УДК 519.21:538.56

Я.П. Драган[1,4], М.О. Медиковський[2], В. Овсяк [8], Л.С. Сікора [2], Б. Яворський [4]
Національний університет “Львівська політехніка”,
[1] кафедра програмного забезпечення;
Національний університет "Львівська політехніка",
[2] кафедра автоматизованих систем управління;
[3] Українська академія друкарства;
[4] Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя;

СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ КОНЦЕПЦІЇ ТА ПРИНЦИПІВ ПОБУДОВИ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ДОСЛІДЖУВАНОГО ОБ’ЄКТА В ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИХ НАУКАХ ТА ОЦІНЮВАННЯ ЇЇ ЯКОСТІ

Викладено результати системного аналізу ролі, обґрунтування побудови і оцінювання якості математичних моделей досліджуваних об’єктів у фізико-технічних науках, на підставі яких систематизовано відомі трактування цього поняття. Підкреслено скінченність уточнення поняття і терміна “математична модель” у сучасному освітньому процесі, атестації та наукових публікаціях.

Ключові слова: математична модель, досліджуваний об’єкт, моделі в математиці, праксеологія, оцінення якості моделей.

There are exposed the results of a system analysis of the role, construction grounding and quality evaluation of investigated objects mathematical models in physical and technical sciences on the base of which known treatments of this notions are systemized. The necessity of the mathematical model notion and term specification in contemporary education and certification process, and also in scientific publications is underlined.

Keywords: mathematical model, investigated object, models in mathematics, praxeology, models quality evaluation.

Вступ

Наукові дослідження – як натурні спостереження та спеціально підготовані експерименти, так і теоретичні розгляди, у наш час науковці розпочинають, основуючись на певних (бажано якомога повніших, хоч може й не вповні усвідомлених і явно сформульованих) апріорних відомостях, що їх зазвичай укладають у певну систему або ж пристосовують до тієї, що вже існує у певній предметній області чи у якійсь іншій, вислідом чого є певне уявлення про ситуацію. Бо наука, за словами нашого відомого біолога М. Холодного, є системою знань, здатною до саморозвитку, а система (з *грец.* συστημα утвір, устрій) – порядок, зумовлений правильним розташуванням частин, стрункий ряд, зв’язане ціле [1]. Вона у цьому разі є результатом відповідного укладання й пов’язання відомостей. А здатність до саморозвитку зумовлена фактом, що така системність стимулює формулювання задач – пошуку потрібних, але відсутніх, бо їх ще бракує для повноти і цілісності системи, невідомих знань, незнаних фактів. Недарма серед науковців популярний афоризм: новий науковий результат ставить більше задач, ніж розв’язує. Це особливо часто проявляється як в експериментальних природничо-технічних дослідженнях, так і в теоретичних, зокрема в теоретичній фізиці й математиці, логічна структура (з *лат.* structura побудова, розташування від srtuo – будую), а висловившись точніше, композиція (від *лат.* composition складання, створення), яких є найпрозорішою. Власне, цей "тиск системності", поряд з так званим "суспільним запотребуванням" (чи, як часто висловлюються алегорично, суспільним замовленням) є рушієм формування, дослідження і вдосконалення такої системи відомостей про досліджуваний об’єкт.

У 50-ті роки минулого сторіччя сформувася такий напрям, як системний аналіз, що є способом дослідження активності об’єкта типово математичними засобами задля визначення її мети та розроблення процедур ефективнішого досягнення цієї мети [2]. Як вислід системного аналізу об'єкта дослідження формується обґрунтування його моделі для розв'язання конкретної задачі (фактично йдеться про тип задачі).

