УДК 539.373

Я.Ф. Андрусик, В.П. Ляшенко
Національний університет "Львівська політехніка",
кафедра теоретичної механіки

АНАЛІТИЧНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ РІВНЯ ПЛАСТИЧНИХ ДЕФОРМАЦІЙ ЗСУВУ ПРИ ДВОЛАНКОВІЙ ТРАЄКТОРІЇ НАВАНТАЖЕННЯ

Проведено дослідження із визначення інтегрального критерію рівня пластичних деформацій зсуву при дволанковій траєкторії навантаження. Для досліджуваної схеми навантаження у замкнутому вигляді отримані співвідношення, які дають змогу визначити рівень нагромадження пластичних деформацій зсуву при довільному положенні вектора напружень на дволанковій ломаній його траєкторії з прямолінійними ланками.

The research has been carried out to define integral criterion of a shear plastic deformation at double-link trajectory of loading. For the loading scheme under research the expressions in closed species have been obtained, which allow determining the accumulation level of a shear plastic deformation in arbitrary position of a stress vector on a double-link broken line of its trajectory with rectilinear links.

Для удосконалення технологічних процесів оброблення тиском, порошкової металургії, дифузійного термогазонасичення, зміцнення або холодного зварювання металів, з метою покращання їх фізико-механічних і експлуатаційних властивостей, виникає необхідність у визначенні рівня пластичних деформацій зсуву. Щоб характеризувати сумарне поле пластичних деформацій при різних траєкторіях навантаження, використовується інтегральний критерій нагромадження пластичних деформацій зсуву J_γ^p [1, 2], на основі синтезного варіанта теорії пластичності [3]:

$$J_\gamma^p = \iiint\limits_{\alpha\,\beta\,\lambda} F(H_N)\sin\beta \, d\alpha \, d\beta \, d\lambda \ , \tag{1}$$

де $F(H_N)$ – характеристична функція матеріалу ; α, β, λ – кути, які задають орієнтацію нормалі $\vec{N}$ до площини простору напружень R^5.

Рекомендовано [3], $F(H_N)$ при $H_N \ge \sigma_s$ прийняти у вигляді:

$$F(H_N) = a\left[\left(\frac{H_N}{\sigma_s}\right)^2 - 1\right], \tag{2}$$

де a – стала матеріалу ; σ_s – межа плинності при одновісному розтязі ; H_N – відстань від початку координат до площини з нормаллю $\vec{N}$ простору компонент вектора напружень R^5.

Проведемо дослідження із визначення інтегрального критерію рівня пластичних деформацій зсуву J_γ^p при дволанковій траєкторії навантаження в тривимірному підпросторі R^3 п'ятивимірного простору R^5 компонент вектора напружень. На першому етапі процесу відбувається розтяг за межу пружності до напруження $\sigma_z = \sigma_z^* > \sigma_s$, а на другому етапі при зміні σ_z, зразок деформують зсувом, коли ($|\tau_{xz}| > 0$). Довантаження будемо здійснювати так, що на другій ланці деформування траєкторія вектора напружень буде прямолінійною. Деформування і орієнтацію дволанкової ломаної траєкторії навантаження будемо подавати у тривимірному просторі компонент вектора напружень S_1, S_2, S_3 за схемою, аналогічній, як і в [3].

Межі інтегрування у співвідношенні (1) визначаються, враховуючи форму поверхні навантаження, отриманої на основі принципу трансформації, сформульованому в [4, 5]. Її форма для дволанкової траєкторії деформування набирає вигляду, який наведений в [3].

Під час навантаження вздовж досліджуваної траєкторії частина площин, які були огинаючими поверхні плинності, перемістились від дії вектора $\vec{\sigma}_z^*$, а частина продовжує рухатися від дії вектора $\vec{\sigma}$.

