і для кожного $x = x_k$ $(k = 0,1,\ldots,n)$ знайдемо додатний корінь y_k рівняння (7).

Внаслідок цього одержимо множину точок (x_k, y_k) $(k = 0,1,\ldots,n)$, через яку прохо–дить крива $y = y(x)$.

1. Цегелик Г.Г. Параметрическая локализация по модулям нулей полиномов и рядов Лорана // Изв. вузов. Математика. 1967. №12. С. 90-96. 2. Ostrowski A. Recherches sur la Methode de Graeffe et les zeros des polynomes et des series de Laurent. // Acta math., 1940, 72. P. 99-257. 3. Костовский А.Н. Локализация по модулям нулей ряда Лорана и его производных. Львов, 1967. 208 с. 4. Цегелик Г.Г., Коваль Г.М. Метод параметрів розв'язування прямої і оберненої задач локалізації коренів алгебраїчних многочленів // Вісн. Львів.ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. 1999. Вип.1. С.243-249.

УДК 517.926.25

М.І. Плеша
Національний університет ім. Ів. Франка

БАР'ЄРИ В ОБЛАСТЯХ З РЕБРАМИ ДЛЯ КВАЗІЛІНІЙНИХ ЕЛІПТИЧНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Розглядається задача Діріхле для квазілінійних еліптичних недивергентних рівнянь другого порядку в області з ребрами. Побудовано бар'єрні функції для задачі і отримано майже найкращі оцінки для її розв'язків.

We consider the Dirichlet problem for the quasilinear elliptic nondivergence equations of second order in a domain with edges. Barrier functions are constructed for the problem and, by comparsion principle we obtain a priori almost best possible estimates of solutions.

Під час дослідження поведінки розв'язків крайових задач для еліптичних рівнянь в околі нерегулярної граничної точки велике значення мають бар'єрні функції [1–4]. У цій роботі побудовано бар'єр для певного класу квазілінійних еліптичних операторів і одержано в околі ребра майже точку (про що свідчать часткові випадки, для лінійних рівнянь [1]) оцінку розв'язку задачі Діріхле

$$\begin{cases} a_{ij}(x,u,u_x)u_{x_i x_j} + a(x,u,u_x) = 0, & x \in G \qquad (1) \\ u(x) = 0, & x \in \partial G \qquad (2) \end{cases}$$

(за індексами, які повторюються, підсумовуємо від 1 до n), де G – n-вимірна область, що містить ребро. У роботі [1] побудовано бар'єр для *лінійних* рівнянь в околі ребра. Бар'єри для дивергентного квазілінійного рівняння в околі конічної точки наведено в роботі [2] (див. також літературу, наведену там). Знання поведінки розв'язків поблизу ребра є важ-ливим, зокрема, для фізичних застосувань і може бути використане при обгрунтуванні числових алгоритмів розв'язування задач.

Нехай, $x=(x_1,...,x_n)$ – точка простору R^n, $n\ge 3$, (r,ω,z) – циліндричні координати $x: x_1=r\cos(\omega)$, $x_2=r\sin(\omega)$, $z=(x_3,...,x_n)$, причому $0\le r\equiv\sqrt{x_1^2+x_2^2}<\infty$, $0\le\omega<2\pi$. Нехай G – область в R^n, обмежена $(n-1)$-вимірним многовидом ∂G, що має такі властивості:

a) ∂G містить $(n-2)$-вимірний підмноговид R^n без краю ℓ (в довільній точці ℓ ми розташуємо початок координат), окіл кожної точки якого є частина двогранного кута $D=\left\{(r,\omega):0<r<\infty,\ \omega\in\left(-\frac{\omega_0}{2},\frac{\omega_0}{2}\right)\right\}\times R^{n-2},\ 0<\omega_0<\pi$;

b) $\partial G/\ell$ – гладкий підмноговид R^n.

Позначимо $G_0^d=G\cap\left\{(r,,z):z\in R^{n-2},0<r<d,\ \omega\in\left(-\frac{\omega_0}{2},\frac{\omega_0}{2}\right)\right\},\ 0<\omega_0<\pi$.

Значить $G_0^d\subset G$ і ми припускаємо, що в деякому околі ребра область G є *"клин"* з кутом $\omega_0\in(0,\pi)$. Надалі користуватимемось системою позначень в [4].