Підвищення ж ефективності праці як педагогів, так і науковців-дослідників залежить від усіх ланок відомої тріади: модель – алґоритм – програмна реалізація (МАПР), і щоб її основа – модель як підстава розроблення алґоритмічно-програмного забезпечення інформаційних систем у наукових дослідженнях були ефективно реалізовні при цьому, мають бути залучені всі сучасні здобутки теорії сиґналів як носіїв відомостей та комп'ютики як засобу опрацювання видобуваних із сиґналів даних. А це, своєю чергою, наголошує на скінченності розвитку усіх етапів МАПР - забезпечення досліджень і передусім його основи – моделі досліджуваного об'єкта, бо в наш час уже стало загальновизнаним, що біля витоків усякого наукового дослідження лежать відповідні схеми, уявлення, які прийнято називати моделями досліджуваного об'єкта (від франц. modèle, що походить з латин. modus міра) і трактується як примірник, зразок, як схема для пояснення чогось [1]. Тому цей термін розуміють як образ, відображення предмета, що про нього мова, а у мистецтві навпаки – це предмет чи особа, що слугує об'єктом художнього відображення, втілення в мистецькому творі, бо для митця є іншим "початок відліку": для нього істотним є власне його твір, а не походження (історія виникнення цього твору).

Відлуння такого тлумачення відчувається і в математиці. У ній теорія моделей – це розділ математичної логіки, що вивчає (математичні – вже наявні) моделі, а модель тоді – інтерпретація формальної мови [3]. Є ще термін "модель обчислювальна" як типова абстрактна чи конкретна задача, що відповідає проблемі числового розв'язання певного класу математичних чи прикладних задач [4]. Важливим є і термін "інтерпретація" (від лат. interpretor роз'яснюю, перекладаю) – задання значення (сенсу) математичних виразів, і самі ці значення теж називають інтерпретаціями відповідних виразів. Загальноприйняте значення тоді називають стандартною інтерпретацією [3].

Модель як схема для роздумів чи матеріалізований об'єкт, який мав би мати властивості, у якомусь сенсі аналогічні властивостям досліджуваного (вже реально наявного, матеріального або тільки ідеї чи, як це буває в інженерії, проектованого) і заступає його, тобто відіграє роль його у дослідженні (часто навіть без усвідомлення цього), найчастіше підпорядковується аналогічним закономірностям, використовується під час готування і здійснення експериментів. А теоретичні дослідження та залучення для цього комп'ютерів без моделі просто неможливі. Але в такому разі модель має бути вже суто математичною, хоч може бути задана по-різному: вербально (словами), схемами, символами і найузвичайненішими з них – формулами.

Вербальне подання не таке ефективне, як символьне, бо воно основане на описі об'єктів у часі й просторі. Символічна ж форма повідомлення може проникати у царини підсвідомості навіть без усвідомлення суб'єктом предмета. Проте тут спершу має бути зрозумілим значення символу, і тільки тоді він виконає свою роль, а формалізація, що в результаті системного аналізу обґрунтовує математичну модель, стає кінцевим етапом автоматизації перетворень (алґоритмів). Тому найприроднішим у наш час є формальне подання моделей, але без належного тлумачення воно стає безпредметним, бо ті самі формули надаються для цілком різних (інших) цілей.

Формулювання проблеми

Спершу моделі були фактично фізичні: таким було навіть "додавання" предметів, яке відтак абстрагувалось в операцію над числами. Цю обставину з притаманною йому дотепністю описав знаменитий фізик-теоретик Р. Фейнман у популярних лекціях про квантову електродинаміку [5], порівнюючи техніку праці фізиків з технікою розрахунків, які виконували індіанці майя для завбачення небесних явищ – сходу й заходу Венери чи місячних затемнень, на прикладі умовного пояснення жрецем майя віднімання чисел: "Припустімо, хочемо відняти 236 від 584. Передовсім відрахуймо 584 боби і покладімо їх у горщик. Потім виймімо 236 бобів і відкладімо їх. Нарешті підрахуймо решту бобів у горщику. Ця кількість і буде вислідом віднімання 286 від 584". На зауваження, що процедури з бобами досить марудні, жрець відповів би: "Саме тому ми маємо правила для рисок і крапок. Правила складні, але за допомогою їх набагато легше знайти результат, ніж перераховувати боби". А розвиток символіки єгиптян, вавилонців, подібної до згаданої символіки майя, привів до автоматизації арифметики (виконання дій над числами), та вже справжнім засобом автоматизації "аналогових перетворень" став регулятор Дж. Ватта.

