3. У деяких технологічних та випробувальних машинах корисно використовувати стохастичні автоколивання як робочі процеси.

4. Отримані у роботі результати мона надалі використовувати для вдосконалення й уточнення існуючих інженерних методів розрахунку коливань машин.

1. Бабицкий В.И., Ланда П.С., Перминов С.М. Колебания в машинах с учётом инерционности регулятора скорости вращения двигателя // Машиноведение. – 1985. – № 2. – С. 31–35. 2. Красовский А.А. О вибрационном способе линеаризации некоторых нелинейных систем // Автоматика и телемеханика. – 1948. – № 1. – С. 20–29. 3. Бабицкий В.И., Ланда П.С. Автоколебания в системах с инерционным возбуждением // Доклады АН СССР. – 1982. – Т. 266, № 5. – С. 1087–1089. 4. Бабицкий В.И., Ланда П.С. Автоколебательные системы с инерционным возбуждением. – В кн.: Динамика систем. – Горький, 1983. – С. 147–181. 5. Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Метод точечных отображений и его применение к исследованию динамических систем // Успехи механики. – 1980. – Т. 3. – Вып. 4. – С. 25–53. 6. Вейц В.Л. Динамика машинных агрегатов. – Ленинград, Машиностроение, 1969. – С. 5–50.

УДК 534.1+ 62-5

М.Б. СОКІЛ, О.І. ХИТРЯК

Національний університет “Львівська політехніка”

ВИЗНАЧЕННЯ НА ОСНОВІ РУХУ ОПТИМАЛЬНИХ НЕЛІНІЙНИХ ХАРАКТЕРИСТИК СИСТЕМ, ЯКІ ОПИСУЮТЬСЯ РІВНЯННЯМ КЛЕЙНА–ГОРДОНА

Викладено один підхід до розв’язування обернених задач динаміки нелінійних систем, математичними моделями руху яких є крайові задачі для рівняння Клейна–Гордона. В його основу покладено: асимптотичні методи нелінійної механіки; принцип одночастотності коливань у нелінійних системах; ідея представлення заданого дискретного закону зміни амплітуди та частоти коливань динамічного процесу систем за допомогою звичайних диференціальних рівнянь.

It is described one approach to solving inverse problems of dynamics of nonlinear systems. Theirs mathematical model of the motion is the boundary problem for the Klein-Gordon equation. It is based on asymptotic methods of nonlinear mechanics, on the principle of a single frequency of oscillations in nonlinear systems, on the idea of representation a given discrete law of changes the amplitude and frequency of oscillations in the dynamic process using ordinary differential equations.

Актуальність та огляд основних результатів досліджень. Аналітичні методи дослідження прикладних задач динаміки елементів конструкцій, які потребують аналізу впливу тих чи інших сил (неперервних, дискретних, випадкових) на їх коливання, розглядались багатьма авторами, зокрема [1–9]. Що стосується обернених задач динаміки [10], тобто визначення силових чинників на основі того чи іншого закону зміни основних характеристик руху систем, то вони не набули такого широкого розвитку і розглядались в основному для найпростіших моделей (коливань систем з одним ступенем вільності [11–15]). При цьому властивості руху можна задавати різними способами, наприклад, кількісними і якісними обмеженнями координат, швидкостей тощо. До обернених задач у своїй математичній постановці близькі задачі програмного руху [16] і основні проблеми їх розв'язання полягають у існуванні та єдиності ров'язку. У цій роботі на основі асимптотичних методів Крилова-Боголюбова–Митропольського (КБМ) [5, 7] будується оптимальна аналітична апроксимація силових чинників системи, математичними моделями руху яких є крайові задачі для нелінійної моделі рівняння Клейна–Гордона, тобто для однозначного визначення сил системи на останні накладаються деякі додаткові умови.

Постановка задачі. Відомо [17], що математичною моделлю поперечних коливань одновимірних тіл малої згинної жорсткості та сипких середовищ [18] з урахуванням найпростішого закону їх взаємодії із навколишнім середовищем є диференціальне рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + bu = ef(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}), \tag{1}$$

в якому $u(x,t)$ – переміщення досліджуваного об'єкта з координатою x в довільний момент часу t; a – стала, яка визначається через його відомі фізико-механічні характеристики, e – малий параметр. Задача полягає у визначенні зовнішніх та внутрішніх силових чинників тіла (параметра b та функції $f(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}))$ за законом коливань. Останній вважається заданим послідовностями значень амплітуди і періоду коливань, тобто $a_1, a_2, \mathbf{K}, a_N$; $T_1, T_2, \mathbf{K}, T_N$.