Всі зроблені пояснення дають змогу перейти до визначення складових інтегрального критерію рівня пластичних деформацій зсуву при дволанковій траєкторії навантаження. В області дії $\vec{\sigma}$ після інтегрування (1) по λ, маємо

$$J_\gamma^p(I)=\frac{a}{2\cos^2\beta_1^\sigma}\iint_{\Omega_I}\cos^2\beta\,\sin\beta\left(\sin\lambda_1\cos\lambda_1+\lambda_1\right)d\alpha\,d\beta-a\iint_{\Omega_1}\sin\beta\,d\alpha\,d\beta, \tag{3}$$

де для λ_1 і β_1^σ справедливі рівності :

$$\cos\lambda_1=\frac{\cos\beta_1^\sigma}{\cos\beta}\quad,\quad \cos\beta_1^\sigma=\frac{\sigma_s}{\sigma}\ , \tag{4}$$

тут Ω_I – тілесний кут конуса, всередині якого знаходяться нормалі до рухомих площин від дії $\vec{\sigma}$.

Після підстановки (4) в (3) для $J_\gamma^p(I)$ запишемо:

$$\begin{aligned}J_\gamma^p(I)&=\frac{a}{2\cos\beta_1^\sigma}\iint_{\Omega_I}\sin\beta\sqrt{\cos^2\beta-\cos^2\beta_1^\sigma}\,d\alpha\,d\beta\ +\\&+\frac{a}{2\cos^2\beta_1^\sigma}\iint_{\Omega_I}\cos^2\beta\sin\beta\arccos\left(\frac{\cos\beta_1^\sigma}{\cos\beta}\right)d\alpha\,d\beta\ -\\&-\ a\iint_{\Omega_I}\sin\beta\arccos\left(\frac{\cos\beta_1^\sigma}{\cos\beta}\right)d\alpha\,d\beta.\end{aligned} \tag{5}$$

При інтегруванні рівняння (5), Ω_I зручно зобразити у такому вигляді :

$$\Omega_I=\Omega_I'-\Omega_I''\ , \tag{6}$$

де Ω_I' – тілесний кут, обмежений конусом, твірні якого відхилені від центральної осі на кут β_1^σ. Всередині його знаходяться нормалі до рухомих площин тривимірного підпростору R^3, які можуть переміщатися від дії вектора $\vec{\sigma}$; Ω_I'' – частина тілесного кута Ω_I', де змінні α і β задовольняють нерівності

$$\frac{\sin|\chi+\gamma|}{\sqrt{1-\sin^2\alpha\cos^2(\chi+\gamma)}}\ \le\ \sin\beta\ \le\ \sin\beta_1^\sigma\ . \tag{7}$$

Тут γ і χ – кути, які характеризують орієнтацію дволанкової ломаної [3].

Аналогічно до (6) запишуться компоненти для $J_\gamma^P(I)$

$$J_\gamma^P(I)=J_\gamma^{P'}(I)-J_\gamma^{P''}(I)\ , \tag{8}$$

де $J_\gamma^{P'}(I)$, $J_\gamma^{P''}(I)$ – компоненти складової $J_\gamma^P(I)$ інтегрального критерію (3) при інтегруванні по тілесних кутах, відповідно Ω_I', Ω_I''.

Знайдемо інтеграл по області Ω_I'' в першому доданку співвідношення (5), який після інтегрування по β набирає вигляду:

$$\iint_{\Omega_I''} \sin\beta \sqrt{\cos^2\beta - \cos^2\beta_1^\sigma}\, d\alpha\, d\beta = \int_0^{\alpha_1} \cos\alpha \frac{\sqrt{\cos^2\alpha \sin^2\beta_1^\sigma - tg^2(\gamma+\chi)\cos^2\beta_1^\sigma}}{tg^2(\gamma+\chi) + \cos^2\alpha} d\alpha -$$

$$- \cos^2\beta_1^\sigma \int_0^{\alpha_1} \ln \frac{\cos\alpha + \sqrt{\cos^2\alpha \sin^2\beta_1^\sigma - tg^2(\gamma+\chi)\cos^2\beta_1^\sigma}}{\cos\beta_1^\sigma \sqrt{tg^2(\gamma+\chi) + \cos^2\alpha}} d\alpha . \tag{9}$$