Після І. Ньютона були визнані у фізиці, головно у механіці, теоретичні моделі, які зі значними труднощами пробивали собі дорогу в інші її сфери, бо практично всі фізичні закони (хоч про це далеко не завжди казали дослідники, а говорили так, ніби описують насправді фізичні явища безпосередньо) – це специфічні варіанти таких моделей, як поширення теплоти, цикл Карно, рівняння Максвелла. Але це ще не моделі, бо фізика – це не формули, а головне в ній – тлумачення формул.

Проте практика показує, що існують частково зумовлені згаданою вже обставиною істотні різнобіжності у трактуванні поняття математичної моделі. Тим більше, що в математиці є, як уже була мова, теорія моделей як розділ, який за означенням досліджує математичні моделі, а ними є тоді інтерпретації формальних мов, тобто поєднання реляційної системи (множини елементів) та сукупності реляцій (стосунків, пов’язань). Тому, щоб уникнути сплутування понять, доцільно закріпити термін "модель у математиці" як синонім інтерпретації. Коли ж йдеться про вивчення реальних об’єктів та опис їх для цього, то природно вживати термін "математичні моделі", пам’ятаючи, що вони в такому разі є тут винятково засобами вивчення цих модельованих об’єктів у конкретній ситуації і для конкретної мети (задачі).

Що ж до термінів, то, на думку мовознавців, "дослідження значень і конкретних випадків уживання слів є заглибленням у течію мовного мислення як суспільного процесу. Семантичні дослідження охоплюють як пізнавальну функцію мови, так і її суспільну комунікативну функцію, до рис якої належить спонукальність і спричинення до дії... Метою таких тлумачень є вплив на поведінку людей, що вживають витлумачені у словнику слова" [6].

Звідси випливає доцільність розділення опису (моделі) досліджуваного об’єкта і математичних засобів такого дослідження, а також важливість систематичного розгляду їх безвідносно до реальних об’єктів, щоб усвідомити можливості конкретних математичних засобів як підстави й обґрунтування математичних моделей цих об’єктів, до чого і перейдімо, основуючись на уже оприлюднених тезах авторів, поданих на конференцію, приурочену до вшанування пам’яті проф. Б. Попова [7].

Системний аналіз проблеми моделей у сучасній математиці і концепція школи Бурбакі

Системний аналіз ролі та сенсу моделей у математиці природно будувати як критичний розгляд поглядів фундаментальної математики на цю проблему. Для цього зрезюмуймо тут відповідний матеріал, ґрунтуючись на принципово важливій і найприроднішій для цього концепції, сформульованій групою математиків, здебільшого французів, яка відома під псевдонімом Н. Бурбакі (див. [8]) і яка поставила мету (за словами редактора цієї книжки К.Рибникова) – "створити такий трактат, що став би оглядом усієї математики, побудованим на сучасному рівні наукової строгості і опертим на якомога загальніші принципи". Підкреслімо, що мова саме про всю математику.

Роль цієї концепції підтверджує факт, що наукові дослідження в наш час, подібно як і у ще доеллінський період, науковці починають виконувати, виходячи з певних (бажано якомога повніших) апріорних відомостей, що їх зазвичай укладають у певну систему або ж припасовують до тієї, що вже існує. Бо наука, як уже сказано, за словами відомого нашого біолога М. Холодного, є системою знань, здатною до саморозвитку. Це особливо проявляється як в експериментальних природничо-технічних дослідженнях, так і в теоретичних, зокрема у теоретичній фізиці та математиці, логічна структура яких є найпрозорішою, про що вже йшлося у вступі.

Значення цієї структури та притаманної не всякому інтуїції, яка допомагає збагнути приховану гармонію стосунків математичних елементів, знаменитий французький науковець – математик, фізик, астроном і філософ А. Пуанкаре виражає словами: "Перше, що дивує нас чи, радше, мало б дивувати нас, якщо б ми не так звикли до цього, це таке питання – чому існують люди, що не розуміють математики? Якщо наука дотримується чітких правил логіки, доступних усякій розсудливій людині, якщо докази її базуються на принципах, які ніхто, крім божевільних, не може не прийняти, то як може статися, що є все-таки досить багато індивідуумів, що абсолютно не сприймають цієї науки?" (див. [9]).