Методика розв'язування. Оскільки в (1) e – малий параметр, множина значень $\{a_i\}$ і $\{T_i\}$ визначає [14] наближені закони зміни в часі параметрів a і T за допомогою диференціальних рівнянь

$$\frac{da}{dt} = eA(a); \frac{dy}{dt} = w + eB(a), \tag{3}$$

в яких $A(a), B(a)$ – відомі функції (нижче їх вважатимемо поліноми), w - власна частота незбурених ($e = 0$) коливань системи.

Для рівняння (1) розглядатимемо однорідні крайові умови вигляду

$$u(x,t)\big|_{x=0} = 0; \quad u(x,t)\big|_{x=l} = 0. \tag{2}$$

Відповідно до основної ідеї методу КБМ, перше наближення розв'язку крайової задачі (1), (2) подамо у вигляді

$$u(x,t) = u_0(a, x, y) + eu_1(a, x, y), \tag{4}$$

де $u_1(a, x, y)$ – $2p$ - періодична по $y = wt + j$ функція, що не містить першої гармоніки y, тобто задовольняє умови

$$\int_0^{2p} u_1(a, x, y) \begin{Bmatrix} \cos y \\ \sin y \end{Bmatrix} dy = 0. \tag{5}$$

Класичне лінійне хвильове рівняння Клейна–Гордона $(e = 0)$ за крайових умов (2) допускає одночастотний розв'язок у вигляді

$$u_0(x,t) = a\sin(kx)\sin(wt + j), \; k = \frac{kp}{l}, k = 1,2,... \tag{6}$$

Тому шляхом диференціювання (4) знаходимо

$$u_x = ak\cos(kx)\sin(wt + j) + \frac{\partial u_{1x}}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -ak^2 \sin(kx)\sin(y) + e\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{d^2a}{dt^2}\left\{\sin(kx)\sin(y)+e\frac{\partial u_1}{\partial a}\right\}+\frac{d^2y}{dt^2}\left\{a\sin(kx)\cos(y)+e\frac{\partial u_1}{\partial y}\right\}+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\left\{-a\sin(kx)\sin(y)+e\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}\right\}+$$

$$+2\frac{da}{dt}\frac{dy}{dt}\left\{\sin(kx)\cos(y)+e\frac{\partial^2 u_1}{\partial a\partial y}\right\}+\left(\frac{da}{dt}\right)^2\left\{e\frac{\partial^2 u_1}{\partial a^2}\right\}; \qquad (7)$$

Аналогічно із (3) знаходимо

$$\frac{d^2a}{dt^2}=e^2\frac{dA}{da}A(a);\qquad \frac{d^2y}{dt^2}=e^2\frac{dB}{da}A(a);\qquad \left(\frac{da}{dt}\right)^2=e^2A^2(a);$$

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=w^2+2weB(a)+e^2B^2(a);\qquad \frac{da}{dt}\frac{dy}{dt}=ewA(a)+e^2A(a)B(a). \qquad (8)$$

Підставляючи (4), (6) – (8) в (1), маємо

$$a\left(-w^2+a^2k^2+b\right)\sin(kx)\sin(y)+$$

$$+e\left\{2wA(a)\sin(kx)\cos(y)-2waB(a)\sin(kx)\sin(y)+w^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}-a^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}+bu_1\right\}=e\,\overline{f}(a,x,y), \qquad (9)$$

де $\overline{f}(a,x,y)=f\left(u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\Big|_{\substack{u=a\sin(kx)\sin(wt+j),\\ u_x=ak\cos(kx)\sin(wt+j),\\ u_t=-aw\sin(kx)\cos(wt+j),\\ u_{xx}=-ak^2\sin(kx)\sin(wt+j)}}$.

