

## МОДЕЛЮВАННЯ ОБРОБКИ КWТА-НЕЙРОННОЮ СХЕМОЮ ПОСТІЙНИХ ДИСКРЕТИЗОВАНИХ СИГНАЛІВ

© Тимощук П., 2010

Описується математична модель нейронної схеми типу “K-winners-take-all” (KWTA), призначеної для ідентифікації K максимальних серед N невідомих сигналів, де  $1 \leq K < N$ . Аналізується обробка моделлю постійних дискретизованих вхідних сигналів. Розглядається випадок рівних між собою вхідних сигналів. Наводяться відповідні результати комп’ютерного моделювання.

**Ключові слова:** математична модель, нейронна схема, дискретизований сигнал, активаційна функція, схемотехнічна реалізація.

**Mathematical model of discrete-time K-winners-take-all (KWTA) neural circuit that can identify K maximal from N unknown signals, where  $1 \leq K < N$  is described. A processing of constant sampled signals is analyzed. The case of equal input signals is considered. Corresponding computer simulation results are given.**

**Keywords:** mathematical model, neural circuit, sampled signal, activation function, hardware implementation.

### Вступ

Нейронні мережі типу “K-winners-take-all” (KWTA-мережі), як відомо, здійснюють вибір K серед N елементів, де  $1 \leq K < N$ , з більшими значеннями активаційних функцій, ніж у решти  $N - K$  елементів. Коли K дорівнює одиниці, KWTA-мережа є мережею типу “Winner-takes-all” (WTA-мережею), яка може розрізняти нейрон з максимальною активацією [5], [7], [8]. Вибір K найбільших елементів з множини даних N дійсних чисел є ключовою задачею мереж прийняття рішень, розпізнавання образів, пов’язаних пам’ятей і конкуруючого навчання [9], [11]. Задачі такого типу, природно, трапляються під час розв’язання задач класифікації і застосовуються для розроблення класифікаційних нейронних мереж, для розв’язання задач сортування, розпізнавання і класифікації зразків [4]. KWTA-мережі використовують в телекомунікації, особливо для керування пакетними перемикачами даних [1]. KWTA-механізми мають важливі застосування у машинному навчанні, зокрема для розв’язання задач класифікації k найближчих об’єктів, кластеризації k значень тощо [3, 6].

Існує низка KWTA-нейронних мереж зі своїми перевагами і обмеженнями. Так, наприклад, аналогові нейронні мережі, придатні для розв’язання KWTA-задач, пропонуються в [3] і [6]. Спочатку KWTA-процес трансформується до еквівалентної задачі квадратичної оптимізації з обмеженнями, а потім спрощені та вдосконалені дуальні нейронні мережі пристосовуються до KWTA-мереж, які проектується і моделюються в [3] і [6] відповідно. На противагу більшості рекурентних нейронних мереж, які мають усі зв’язки, такі мережі характеризуються добре масштабованим функціонуванням. Мережі є глобально стабільними за Ляпуновим і їхні стани глобально збігаються до KWTA-режиму. Функціонування таких нейронних мереж підтверджується числовими експериментами. Зокрема, час збіжності мережі з [6] є незалежним від кількості входів, тобто розмірності задачі, він обернено пропорційний до роздільної здатності мережі і дорівнює часу перехідного процесу мережі. Якщо роздільна здатність мережі зростає, швидкість обробки

сигналів зменшується. Крім цього, для збільшення роздільної здатності мережі значення коефіцієнта підсилення аналогових підсилювачів повинно збільшуватись. Це значення обмежується труднощами схмотехнічної реалізації великого коефіцієнта підсилення. Тому роздільну здатність мережі необхідно вибирати в результаті компромісу між точністю обробки сигналів, з одного боку, і швидкістю обробки та обмеженнями схмотехнічної реалізації мережі – з іншого. Результати моделювання мережі з [3] показують, що час збіжності мережі у середньому зменшується, коли розмірність задачі зростає. Такі мережі успішно тестуються для динамічних змінних у часі сигналів, коли швидкість перехідного процесу мережі є значно більшою, ніж швидкість зміни вхідних сигналів.

