frac{1}{2^n} \left(C^{n-1}_{n-1} + \frac{C^{n-1}_{n}}{2} + \frac{C^{n-1}_{n+1}}{2^2} + ... + \frac{C^{n-1}_{2(n-1)}}{2^{n-1}} \right) \left(t^0_y + t^0_x \right) = \frac{1}{2} \left(t^0_y + t^0_x \right)$$

тощо. Останній результат отримано на основі співвідношення [2]:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{C^k_{n+k}}{2^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{C^n_{n+k}}{2^k} = 2^n \, . \tag{14}$$

Нехай усі частки тіла T_x, кожна з яких обмінялась теплотою послідовно зі всіма частками тіла T_y, потрапляють у деякий простір Π_y (див. рис.6), в якому інших термодинамічних тіл немає. Тоді у цьому просторі буде така температура:

$$t_x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} t^n_{xi} = \frac{1}{n} \left(A t^0_y + B t^0_x \right), \tag{15}$$

де *A* – коефіцієнт, що представляє собою суму елементів матриці

$$[A]=\begin{bmatrix} \frac{C_0^0}{2} & \frac{C_1^0}{2^2} & \frac{C_2^0}{2^3} & \cdots & \frac{C_{n-2}^0}{2^{n-1}} & \frac{C_{n-1}^0}{2^n} \\ \frac{C_1^1}{2^2} & \frac{C_2^1}{2^3} & \frac{C_3^1}{2^4} & \cdots & \frac{C_{n-1}^1}{2^n} & \frac{C_n^1}{2^{n+1}} \\ \frac{C_2^2}{2^3} & \frac{C_3^2}{2^4} & \frac{C_4^2}{2^5} & \cdots & \frac{C_n^2}{2^{n+1}} & \frac{C_{n+1}^2}{2^{n+2}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{C_{n-2}^{n-2}}{2^{n-1}} & \frac{C_{n-1}^{n-2}}{2^n} & \frac{C_n^{n-2}}{2^{n+1}} & \cdots & \frac{C_{2n-4}^{n-2}}{2^{2n-3}} & \frac{C_{2n-3}^{n-2}}{2^{2n-2}} \\ \frac{C_{n-1}^{n-1}}{2^n} & \frac{C_n^{n-1}}{2^{n+1}} & \frac{C_{n+1}^{n-1}}{2^{n+2}} & \cdots & \frac{C_{2n-3}^{n-1}}{2^{2n-2}} & \frac{C_{2n-2}^{n-1}}{2^{2n-1}} \end{bmatrix};$$

$$B=\frac{C_{n-1}^{n-1}}{2^n}+\left(\frac{C_{n-1}^{n-1}}{2^n}+\frac{C_n^{n-1}}{2^{n+1}}\right)+\left(\frac{C_{n-1}^{n-1}}{2^n}+\frac{C_n^{n-1}}{2^{n+1}}+\frac{C_{n+1}^{n-1}}{2^{n+2}}\right)+\ldots+$$

$$+\left(\frac{C_{n-1}^{n-1}}{2^n}+\frac{C_n^{n-1}}{2^{n+1}}+\frac{C_{n+1}^{n-1}}{2^{n+2}}+\ldots+\frac{C_{2n-3}^{n-1}}{2^{2n-2}}\right)+\left(\frac{C_{n-1}^{n-1}}{2^n}+\frac{C_n^{n-1}}{2^{n+1}}+\frac{C_{n+1}^{n-1}}{2^{n+2}}+\ldots+\frac{C_{2n-3}^{n-1}}{2^{2n-2}}+\frac{C_{2n-2}^{n-1}}{2^{2n-1}}\right)=$$

$$=\frac{n}{2^n}C_{n-1}^{n-1}+\frac{n-1}{2^{n+1}}C_n^{n-1}+\ldots+\frac{3}{2^{2n-3}}C_{2n-4}^{n-1}+\frac{2}{2^{2n-2}}C_{2n-3}^{n-1}+\frac{1}{2^{2n-1}}C_{2n-2}^{n-1}=\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{n-\nu}{2^{n+\nu}}C_{n+\nu-1}^{n-1}=$$

$$=\frac{1}{2^n}\left(n\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{1}{2^\nu}C_{n+\nu-1}^{n-1}-\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{\nu}{2^\nu}C_{n+\nu-1}^{n-1}\right). \qquad (16)$$