Зрівнюючи коефіцієнти при e^0 та e у правій та лівій частинах залежності (9), отримуємо значення невідомого параметра b :

$$b=w^2-(ak)^2 \qquad (10)$$

та диференціальне рівняння, яке зв'язує відомі та невідомі функції

$$2wA(a)\sin(kx)\cos(y)-2waB(a)\sin(kx)\sin(y)+w^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}-a^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}+bu_1=\overline{f}(a,x,y), \qquad (11)$$

Беручи до уваги умови, накладені на невідому функцію $u_1(a,x,y)$, із (11) знаходимо співвідношення, яке зв'язує відомі функції $A(a)$, $B(a)$ та невідому $f\left(u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)$

$$A(a)=\frac{1}{2pl\sqrt{a^2k^2+b}}\int_0^l\int_0^{2p}\overline{f}(a,x,y)\sin(kx)\cos(y)\,dxdy\ ,$$

$$B(a)=\frac{-1}{2pal\sqrt{a^2k^2+b}}\int_0^l\int_0^{2p}\overline{f}(a,x,y)\sin(kx)\sin(y)\,dxdy\ . \qquad (12)$$

Оскільки ліві частини залежностей (12) є поліноми, це дає підставу функцію $f\left(u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)$ шукати у вигляді

$$f\left(u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)=\sum_{k=1}^{N}c_k f_k\left(u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right), \qquad (13)$$

де $f_k\left(u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)$ – лінійно незалежні многочлени; c_k – невідомі коефіцієнти.

Вище наведене, а також залежності (12) дають змогу отримати співвідношення, які зв'язують невідомі параметри $c_1, \mathbf{K} c_N$

$$\sum_{k=1}^{N} c_k P_k(a) = A(a), \sum_{k=1}^{N} c_k R_k(a) = B(a), \tag{14}$$

де

$$P_k(a) = \frac{1}{pl\sqrt{a^2k^2+b}} \int_0^l \int_0^{2p} f_k\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\Bigg|_{\substack{u=a\sin(kx)\sin(wt+j), \\ u_x=ak\cos(kx)\sin(wt+j), \\ u_t=-aw\sin(kx)\cos(wt+j), \\ u_{xx}=-ak^2\sin(kx)\sin(wt+j)}} \cos y \sin(kx)\, dy\, dx;$$

$$R_k(a) = \frac{-1}{pla\sqrt{a^2k^2+b}} \int_0^l \int_0^{2p} f_k\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\Bigg|_{\substack{u=a\sin(kx)\sin(wt+j), \\ u_x=-ak\cos(kx)\sin(wt+j), \\ u_t=aw\sin(kx)\cos(wt+j), \\ u_{xx}=-ak^2\sin(kx)\sin(wt+j}} \sin y \sin(kx)\, dy\, dx.$$

Оскільки $c_1, c_2, ..., c_N$ – сталі, то співвідношення (14) повинні виконуватись при всіх значеннях параметра a. Тому, зрівнюючи коефіцієнти при однакових степенях a, із (14) отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно шуканих коефіцієнтів $c_1, c_2, ..., c_N$. Якщо вказана система має єдиний розв'язок, то апроксимацію невідомих силових чинників вибрано вдало, якщо ж система несумісна – то апроксимацію необхідно замінити іншою системою функцій $\{f_k\}$.

Набагато цікавішим випадком є випадок, коли співвідношення (14) виконуються при всіх значеннях параметра a і відповідна система має безліч розв'язків. Тоді для знаходження невідомих коефіцієнтів накладемо на функції $\{f_k\}$ додаткову умову, а саме: функціонал

$$J = \int_0^{2p} \int_0^l \left[\sum_{k=1}^{N} c_k \overline{f}_k(a, x, y) \right]^2 dx\, dy \tag{15}$$

повинен набувати мінімальне значення.

Нехай у зазначеному випадку із (14) можна визначити зв'язок між першими s невідомими коефіцієнтами та всіма іншими у вигляді $c_i = h_i(c_{s+1}, \mathbf{K}, c_N), \quad i = 1, 2, ... s.$, де h_i — відомі функції.

З врахуванням зазначеного, функціонал (15) набуває вигляду

$$J = \int_0^{2p} \int_0^l \left[\sum_{i=1}^{s} h_i(c_{s+1}, \mathbf{K}, c_N) \overline{f}_i(a, x, y) + \sum_{r=s+1}^{N} c_r \overline{f}_r(a, x, y) \right]^2 dxdy \tag{16}$$

Функціонал (13) набуватиме мінімального значення, якщо виконуються умови [19]

$$\frac{\partial J}{\partial c_{s+i}} = j_i(c_{s+1}, c_{s+2}, \mathbf{K}, c_N, a) = 0, \quad i = 1, 2, \mathbf{K}, N-s. \tag{17}$$

Розв'язуючи сумісно систему лінійних алгебраїчних рівнянь, яка випливає із (12) та (17), знаходимо невідомі коефіцієнти c_k.