У статті описана математична модель КВТА-нейронної схеми обробки дискретизованих сигналів, що виконує динамічне зсування значень вхідних сигналів. Модель відзначається низькою обчислювальною складністю, високою швидкістю обробки сигналів, придатністю до обробки сигналів будь-якого скінченного діапазону і властивістю збереження впорядкування сигналів. Аналізується випадок обробки моделлю сигналів, частина з яких рівні між собою. Наведено відповідні результати комп'ютерного моделювання.

### Математична модель КВТА-нейронної схеми дискретного часу

Нехай задано  $N$  дійсних чисел від  $a_1$  до  $a_N$ ,  $N > 1$ , тобто  $a_1, a_2, \dots, a_N$ , як миттєвих значень невідомих вхідних сигналів і необхідно вибрати  $K$  найбільших з них, де  $1 \leq K < N$  – ненегативне ціле. Припустимо, що задані числа розподілені у відомому діапазоні  $a \in (A_{\min}, A_{\max})$ . Прийmemo, що ці числа не рівні між собою (відрізняються між собою за значеннями) і впорядковані за зменшенням так, що задовольняються нерівності

$$a_1 > a_2 > \mathbf{L} > a_N, \quad (1)$$

де індекси  $1, 2, \mathbf{L}, N$  у загальному випадку можуть відрізнятись від оригінальних номерів входів, означаючи, що компоненти вектора  $a = [a_1, \mathbf{L}, a_N]$  – впорядковані. Побудуємо математичну модель нейронної схеми дискретного часу, яка обробляє вхідний вектор  $a$  так, що після скінченної кількості ітерацій отримуються вихідні сигнали схеми  $b = [b_1, \mathbf{L}, b_N]$ , які задовольняють нерівності

$$b_i > 0, i \in 1, 2, \mathbf{L}, K; b_j < 0, j \in K+1, K+2, \mathbf{L}, N. \quad (2)$$

Нерівності (2) виражають КВТА-властивість, тобто що саме вихідні сигнали від  $b_1$  до  $b_K$  “виграють” конкуренцію і той факт, що тільки вони є позитивними компонентами вектора  $b$ , свідчить про те, що вхідні сигнали від  $a_1$  до  $a_K$  є  $K$  найбільшими компонентами вектора  $a$ .

Виконаємо попередню обробку заданого вектора  $a$  вхідних сигналів, віднявши від усіх його компонентів значення  $A_{\min}$ , і отримаємо додаткові сигнали

$$c_1 > c_2 > \mathbf{L} > c_N, \quad (3)$$

де  $c_n = a_n - A_{\min}$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ . Неважко побачити, що сигнали (3) містяться у діапазоні  $(0, A)$ , де  $A = A_{\max} - A_{\min} > 0$ , тобто  $c \in (0, A)$ , де  $c = [c_1, c_2, \dots, c_N]$ . Оскільки вхідні сигнали (1) не рівні між собою і розподілені у відомому діапазоні, тому сигнали (3) також різні й обмежені в діапазоні  $(0, A)$ . Отже, для будь-яких  $1 \leq K < N$  існують такі значення  $x \in \mathfrak{R}$ , які задовольняють нерівності

$$c_i > x, i \in 1, 2, \mathbf{L}, K; c_j < x, j \in K+1, K+2, \mathbf{L}, N. \quad (4)$$

Віднімання  $x$  від (4) дає

$$c_i - x > 0, i \in 1, 2, \mathbf{L}, K; c_j - x < 0, j \in K+1, K+2, \mathbf{L}, N. \quad (5)$$

Як видно з (5), сигнали  $c_n - x$ , де  $n = 1, 2, \dots, N$ , володіють КВТА-властивістю. Тому такі сигнали можуть бути використані, як вихідні сигнали моделі КВТА-нейронної схеми, тобто можна записати рівності

$$b_i = c_i - x, i \in 1, 2, \mathbf{L}, K; b_j = c_j - x, j \in K+1, K+2, \mathbf{L}, N. \quad (6)$$