Математика, прецінь на чому акцентують Н. Бурбакі, має ту характеристичну рису, що, за висловом Р. Декарта, є довгою низкою міркувань, об'єднавчим принципом є дедуктивне міркування, що полягає у побудові низки силогізмів (грец. συλλογίζομαι, міркую, роблю висновок), які виводяться один із одного за правилами логіки, істотно такої, як відома з часів Аристотеля під назвою "формальної логіки", і належно пристосованої до потреб математики. Та це тільки зовнішня форма, яку математик надає своїй думці, засіб, який уможливлює сполучення з іншими думками, тобто притаманна математиці мова. Упорядкування словника цієї мови, уточнення її синтаксису становить один із аспектів аксіоматичного методу, а саме той, що його можна називати логічним формалізмом (або, як іще кажуть, "логістикою"). Цей аспект найменш цікавий. Бо аксіоматика ставить за основну мету зрозуміння (усвідомлення) суті математики. Як пізніше писав Б. Гнєденко [10], "математика має знати властивості своїх понять, і їх слід вивчати незалежно від тих запитів, що їх пред'являє практика". А на невивідності теорії безпосередньо з практики змушені наголошувати навіть марксистські філософи, всупереч їхній тезі, що "практика – критерій істини" (див. [11]).

Той факт, що його акцентує Пуанкаре, тому виглядає парадоксальним. Але насправді він спричинений ефектом коґнітивного захисту (з лат. cognosco розпізнаю), який стосовно пізнання є аналогом імунітету (несприйнятливості) органів щодо хвороб, отрут. Логіка ж не є наукою про мислення, пізнання, як пишуть словники, а головно про умовиводи (дедукцію), доведення, в зокрема математичне (див. [1]). А загалом тут стикаємось з психологією математичної творчості сенсі Ж. Адамара [12] і ролі в ній підсвідомості, інтуїції, про що писав наш поет-філософ І. Франко [19] і наші відомі математики різних часів [14, 15]. Але ситуація не така проста, як дещо побіжно пишуть автори книжки [15]: "Вивчення будь-якого реального явища або процесу проходить шлях спостереження експериментів, накопичення фактів, їх осмислення, які закінчуються створенням математичної моделі. Математична модель, як правило, виступає у вигляді певних рівнянь або нерівностей, досліджуваних математичними методами. Математичною мовою вказуються особливості моделі, існування можливих розв'язків задачі, їх властивості. Тим самим математика вказує на закономірності і властивості даного явища". Цей оптимізм дещо зменшився би, коли б автори задумались (і повідомили б читачам), яким чудом "накопичення фактів і їх осмислення" закінчується створенням математичної моделі. Бо за такого прямолінійного трактування напрошується дилема: чи є якийсь механізм, що веде від фактів і осмислення їх до моделі чи досить апелювати до Гегелевого закону діалектики – переходу кількості в якість. Самі ж автори, на історичних прикладах і з власного досвіду, за словами з наведеної передмови академіка А.Дородніцина, "показують, які властивості необхідні дослідникові, щоб упевнено розв'язувати важливі наукові проблеми". В наш час формується певна методологія, що її почали називати системним аналізом, яка наголошує на потребі різнобічності під час аналізу проблемної ситуації і формулюванні проблеми.

Річ у тім, що, як експериментальний метод ґрунтується на апріорній впевненості у сталості (незмінності) законів природи, так само аксіоматичний метод спирається на переконання, що математика не є нанизуванням силогізмів у вибраному навмання напрямі, ані технікою довільних поєднань. Бо метод – це впорядкований (системний) шлях чинити щось і водночас засіб творення системності. А це узгоджується з тезою Н. Бурбакі: "Там, де поверхневий спостерігач бачить дві чи кілька теорій, цілком різних за зовнішнім виглядом, і де втручання геніального математика приводить до виявлення «несподіваної допомоги», яку одна з них здатна надати іншій, там аксіоматичний метод учить нас шукати глибокі причини цього відкриття, знаходити загальні ідеї, приховані за деталями, притаманними кожній із роглядуваних теорій, добувати їх і піддавати їх дослідженню". Ця теза проілюстрована працями Архімеда як "предтечі" диференціального та інтеґрального числення з наголосом, що він знав відповідні методи, а не числення, заторкує проблеми пріоритету, який дуже важко установлювати до 1665 р. "через повну відсутність наукової періодики". І в наш час тут виникають проблеми, але головно з інших причин.