Висновки. Запропонована у роботі методика визначення сил, враховуючи закон зміни основних параметрів, які описують коливання одновимірних систем, дає змогу побудувати оптимальну аналітичну апроксимацію силових чинників. Основна її ідея може: а) бути покладена в основу визначення фізико-механічних характеристик сипких середовищ при їх вібротранспортуванні чи віброоброленні; б) узагальнена також на складніші крайові умови автономного типу.

1. Альберт И. У., Петров В. А., Скворцова А. Е. Анализ динамической реакции конструктивно-нелинейных механических систем // Известия ВНИИГ им. Б.Е.Веденеева.– М., 2002. – Вып. №241. – С. 38–59. 2. Андронов А. А. , Вит А. П., Хайкин С. Е . Теория колебаний. – М.: Физматгиз, 1959.- 916 с. 3. Блакьер О. Анализ нелинейных систем – М.: Наука, 1969. – 275 с. 4. Бабаков И. М. Теория колебаний. – М.: Наука, 1968 – 560 с. 5. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – 504 с. 6. Гащук П. М., Зорій М. М. Лінійні моделі дискретно-неперервних механічних систем. – Львів: Українські технології, 1999. – 372 с. 7. Митропольский Ю. А., Мосеенков Б. И. Асимптотические решения уравнений в частных производных. – К.: ВШ, 1976. – 592 с. 8. Найфэ А. Х. Методы возмущений. – М.: Мир, 1976. – 456 с. 9. Писаренко Г. С., Шевчук А. Б., Богинич О. Е. К вопросу исследования рассеяния енергии в материале при высокочастотных колебаниях– В кн. Рассеяние енергии при колебаниях механических систем. – К.: Наукова думка, 1972. – С. 41– 50. 10. Галиуллин А. С. Обратные задачи динамики. – М.: Наука, 1981. – 145 с. 11. Кононенко В. О., Плахтиенко Н. П. Определение петлеобразных характеристик нелинейных колебательных систем из анализа движения // Прикл. мех. – 1970 – IV, вип. 9 – С. 9–15. 12. Кононенко В. О., Плахтиенко Н. П. Определение характеристик нелинейных элементов колебательных систем из анализа движения // Прикл. мех. – 1969 – Вип. 10 – С. 1–7. 13. Плахтієнко Н. П. Про визначення нелінійної характеристики коливної системи з аналізу фазової траєкторії // Доп. АН УРСР, сер. А, – 1976 – Вип. 4. – С. 336–338. 14. Сеник П. М. Одно обобщение обратной задачи асимптотического метода Н.Н. Боголюбова // Изв. ВУЗов. – 1960 – №. 6 – С. 226–232. 15. Сеник П. М. Визначення функції, яка характеризує розсіювання енергії коливної системи // Прикл. мех. – 1960. – IV. – Вип. 1 – С. 40–45. 16. Сеник П.М., Сокіл Б.І. Про побудову оптимальної автономної програмно-коливної системи з сильною нелінійністю // Доп. АН УРСР, сер. А – 1976. – № 7. – С. 600–603. 17. Митропольский Ю.А. О построении асимптотического решения возмущенного уравнения Клейна–Гордона // Укр. мат. журн. – 1995. – 47. – №9. – С. 1209 – 1216. 18. Стоцько З. А., Сокіл Б. І., Топільницький В. І. Нелінійна модель руху шару середовища робочого контейнера вібраційних машин об'ємного оброблення виробів зі змінним параметром нелінійності // Машинознавство. – 2001. – №1(43). – С.19–23. 19. Сокіл Б. І., Хитряк О. І., Обернені задачі динаміки нелінійних систем із розподіленими параметрами та один підхід до їх розв'язання // Науковий вісник УкрДЛТУ: Зб. наук.-техн. праць – Львів:УкрДЛТУ. – 2009. – №19.10. – С.64–67