Означення. *Розв'язком задачі (1)-(2) називається функція* $u\in C^0(\overline{G})\cap C^1(G)\cap\cap W_{loc}^{2,q}(G)$, $q\ge n$, *яка задовольняє рівняння (1) майже всюди в* G *та граничну умову (2).*

Вимагатимемо виконання таких умов:

(A) a_{ij}, $a\in C^1(\Re)$ $(i,j=1,...,n)$;

(B) існують числа $\mu>0$, $\nu>0$ *такі, що виконується нерівність*

$$\nu\xi^2\le a_{ij}(x,v,w)\xi_i\xi_j\le\mu\xi^2\quad\forall\xi\in R^n,\quad\forall(x,v,w)\in\Re$$

(умова рівномірної еліптичності);

(C) існують числа $\beta>-1$, $\mu_1\ge 0$, $k_1\ge 0$ *та функції* $f\ge 0$, $b\ge 0$, *такі що*

$$|a(x,v,w)|\le\mu_1|w|^2+b(x)|w|+f(x),\quad(x,v,w)\in\Re, \tag{3}$$

причому $b,\ f\in L_{q,loc}(G)$, $b(x)+f(x)\le k_1r^\beta$ *для всіх* $x\in G$;

(D) коефіцієнти рівняння (1) задовольняють ще такі умови [5], які разом з умовами (A)-(C) забезпечують апріорну оцінку розв'язку

$$|u|_{1+\gamma_0,G'}\le M_1(G'), \tag{4}$$

для довільної гладкої підобласті G' *такої, що* $\overline{G'}\subset\overline{G}/\ell$, *зі сталими* $\gamma_0\in(0,1)$ *і* $M_1(G')>0$, *які залежать від* $\nu,\mu,\mu_1,k_1,M_0\overset{def}{=}|u|_{0,G},\beta,n,q,\|b\|_{2;G'},\|f\|_{2;G'}$ *і відстані від* G' *до* ℓ.

(E) $a_{ij}(x_0,0,0)=\delta_i^j$ $(i,j=1,...,n)$ $\forall x_0\in\ell$, *де* δ_i^j *- символ Кронекера;*

(F) у кожній точці $(x,w)\in G\times R^n$ *функція* $a(x,v\,w)$ *є неспадною функцією аргументу* v.

Доведемо твердження.

Теорема. *Нехай* u *– розв'язок задачі (1), (2) і виконуються умови (A) - (F), причому в умові (C)* $\beta>\lambda-2$, *де* $\lambda=\pi/\omega_0$. *Тоді для довільного* $\varepsilon>0$ *справедлива оцінка*

$$|u(x)| \le Cr^{\lambda-\varepsilon}, \qquad x \in G_0^d, \tag{5}$$

де C, d *– додатні числа, які визначаються* $\varepsilon, n, \omega_0, \nu, \mu, \mu_1, \beta, q, k_1, M_0$ *і областю* G.

Доведення. Розглянемо область G_0^d – таку, в якій виконується теорема 1 [4]. Використаємо як бар'єрну таку функцію: $w(x) = Ar^{\lambda-\varepsilon-2}\cos\left(\left(\lambda - \frac{\varepsilon}{2}\right)\omega\right)$, де $\omega \in \left(-\frac{\omega_0}{2}, \frac{\omega_0}{2}\right)$, $A > 0$, а $\varepsilon \in (0, \lambda - 1)$ – якщо ми доведемо (5) для таких ε, то для всіх більших ε оцінка (5) виконується також, за умови, що d – достатньо мале, наприклад $d < 1$. Знайдемо значення оператора Лапласа на функції w

$$\Delta w = -Ar^{\lambda-\varepsilon-2}\varepsilon\left(\lambda - \frac{3\varepsilon}{4}\right)\cos\left(\left(\lambda - \frac{\varepsilon}{2}\right)\omega\right). \tag{6}$$

Крім того, очевидно, що $|w_x| \le C_1 r^{\lambda-\varepsilon-1}$, $|w_{xx}| \le C_2 r^{\lambda-\varepsilon-2}$, C_1 і C_2 – додатні константи, що залежать від A, ε і λ. Подіємо на w оператором рівняння (1)

$$Qw = \Delta w + \left(a_{ij}(x, ww_x) - \delta_i^j\right)w_{x_i x_j} + a(x, w, w_x). \tag{7}$$

Оскільки функції $a_{ij}(x, w, w_x)$ неперервні, а $w \in C^1\left(\overline{G_0^d}\right)$, то завдяки (E) ми можемо записати, що $\left|a_{ij}(x, w, w_x) - \delta_i^j\right| \le \delta(\rho)$, $\forall r < \rho$ причому $\delta(\rho) \to 0$ при $\rho \to 0$. Значить з (6), (7) з урахуванням (3) ми можемо записати

$$\begin{aligned} Qw &\le -Ar^{\lambda-\varepsilon-2}\varepsilon\left(\lambda - \frac{3\varepsilon}{4}\right)\cos\left(\left(\lambda - \frac{\varepsilon}{2}\right)\omega\right) + \\ &+ C_2\delta(r)r^{\lambda-\varepsilon-2} + \mu_1 C_1^2 r^{2\lambda-2\varepsilon} + k_1 C_1\left(r^{\lambda-\varepsilon+\beta} + r^{\beta}\right) = \\ &= -Ar^{\lambda-\varepsilon-2}\left(\varepsilon\left(\lambda - \frac{3\varepsilon}{4}\right)\cos\left(\left(\lambda - \frac{\varepsilon}{2}\right)\omega\right) - \delta_1(r)\right), \qquad x \in G_0^d, \end{aligned}$$