Тут α_1 визначається з рівності

$$\cos\alpha_1 = tg(\gamma+\chi)\, ctg\, \beta_1^\sigma . \tag{10}$$

Після інтегрування по α і перетворень отримаємо:

$$\iint_{\Omega_I''} \sin\beta \sqrt{\cos^2\beta - \cos^2\beta_1^\sigma}\, d\alpha\, d\beta = \frac{\pi}{2}\left[\sin\beta_1^\sigma - \sin(\gamma+\chi)\right] -$$

$$- \frac{\pi \cos^2\beta_1^\sigma}{2} \ln \frac{(1+\sin\beta_1^\sigma)\cos(\gamma+\chi)}{\cos\beta_1^\sigma\,(1+\sin|\gamma+\chi|)} . \tag{11}$$

Аналогічно після інтегрування по β в другому доданку (5), маємо :

$$\iint_{\Omega_I''} \sin\beta \cos^2\beta \arccos\left(\frac{\cos\beta_1^\sigma}{\cos\beta}\right) d\alpha d\beta = \frac{1}{3} \int_{-\alpha_1}^{\alpha_1} \frac{\cos^3\alpha \arccos\left(\frac{\cos\beta_1^\sigma}{\cos\alpha} \sqrt{\cos^2\alpha + tg^2(\gamma+\chi)}\right)}{\left[\cos^2\alpha + tg^2(\gamma+\chi)\right]^{3/2}} d\alpha -$$

$$- \frac{\cos^3\beta_1^\sigma}{6} \int_{-\alpha_1}^{\alpha_1} \ln \frac{\cos\alpha + \sqrt{\sin^2\beta_1^\sigma \cos^2\alpha - \cos^2\beta_1^\sigma tg^2(\gamma+\chi)}}{\cos\beta_1^\sigma \sqrt{tg^2(\gamma+\chi) + \cos^2\alpha}} d\alpha -$$

$$- \frac{\cos\beta_1^\sigma}{6} \int_{-\alpha_1}^{\alpha_1} \frac{\cos\alpha \sqrt{\cos^2\alpha \sin^2\beta_1^\sigma - \cos^2\beta_1^\sigma tg^2(\gamma+\chi)}}{tg^2(\gamma+\chi) + \cos^2\alpha} d\alpha . \tag{12}$$

Інтегруючи (12) по α, після перетворень запишемо:

$$\iint_{\Omega_I''} \sin\beta \cos^2\beta \arccos\left(\frac{\cos\beta_1^\sigma}{\cos\beta}\right) d\alpha\, d\beta = \frac{\pi}{3}\left\{\sin|\gamma+\chi| \left[\cos\beta_1^\sigma - \cos(\gamma+\chi)\right] + \beta_1^\sigma - \gamma - \chi\right\} -$$

$$- \frac{\pi}{6}\cos\beta_1^\sigma \left(\sin\beta_1^\sigma - \sin|\gamma+\chi|\right) - \frac{\pi}{6}\cos^3\beta_1^\sigma \ln \frac{(1+\sin\beta_1^\sigma)\cos(\gamma+\chi)}{\cos\beta_1^\sigma\,(1+\sin|\gamma+\chi|)} . \tag{13}$$

Переходимо до визначення інтегралу в третьому доданку (5). Виконуючи інтегрування по β, дістанемо:

$$\iint_{\Omega_I''} \sin\beta \arccos\left(\frac{\cos\beta_1^\sigma}{\cos\beta}\right) d\alpha\, d\beta = \int_{-\alpha_1}^{\alpha_1} \frac{\cos\alpha \arccos\left(\frac{\cos\beta_1^\sigma}{\cos\alpha} \sqrt{\cos^2\alpha + tg^2(\gamma+\chi)}\right)}{\sqrt{\cos^2\alpha + tg^2(\gamma+\chi)}} d\alpha -$$

$$- \cos\beta_1^\sigma \int_{-\alpha_1}^{\alpha_1} \ln \frac{\cos\alpha + \sqrt{\sin^2\beta_1^\sigma \cos^2\alpha - \cos^2\beta_1^\sigma tg^2(\gamma+\chi)}}{\cos\beta_1^\sigma \sqrt{tg^2(\gamma+\chi) + \cos^2\alpha}} d\alpha . \tag{14}$$