Всякий математик не визнає доведення зрозумілим, якщо обмежитись тільки перевіркою правильності виведень (висновків), з якого воно складається, а не намагатися зрозуміти ідеї, що ведуть до цієї низки висновків. Таке розуміння Н. Бурбакі пов'язують з поняттям математичної структури, що виявляє спільну рису понять, об'єднаних родовою назвою, і застосовність його до множини елементів, природа яких не означена. На них тоді задають стосунки (відношення) і постулюють (з латин. postulatum вимога), що ці відношення задовольняють конкретні умови, які називають аксіомами структури. Зрозуміло, як підкреслюють Н. Бурбакі, цей сенс слова "аксіома" не має нічого спільного з загальноприйнятим сенсом як виразу "очевидна істина".

Побудувати аксіоматичну теорію певної структури – означає вивести логічні висновки (наслідки) із аксіом структури, відмовившись від усяких інших припущень щодо розглядуванних елементів (зокрема від усяких гіпотез стосовно їхньої природи). Типи структур визначають стосунки між елементами множин:

- коли це "закони композиції" – з трьох елементів один є функцією решти двох, то структури алґебричні;
- коли стосунком є впорядкованість, то структури порядку;
- коли стосунки описують околи, границі, неперервність, то структури топологічні (топології);

Може бути поєднання аксіом різних структур у складні за допомогою пов'язних співвідношень. Так виникає топологічна алгебра й алґебрична топологія. Оригінальним прикладом є векторний простір над булевим полем, використаний для аксіоматизації моделей стохастики [16]. Подібно виникла алґебра алґоритмів [17]. Коли в загальних структурах елементи були неозначеними, то у часткових теоріях вони набувають виразної індивідуальності, тобто стають «роздоріжжями», де взаємодіють динамічно (в розвої) різні математичні структури.

Отже, концепція структури як засіб аксіоматичного методу реалізує значну економію думки: досить упізнати у співвідношеннях досліджуваних елементів структури певного типу, щоб відразу мати підстави скористатись для своєї задачі усім запасом загальних теорем стосовно структур такого типу.

Тепер у математиці, на думку Н. Бурбакі, інтуїція ще неподільніше запанувала в ґенезі відкриттів, але в наш час є "могутні важелі найважливіших структур, щоб охопити уніфікованою аксіоматикою величезні області, у яких, як видавалось, панував безформний хаос".

І тут постає проблема взаємних стосунків світу емпірики і світу математики, яка "у своїй акіоматичній формі є нагромадженням абстрактних форм математичних структур, і виявляється (хоч, по суті, й невідомо чому), що певні аспекти експериментальної дійсності ніби в результаті фатуму вкладаються у деякі з цих форм. І хоч не можна заперечити, що більшість цих форм під час виникнення мали певний інтуїтивний зміст, та якраз свідоме позбавлення цього змісту надало їм усієї дієвості, яка і становить їхню силу, і дало їм змогу набути нової інтерпретації та повністю виконати свою роль в опрацюванні даних. Тільки маючи на увазі цей сенс слова «форми», можна казати, що "аксіоматичний метод є формалізмом". Та він забезпечує єдність математики і є ефективним "інструментом дослідження, який свідомо використовують у своїй праці, починаючи з Ґаусса, всі великі мислителі-математики, всі ті, хто, дотримуючись формули Лежена-Діріхлє, завжди намагались «ідеї замінити обчисленнями»" [8]. У цьому – корені формального апарату математичного моделювання і вивчення реальних об'єктів.

Далі – згаданий факт щодо ролі математичних структур є, що більше, наслідком і водночас підтвердженням тієї обставини, що недаремно науковці-фізики переконані в існуванні закономірностей у природі – відкритих уже чи ні.