Для побудови моделі КВТА-нейронної схеми необхідно розробити процедуру знаходження значення скалярного динамічного зсуву вхідних сигналів  $x$ , який задовольняє нерівності (4). Використаємо для цього вимогу, що такий зсув у встановленому режимі повинен лежати у діапазоні  $(0, A)$ . Спроекуємо траєкторію  $x^{(k)}$ , де  $k = 1, 2, \dots, m$  – кількість ітерацій до досягнення встановленого режиму, яка може перетнути весь діапазон  $(0, A)$ . Нехай така траєкторія буде розв'язком відповідного різницевого рівняння  $x^{(k+1)} = \varphi(x^{(k)})$  з початковою умовою  $x^{(1)}$ , де  $\varphi(x^{(k)})$  – певна функція, яку треба визначити. Припустимо, що у деякий момент  $t^{(m)}$  змінна  $x^{(k)}$  набуває у встановленому режимі значення  $x^{(k)} = x^{(m)}$ , яке задовольняє нерівності (4). Для зупинки обчислювального процесу в момент  $t^{(m)}$  визначимо умову, яка керує кількістю переможців і переможених у кожній дискретній часовій точці протягом обчислювального процесу:

$$R(x^{(k)}) = 2K - N - \sum_{n=1}^N \operatorname{sgn}(b_n^{(k)}), \quad (7)$$

де  $R(x^{(k)})$  –  $k$ -те дискретне значення нев'язки;  $b_n^{(k)} = c_n - x^{(k)}$  – значення  $n$ -го вихідного сигналу моделі на  $k$ -й ітерації,

$$\operatorname{sgn}(b_n^{(k)}) = \begin{cases} 1, & \text{if } b_n^{(k)} > 0; \\ 0, & \text{if } b_n^{(k)} = 0; \\ -1, & \text{if } b_n^{(k)} < 0 \end{cases} \quad (8)$$

– сигнум-(жорсткообмежувальна) функція;  $\sum_{n=1}^N \operatorname{sgn}(b_n^{(k)})$  – різниця між дійсними кількостями переможців і переможених. Сигнум-функція виконує порівняння між  $k$ -м дискретним значенням  $n$ -го вихідного сигналу  $b_n^{(k)}$  і нулем. Якщо  $b_n^{(k)} > 0$ , тоді  $n$ -на сигнум-функція забезпечує вихідний сигнал  $\operatorname{sgn}(b_n^{(k)}) = 1$ , якщо  $b_n^{(k)} = 0$ , тоді вихідний сигнал  $n$ -ї сигнум-функції  $\operatorname{sgn}(b_n^{(k)}) = 0$ , інакше  $\operatorname{sgn}(b_n^{(k)}) = -1$ .

Визначатимемо динамічний зсув  $x^{(k)}$  за допомогою такого рекурсивного алгоритму:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \alpha \Delta x^{(k)}, \quad (9)$$

де  $\Delta x^{(k)} = \operatorname{sgn}(R(x^{(k)})) \alpha^k$ ;  $\alpha$  – параметр, який гарантує збіжність алгоритму до КВТА-розв'язку;  $0 \leq x^{(1)} \leq A$  – початкова умова;  $m$  – кількість ітерацій до досягнення збіжності пошуковим процесом встановленого режиму.

### Обробка моделлю рівних за значеннями вхідних сигналів

Розглянемо випадок, коли два або більше вхідних сигналів є рівними між собою. Якщо такі вхідні сигнали належать до  $K$  переможців або до  $N - K$  переможених, то вихідні сигнали моделі у встановлених режимах задовольнятимуть КВТА-властивості (2). Однак, якщо така модель повинна розрізняти рівні вхідні сигнали і розщеплювати їх у позитивну і негативну площину, коли кількості цих вхідних сигналів є такими, що тільки менше або більше, ніж  $K$  переможців можна визначити, тоді отримуватимемо різні спірні траєкторії вихідних сигналів схеми, які не мають КВТА-властивостей. Зокрема, динамічний зсув  $x^{(k)}$  вхідних сигналів схеми демонструватиме загасаючі коливання навколо точки  $a_e - A_{\min}$  рівних вхідних сигналів. Тому вихідні сигнали  $b_n$  схеми матимуть загасаючі коливання навколо точок  $a_n - A_{\min} - x$ . Інакше кажучи, вихідні сигнали, що відповідають рівним вхідним сигналам, матимуть загасаючі коливання навколо нульових значень і решта вихідних сигналів будуть мати коливання, що загасають, у позитивній або негативній площині.