Після інтегрування (14) по α і перетворень отримаємо:

$$\iint_{\Omega_I''} \sin\beta \arccos\left(\frac{\cos\beta_1^\sigma}{\cos\beta}\right) d\alpha\, d\beta = \pi(\gamma + \chi - \beta) - \pi \cos\beta_1^\sigma \ln\frac{\left(1+\sin\beta_1^\sigma\right)\cos(\gamma+\chi)}{\cos\beta_1^\sigma\left(1+\sin|\gamma+\chi|\right)}. \quad (15)$$

Остаточно враховуючи (11), (13), (15), вираз для визначення компоненти $J_\gamma^{P''}(I)$ складової (5) набирає вигляду:

$$J_\gamma^{P''}(I) = \frac{a\pi}{12\cos^2\beta_1^\sigma}\left[\sin 2\beta_1^\sigma - \sin 2|\gamma+\chi| + 8\cos^3\beta_1^\sigma \ln\frac{\left(1+\sin\beta_1^\sigma\right)\cos(\gamma+\chi)}{\cos\beta_1^\sigma\left(1+\sin|\gamma+\chi|\right)} + \right.$$
$$\left. + 2\left(\beta_1^\sigma - \gamma - \chi\right)\left(1 + 6\cos^2\beta_1^\sigma\right)\right]. \quad (16)$$

У разі знаходження складової $J_\gamma^{P'}(I)$ при пропорційному навантаженні від дії вектора $\vec{\sigma}$ в області Ω_I використаємо результат підрахунку, отриманий в роботі [2], тому можемо записати:

$$J_\gamma^{P'}(I) = \frac{\pi a}{3}\left(tg\beta_1^\sigma + 4\cos\beta_1^\sigma \ln\frac{1+\sin\beta_1^\sigma}{\cos\beta_1^\sigma} + \frac{1 - 6\cos^2\beta_1^\sigma}{\cos^2\beta_1^\sigma}\,\beta_1^\sigma\right). \quad (17)$$

Для визначення складової інтегрального критерію рівня пластичних деформацій $J_\gamma^P(II)$ в області тілесного кута Ω_{II} конуса, всередині якого нормалі до площин перемістились від дії вектора $\vec{\sigma}_z^*$, будемо проводити викладки, аналогічні попереднім.

Тому для $J_\gamma^P(II)$ запишемо:

$$J_\gamma^P(II) = J_\gamma^{P'}(II) - J_\gamma^{P''}(II), \quad (18)$$

де $J_\gamma^{P'}(II)$, $J_\gamma^{P''}(II)$ – компоненти складової $J_\gamma^P(II)$, отримані від інтегрування по тілесних кутах, відповідно Ω_{II}', Ω_{II}''. Тут Ω_{II}' – тілесний кут, обмежений круговим конусом, твірні якого відхилені від центральної осі на кут $\beta_1^{\sigma^*}$, причому $\cos\beta_1^{\sigma^*} = \dfrac{\sigma_s}{\sigma_z^*}$. Всередині цього конуса знаходяться нормалі до рухомих площин, які можуть переміститися від дії вектора $\vec{\sigma}_z^*$, Ω_{II}'' – частина тілесного кута Ω_{II}', де змінні α і β задовольняють нерівності

$$\frac{\sin|\chi|}{\sqrt{1 - \sin^2\alpha\,\cos^2\chi}} \le \sin\beta \le \sin\beta_1^{\sigma^*}. \quad (19)$$