де $\delta_1(r) \to 0$. Тепер, оскільки $\omega \in \left(-\frac{\omega_0}{2}, \frac{\omega_0}{2}\right)$, а $\omega_0 \in (0, \pi)$, то маємо

$$\cos\left(\left(\lambda - \frac{\varepsilon}{2}\right)\omega\right) \ge \cos\left(\left(\lambda - \frac{\varepsilon}{2}\right)\frac{\omega_0}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon\omega_0}{4}\right) = \sin\left(\frac{\varepsilon\omega_0}{4}\right).$$

Тому $Qw \le -Ar^{\lambda-\varepsilon-2}\left(\varepsilon\left(\lambda - \frac{3\varepsilon}{4}\right)\sin\left(\frac{\varepsilon\omega_0}{4}\right) - \delta_1(r)\right)$, $r < d$. Нехай, тепер $d > 0$ настільки мале, що виконується

$$\delta_1(d) < \varepsilon\left(\lambda - \frac{3\varepsilon}{4}\right)\sin\left(\frac{\varepsilon\omega_0}{4}\right). \tag{8}$$

Отже, ми одержуємо нерівність $Qw \le 0$, $\forall x \in G_0^d$. На бічних гранях двогранного кута: $u = 0 \le Ar^{\lambda-\varepsilon}\cos\left(\left(\lambda - \frac{\varepsilon}{2}\right)\frac{\omega_0}{2}\right) = w$, для $\omega = \pm\omega_0/2$, тобто, $u \le w$ на бічних гранях. Залишилося дослідити криволінійну границю $\Omega_d \equiv \{x: r = d\}$ області G_0^d. З теореми 1 [4] можемо записати, що $u \le C_0 d^{\gamma+1}$, для $x \in \Omega_d$, з деяким $\gamma \in (0,1)$. У той же час

$w = Ad^{\lambda-\varepsilon} cos\left(\left(\lambda - \frac{\varepsilon}{2}\right)\frac{\omega}{2}\right) \ge Ad^{\lambda-\varepsilon} sin\left(\frac{\varepsilon\omega_0}{4}\right)$, $\forall x \in \Omega_d$. Тоді, якщо ми вимагатимемо від $A > 0$ виконання умови

$$A \ge \frac{C_0 d^{\gamma+1=\lambda+\varepsilon}}{\sin\left(\frac{\varepsilon\omega_0}{4}\right)}, \tag{9}$$

то одержимо $u \le C_0 d^{\gamma+1} \le Ad^{\lambda-\varepsilon} \sin\left(\frac{\varepsilon\omega_0}{4}\right) \le w$, $\forall x \in \Omega_d$. Отже, доведено, що якщо d і A задовольняють умови (8), (9), то $Qu = 0 \ge Qw$, для $x \in G_0^d$ і $u \le w$, $x \in \partial G_0^d$. Звідси за принципом порівняння (теорема 10.1 [3]) одержимо нерівність $u(x) \le w(x)$, $\forall x \in \overline{G_0^d}$. Аналогічно доводиться, що $u(x) \ge -w(x)$, $\forall x \in \overline{G_0^d}$, звідки випливає (5). Теорему доведено.

1. Azzam A. Smoothness properties of solutions of mixed boundary value problems for elliptic equations in sectionally smooth n-dimensional domains. // Annales polonici mathematici. 1981. Vol. XL P. 81-93. 2. Borsuk M., Portnyagin D. Barriers on cones for degenerate quasilinear elliptic operators. // Electron. J. Differential Equations. 1998. №11. P. 1-8. 3. Гилбарг Д., Трудингер Н. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М., 1989. 4. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Обзор результатов по разрешимости краевых задач для равномерно эллиптических и параболических уравнений второго порядка, имеющих неограниченные особенности // Успехи математических наук. 1986. Т. 41, №5, с. 59-83. 5. Плеша М.І. Поведінка розв'язків задачі Діріхле для квазілінійних еліптичних рівнянь другого порядку в околі ребра. // Вісник Львівського Університету. Серія механіко-математична. 1999. Вип.53, с. 67-76.

УДК 539.4

Р.І.Квіт
Національний університет "Львівська політехніка", кафедра вищої математики

СТАТИСТИЧНИЙ ПІДХІД ДО ОЦІНКИ НАДІЙНОСТІ КОНСТРУКЦІЙНИХ МАТЕРІАЛІВ

Розглядається ортотропний композитний матеріал в умовах складного напруженого стану. Структурі матеріалу властиві різні дефекти.

The reliability of ortotropic composite material under compound stress state conditions was considered. The material structure has the property of different scale defects presence.

Розглянуто конструкційний елемент у вигляді пластини з композитного матеріалу. Складовими композиту є матриця (зв’язуюче) та елементи, що армують. Матеріал є орто-