Отже, можна зробити висновок, що коли модель, яка описується різницеvim рівнянням (9) і рівностями (6), повинна обробляти рівні вхідні сигнали вектора  $a$  і серед них існують  $K$  переможців, тоді можна гарантувати, що ця модель завжди ідентифікуватиме їх відповідно до КWТА-властивості (2).

### Результати комп'ютерного моделювання

Для ілюстрації теоретичних результатів, наведених у статті, розглянемо конкретні приклади з відповідним комп'ютерним моделюванням, яке демонструє обробку описаною моделлю КWТА-нейронної схеми дискретизованих сигналів. Розглянемо спочатку результати комп'ютерного моделювання випадку нерівних між собою вхідних сигналів.

*Приклад 1.* Нехай необхідно ідентифікувати три найбільші сигнали, тобто  $K = 3$  вектори  $a = [-42, 30, -20, 47, 35]$ , тобто  $N = 5$ , використавши модель, що описується різницеvim рівнянням (9) і рівностями (6). Задамо для цієї моделі  $A_{\min} = -50$ ,  $A = 100$ , початкову умову  $x^{(1)} = A$  і коефіцієнт загасання  $\alpha = 0.9$ . Визначимо траєкторії зсуву  $x^{(k)}$  і вихідні сигнали  $b_i^{(k)}$ ,  $i = 1, 2, 3, 4, 5$  згідно з різницеvim рівнянням (9) і рівностями (6). Такі траєкторії в нормалізованих одиницях показано на рис. 1. Як можна побачити, у встановленому режимі сигнали  $b_2 > 0$ ,  $b_4 > 0$ ,  $b_5 > 0$  відповідають трьом найбільшим компонентам вектора  $a$  – переможцям, а сигнали  $b_1 < 0$ ,  $b_3 < 0$  відповідають переможеним згідно з КWТА-властивістю (2). Збіжність пошукового процесу до встановленого режиму досягається за  $m = 7$  ітерацій.