У квадратній матриці [A] розміром n×n виділимо верхню праву (охоплену штриховим контуром) та нижню ліву (охоплену суцільним контуром) трикутні матриці, «гіпотенузи» кожної з яких утворюють одні і ті ж діагональні елементи первісної матриці [A]. Беручи до уваги співвідношення (14), легко пересвідчитись у тому, що сума елементів будь-якого стовпця верхньої правої трикутної матриці становить $\frac{1}{2}$. Отже, сумою усіх елементів цієї трикутної матриці є число $\frac{n}{2}$. Сумуючи тепер рядками елементи нижньої лівої трикутної матриці, дійдемо також до числа $\frac{n}{2}$ (знову ж таки, беручи до уваги (14)).

Таким чином, суму елементів матриці [A] можна подати як

$$A=\frac{n}{2}+\frac{n}{2}-\left(\frac{C_0^0}{2}+\frac{C_2^1}{2^3}+\frac{C_4^2}{2^5}+...+\frac{C_{2n-4}^{n-2}}{2^{2n-3}}+\frac{C_{2n-2}^{n-1}}{2^{2n-1}}\right)=n-\frac{2n-1}{2^{2n-1}}C_{2n-2}^{n-1}. \qquad (17)$$

Тут враховано, що [2]

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^{2k}}C_{2k}^{k}=\frac{2n+1}{2^{2n}}C_{2n}^{n}.$$

Для спрощення виразу (16) звернемося до співвідношення

$$C_a^b=\frac{b+1}{a-b}C_a^{b+1},$$

з якого, зокрема, випливає, що

$$\nu C_{n+\nu-1}^{n-1}=nC_{n+\nu-1}^{n}.$$

Отже (враховуючи також й (14)), знайдемо:

$$B=\frac{n}{2^n}\left(\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{C_{n+\nu-1}^{n-1}}{2^\nu}-\frac{1}{2}\sum_{\nu=0}^{n}\frac{C_{n+\nu}^{n}}{2^\nu}+\frac{C_{2n-1}^{n-1}}{2^n}+\frac{C_{2n}^{n}}{2^{n+1}}\right)=n\frac{C_{2n}^{n}}{2^{2n}}. \qquad (18)$$

Таким чином, зважаючи на (17) та (18), вираз (15) можна подати у такому вигляді:

$$t_x=\left(1-\frac{2n-1}{n2^{2n-1}}C_{2n-2}^{n-1}\right)t_y^0+\frac{C_{2n}^{n}}{2^{2n}}t_x^0=\left(1-\frac{C_{2n-1}^{n-1}}{2^{2n-1}}\right)t_y^0+\frac{C_{2n}^{n}}{2^{2n}}t_x^0.$$

Зауважимо, що

$$C_{2n-1}^{n-1}=\frac{C_{2n}^{n}}{2}.$$

А, отже,

$$t_x=\left(1-\frac{C_{2n}^{n}}{2^{2n}}\right)t_y^0+\frac{C_{2n}^{n}}{2^{2n}}t_x^0, \qquad (19)$$

$$\frac{A+B}{n}=1. \qquad (20)$$

Якщо ж тепер усі *n* часток тіла T_y, кожна з яких обмінялась теплотою послідовно із усіма n частками тіла T_x, зосередити у деякому просторі Π_x, в якому відсутні інші термодинамічні тіла, то у ньому буде температура

$$t_y=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}t_{yi}^{n}.$$

Враховуючи (16) та (20), можна довести, що

$$t_y=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}t_{xn}^{i}=\frac{1}{n}\left(Bt_y^0+At_x^0\right)=\frac{1}{n}\left[(1-A)t_y^0+At_x^0\right]=\frac{C_{2n}^{n}}{2^{2n}}t_y^0+\left(1-\frac{C_{2n}^{n}}{2^{2n}}\right)t_x^0. \qquad (21)$$

Сумарний вміст теплоти у тілах T_x і T_y в результаті проведеного процесу теплообміну не повинен змінитись. І дійсно, з (15), (21) та (20) випливає:

$$t_x + t_y = \frac{1}{n}\left(At_y^0 + Bt_x^0\right) + \frac{1}{n}\left(Bt_y^0 + At_x^0\right) = \frac{A+B}{n}\left(t_y^0 + t_x^0\right) = t_y^0 + t_x^0$$

(нагадаємо, що маси і теплоємності тіл T_x, T_y однакові і незмінні).