Підсумовуючи сказане, наведемо результати обчислень за визначенням $J_\gamma^{P'}(II)$ і $J_\gamma^{P''}(II)$:

$$J_\gamma^{P'}(II) = \frac{\pi a}{3}\left(tg\beta_1^{\sigma^*} + 4\cos\beta_1^{\sigma^*} \ln\frac{1+\sin\beta_1^{\sigma^*}}{\cos\beta_1^{\sigma^*}} + \frac{1 - 6\cos^2\beta_1^{\sigma^*}}{\cos^2\beta_1^{\sigma^*}}\,\beta_1^{\sigma^*}\right),$$

$$J_\gamma^{P''}(II) = \frac{\pi a}{12\cos^2\beta_1^{\sigma^*}}\left[\sin 2\beta_1^{\sigma^*} - \sin 2|\chi| + 8\cos^3\beta_1^{\sigma^*} \ln\frac{\left(1+\sin\beta_1^{\sigma^*}\right)\cos\chi}{\cos\beta_1^{\sigma^*}\left(1+\sin|\chi|\right)} + \right.$$
$$\left. + 2\left(\beta_1^{\sigma^*} - \chi\right)\left(1 + 6\cos^2\beta_1^{\sigma^*}\right)\right]. \quad (20)$$

Враховуючи всі можливі варіанти взаємного розміщення областей тілесних кутів Ω_I і Ω_{II} використовуючи ступеневі функції, запишемо вираз для визначення інтегрального критерію рівня пластичних деформацій при дволанковій траєкторії навантаження :

$$J_\gamma^P = U\left(\chi + \beta_1^{\sigma^*}\right) U(\chi+\gamma)\, J_\gamma^{P'}(I) + W(\chi)\, J_\gamma^{P'}(II) +$$
$$+ U\left(\beta_1^{\sigma^*} - |\chi|\right)\left[sign\,\chi\; J_\gamma^{P''}(II) - sign(\chi+\gamma)\, J_\gamma^{P''} \right] . \qquad (21)$$

Наведені в (21) ступеневі функції визначаються так:

$$sign\,B = \begin{cases} -1, \mathrm{B} < 0, \\ 1, \mathrm{B} \geq 0, \end{cases} \quad U(C) = \begin{cases} 1, \mathrm{C} > 0, \\ 0, \mathrm{C} \leq 0, \end{cases} \quad W(\chi) = \begin{cases} 1, \ \chi < 0 \\ 0, \ \chi \geq 0. \end{cases} \qquad (22)$$

Співвідношення (21) дає змогу визначити критерій J_γ^P при довільному положенні вектора напружень на дволанковій траєкторії навантаження з прямолінійними ланками. Отриманий результат може бути використаний для оптимізації відповідних технологічних процесів у машинобудуванні і металургії.

1. Андрусик Я.Ф. Про критерій нагромадження пластичних деформацій // П’ятий міжнар. симпозіум українських інженерів-механіків у Львові: Тез. доп. – Львів: КІНПАТРІ ЛТД, 2001. – С. 132. 2. Андрусик Я.Ф., Ляшенко В.П. Оцінка рівня нагромадження пластичних деформацій зсуву в технологічних процесах зміцнення матеріалів // Вісник Нац. ун-ту “Львівська політехніка”. – 2003. – № 483. – С. 3–5. 3. Андрусик Я.Ф., Русинко К.М. Пластическое деформирование упрочняющихся материалов при нагружении в трехмерном подпространстве пятимерного пространства девиаторов // Изв. АН МТТ. – 1993. – № 2. – С. 92–101. 4. Андрусик Я.Ф., Русинко К.Н. Деформация поверхности нагружения // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1979. – № 3. – С. 98–103. 5. Андрусик Я.Ф. Форма поверхности нагружения в трехмерном пространстве напряжений при двухзвенной траектории нагружения // Вестн. Львов. политехн. ин-та. – 1983. – № 170. – С. 5–7.