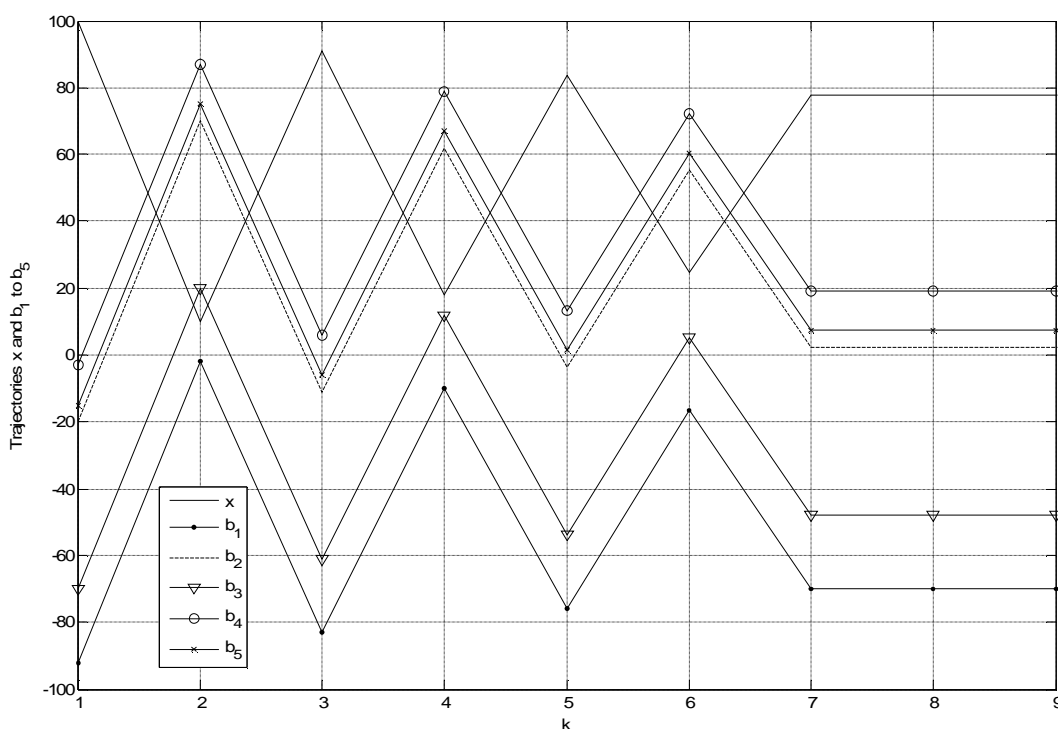


Рис. 1. Траєкторії зсуву  $x^{(k)}$  і вихідних сигналів  $b_i^{(k)}$ ,  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ , які представляють КWТА-властивість моделі, що описується різницеvim рівнянням (9) і рівностями (6), – приклад 1

На рис. 2 подано фазовий портрет траєкторії зсуву  $x^{(k)}$ . Як можна побачити, фазова крива змінної  $x^{(k)}$  є скінченною закрученою спіраллю кусково-лінійної форми, що гарантує стабільну

динаміку зсуву  $x^{(k)}$ . Зміна зсуву  $\Delta x^{(k)} = x^{(k+1)} - x^{(k)}$  містить стрибки між горизонтальними ділянками.

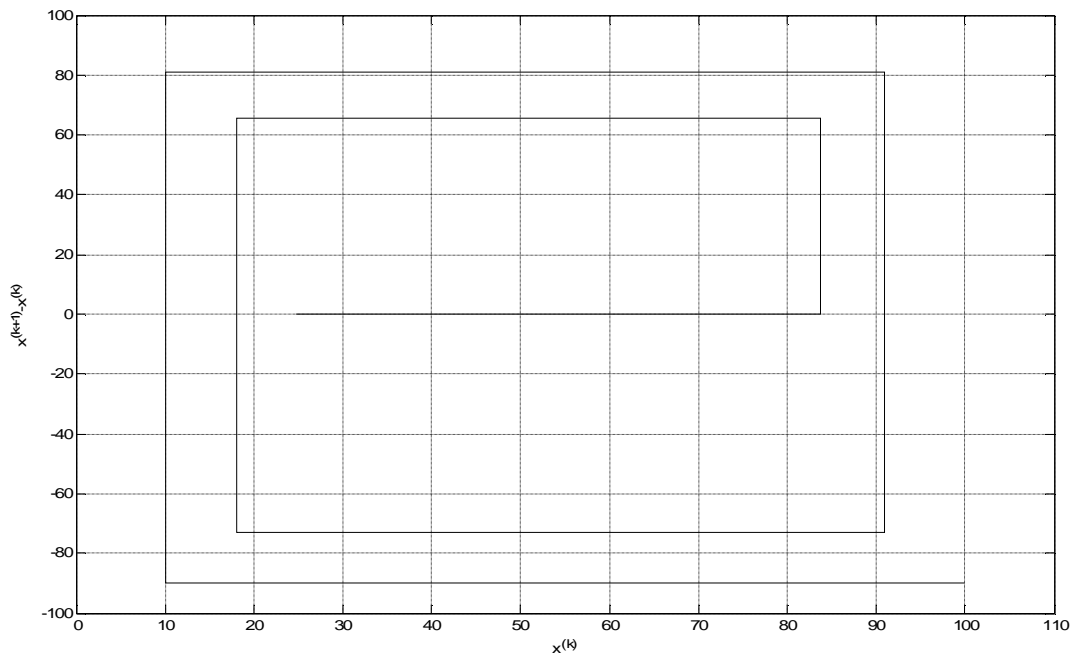


Рис. 2. Фазова крива траєкторії зсуву  $x^{(k)}$  з прикладу 1

Продемонструємо функціонування описаної моделі КВТА-нейронної схеми у разі рівних за значеннями вхідних сигналів.