Позначимо

$$P_k = \frac{1}{2^{2k}}\frac{(2k)!}{k!\,k!}.$$

Легко довести, що

$$P_{k+1} = P_k a_k = P_k \frac{2k+1}{2k+2}.$$

Використовуючи останнє співвідношення, величину P_n (P_k при k=n), що є коефіцієнтом при t_x^0 у виразі (19), можна подати як добуток

$$P_n = \frac{C_{2n}^n}{2^{2n}} = \prod_{k=0}^{n-1} a_k = \prod_{k=0}^{n-1}\frac{2k+1}{2k+2}.$$

Зауважимо, що більшому k в останньому виразі відповідає й більше a_k (найменшим є множник $a_0 = \frac{1}{2}$). Але яким би не було k, множник a_k залишається меншим від одиниці. Тому величина P_n є найбільшою (що дорівнює 1/2) при n=1, а при зростанні n монотонно спадає, наближаючись до нуля. Таким чином, можна стверджувати, що

$$\lim_{n\to\infty}\frac{C_{2n}^n}{2^{2n}} = 0,$$

хоча жоден з множників a_k нулю не дорівнює.

Це означає, що при необмеженому зростанні кількості часток, на які діляться тіла T_x і T_y, процес теплообміну наближається до такого, який можна було б назвати повним обміном температурами. Справді, як випливає з (19) та (21), при $n\to\infty$ в просторах Π_x, Π_y встановлюються температури, відповідно, $t_y \to t_x^0$, $t_x \to t_y^0$.

Припустимо, що в теплоізольованому просторі Π_y знаходиться термодинамічне тіло масою $m_{\Pi y}$ з температурою $t_{\Pi y}$. Тоді після зосередження у ньому тіла T_x масою m, що здійснило за описаним вище алгоритмом теплообмін з тілом T_y, встановиться температура

$$t_{\Pi y}^* = \frac{m_{\Pi y} t_{\Pi y} + m t_x}{m_{\Pi y} + m}.$$

Якщо простір Π_x містить термодинамічне тіло масою $m_{\Pi x}$ з температурою $t_{\Pi x}$, то у ньому після зосередження тіла T_y буде така температура

$$t^*_{\Pi x} = \frac{m_{\Pi x} t_{\pi x} + m t_y}{m_{\Pi y} + m}.$$

Наведені приклади свідчать, що укладений алгоритм пересилання мас і тепоти відтворює процес теплообміну як ідеальний за усіма формальними та змістовними ознаками. Не становить особливих труднощів "наділити" частки, що беруть участь у теплообміні, властивістю виконувати одна над одною роботу. Зрозуміло, що ці процеси виконання роботи залишаться чисто внутрішніми, а тому ідеальний теплообмінник ніяк не може перетворитися у теплову машину. Так само можна передбачити ефекти змішування речовин, що беруть участь в теплообміні, а також можливі хімічні та фазові перетворення.

Ідеалізація теплообмінних процесів дає можливість оцінювати потенційні можливості вдосконалення теплових машин; впорядковувати термінологію і визначальні положення теорії термодинамічних циклів; раціонально розмежовувати і об'єктивно наділяти змістом різного роду неідеальності, властиві реальним машинам тощо.

1. Уокер Г. Двигатели Стирлинга / Пер. с англ. М., 1985. 2. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. М., 1981.

УДК 621.869.4

Гащук П.М., Зінько Р.В.
ДУ "Львівська політехніка", кафедра експлуатації
та ремонту автомобільної техніки

МОДЕЛЮВАННЯ ЕЛЕМЕНТІВ РОБОЧОГО ЦИКЛУ АВТОНАВАНТАЖУВАЧА

Створено математичну модель роботи і руху, яка стала основою для розробки пакета прикладних програм LLTruck™. Запропоновано розбити довільний робочий цикл автонавантажувача на операції, а їх – на елементи. Довільний цикл можна алгоритмізувати, задіявши пакет LLTruck™, в якому використано методику кодування елементів операцій циклу.

Розглянуто приклад аналізу експлуатаційної ефективності автонавантажувача в робочих циклах.

Вступ. Для автонавантажувачів є актуальними комплексне вивчення експлуатаційних властивостей і оцінка впливу на них технічних параметрів машини, а також інших чинників. Це дає змогу ще на стадії проектування автонавантажувачів оптимізувати їх