*Приклад 2.* Спробуємо за допомогою описаної моделі КВТА-нейронної схеми визначити два найбільші сигнали, тобто  $K = 2$ , вектора  $a = [4, -1, 4, 4, -5]$  для параметрів  $\alpha = 0.5$ ,  $A_{\min} = -5$ ,  $A = 10$  і  $x^{(1)} = 0$ . Траєкторії зсуву  $x^{(k)}$  і вихідні сигнали  $b_i^{(k)}$ ,  $i = 1, 2, 3, 4, 5$  показано на рис. 3, де  $x^{(k)}$  здійснює нескінченну кількість загасаючих коливань навколо точки  $x = 9$ . Вихідні сигнали  $b_i^{(k)}$ ,  $i = 1, 2, 3, 4, 5$  виконують нескінченну кількість коливань, що загасають, навколо точки  $b_i = a_i - A_{\min} - x$ , тобто компоненти  $b_1, b_3, b_4$  накладаються один на одного.

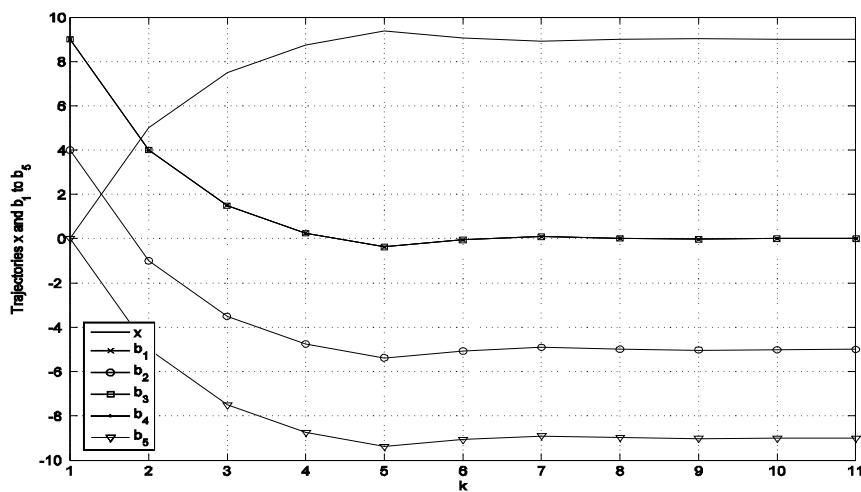


Рис. 3. Траєкторії зсуву  $x^{(k)}$  і вихідних сигналів  $b_i^{(k)}$ ,  $i = 1, 2, 3, 4, 5$  моделі, що описується різницевою рівнянням (9) і рівностями (6) у разі рівних вхідних сигналів, приклад 2

Фазова крива зсуву  $x^{(k)}$  зображена на рис. 4. Ця крива є нескінченною закрученою спіраллю кусково-лінійної форми, що гарантує стабільну динаміку зсуву  $x^{(k)}$ . Зміна  $x^{(k+1)} - x^{(k)}$  зсуву  $x^{(k)}$  має стрибки на початку і в кінці кожного горизонтального сектора.

Отже, результати моделювання показують, що описана модель KWTA-нейронної схеми може ефективно визначати  $K$  найбільших серед  $N$  невідомих сигналів, де  $1 \leq K < N$ , якщо ні один з  $K$  найбільших сигналів не дорівнює ніякому з решти  $N-K$  сигналів. Інакше кажучи, результати моделювання демонструють добру відповідність теоретичним передбаченням.

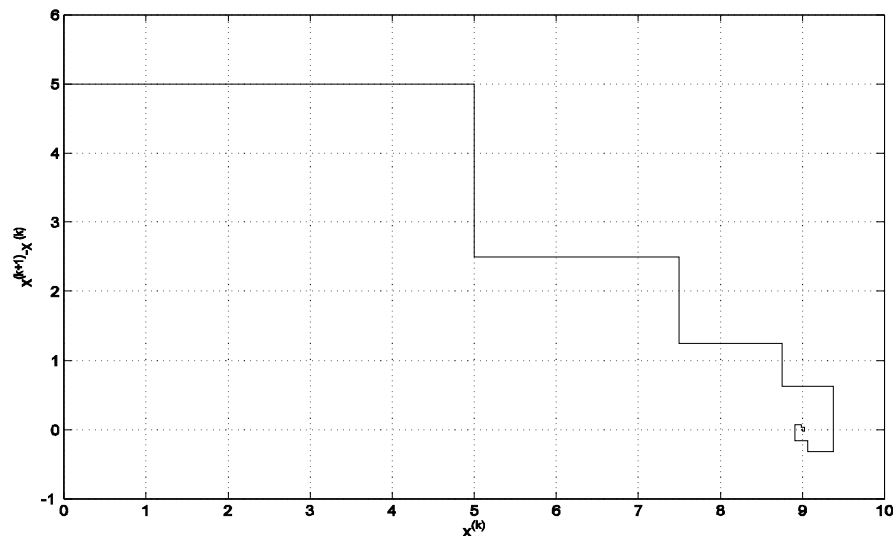


Рис. 4. Фазова крива зсуву  $x^{(k)}$  з прикладу 2

### Висновки

У статті описано математичну модель нейронної схеми типу “ $K$ -winners-take-all”, призначеної для обробки дискретизованих сигналів, яка функціонує на основі динамічного зсування значень вхідних сигналів. Модель є простою, має високу роздільну здатність, придатна для ідентифікації  $K$  найбільших серед  $N$  невідомих сигналів, де  $1 \leq K < N$ , якщо їх можна розрізнити, широкого діапазону, незалежна від початкових умов і має властивість збереження впорядкованості сигналів. Отже, описана модель придатна для різноманітних застосувань.

1. Bihn L. N. and Chong, H. C. A neural-network contention controller for packet switching networks, *IEEE Trans. on Neural Networks* 6 (1995) 1402-1410. 3. Hu X. and Wang J. An improved dual neural network for solving a class of quadratic programming problems and its  $k$ -winners-take-all application, *IEEE Trans. on Neural Networks*, 19 (2008) 2022-2031. 4. Kwon T. M. and Zervakis M. A parallel sorting network without comparators: A neural-network approach, in: *Proc. Int. Joint Conf. on Neural Networks*, Vol. 1 (1992) 701-706. 5. Lippmann R. P., Gold B. and Malpass M.L. A comparison of Hamming and Hopfield neural nets for pattern classification, *MIT Lincoln Laboratory Technical report TR-769 (1987) 1-37*. 6. Liu S. and Wang J. A simplified dual neural network for quadratic programming with its KWTA application, *IEEE Trans. on Neural Networks*, 17 (2006) 1500-1510. 7. Tymoshchuk P. and Kaszkurewicz E. A Winner-take-all circuit based on second order Hopfield neural networks as building blocks, in: *Proc. Int. Joint Conf. on Neural Networks*, Vol. II (2003) 891-896. 8. Tymoshchuk P. and Kaszkurewicz E. A winner-take-all circuit using neural networks as building blocks, *Neurocomputing* 64 (2005) 375-396. 9. Urahama K. and Nagao T.  $K$ -Winner-take-all circuit with  $O(n)$  complexity, *IEEE Trans. on Neural Networks* 6 (1995) 776-778. 10. Yang J. F. and Chen C. M. A Dynamic  $K$ -Winners-Take-All Neural Network, *IEEE Trans. on Syst., Man and Cyb.* 27 (1997) 523~526. 11. Yen J. C., Guo J. I. and Chen H.-C. A new  $k$ -Winners-take all neural network and its array architecture, *IEEE Trans. on Neural Networks* 9 (1998) 901-912.