З іншого боку, цей факт є арґументом на користь відомого твердження – теорія визначає, що і як можна спостерігати у світі. А певні аспекти експериментальної дійсності не тільки укладаються у деякі з математичних структур, крім того – вони відкривають нові фізичні факти, як рівняння Максвелла електромагнітні хвилі, що зумовили появу нової теорії світла і радіотелекомукації, а рівняння Дірака – концепцію протона як антиелектрона і весь світ античастинок. Бо саме теорія є механізмом, що створює "тиск системності".

І ще варто додати, що фізики (й техніки) не тільки користувачі, а здебільшого першопрохідці – творці математичних засобів як І. Ньютон – диференціального та інтеґрального числення, Дж. Ґіббс та О. Гевісайд – векторного числення, Дж. Максвелл – векторного аналізу.

Тлумачення поняття математичної моделі з позиції користувача – об'єкт і задачі

За вихідний пункт викладу для ознайомлення недосвідченого читача з тим, що за словами автора передмови до брошури [18] І. Яглома, "слід назвати "математичним методом", із загальним характером побудови математичних теорій та методами міркування", доцільно взяти цю брошуру, бо її укладачі, на думку автора передмови, поставили таку мету. Сама брошура, з огляду на важливість матеріалу, є перекладом підсумкового розділу книжки цих самих авторів "Вступ до основ та основні поняття математики".

Під час побудови математичних теорій, які на вигляд є сукупністю теорем, останні виводяться з аксіом та вже перед тим доведених (з тих самих аксіом) теорем. При цьому турбуються винятково про дотримання формальної правильності міркувань, що виражають у вигляді відповідних імплікацій (логічно умовних суджень, з *лат.* implico – тісно зв'язую), які мають бути істинними, незалежно від істинності засновків та висновків. Це числення суджень є інтерпретацією алґебри Буля (алґебри множин). Його не можна вивести ні з якої іншої теорії, а навпаки, побудова всякої математичної теорії вимагає залучення власне числення суджень.

Символічно цей стосунок автори подають метафоричною аналогією (з *грец.* μεταφορα переміщення, віддалення; αγαλογια відповідність) із законом паралелограма при додаванні сил, згідно з яким результанта – вислідна сила – є єдиною і змінюється у разі зміни однієї чи обидвох додаваних, тоді як різні пари можуть давати ту саму вислідну. Подібно до цього математична теорія визначається системою аксіом – початкових тверджень та правил виведення, які задають логіку, тобто теорія є результатом їхньої взаємодії.

Розвиваючи цю аналогію і підкреслюючи відповідно до ідей праць [16] та [7] роль не тільки об'єкта, але й задачі математичного моделювання, можемо перенести цю аналогію на предмети нашої думки і стверджувати, що математична модель як образ досліджуваного об'єкта так само є вислідом "взаємодії" цього об'єкта – реального чи уявного (поки ще не маємо сформульованих аксіом) і задачі (а для формулювання її має бути "задіяна" логіка: щось має бути задане, а щось потрібно знайти). Цей вислід повинен мати формальне вираження. І тут може заявити про себе логіка, що відрізняється від аристотелевої, яку вважали чимось вічним, що не допускає альтернативи. Загалом вважають, що аристотелеві закони є ніби частиною світобудови і притаманні самій природі людського мислення. З 1921 р. працями уродженця Львова Я. Лукасєвича (працював в університетах Львова й Варшави), та його учня – варшав'янина А.Тарського, а також американця – уродженця Білосточчини Е. Поста – започатковані багато- і нескінченнозначна логіка, яка знайшла застосування у квантовій фізиці, а виникла завдяки відмові від аристотелевого закону виключення третього, подібно як неевклідова геометрія – у релятивістській фізиці, що виникла у результаті відкидання п'ятого постулату Евкліда про паралельні прямі.

Відомий англійський логік А. Уайтгед (див. [19]) зазначав, що "цінність тверджень математики полягає в їхній абстрактності та загальності", а автор статті [19] Ґ. Гарді – один з найвідоміших англійських математиків, захоплений, як сказано в передмові до брошури [13], філігранною строгістю французьких аналітиків XIX ст., був першим, хто запровадив на англійському ґрунті «культ чистої математики» (через що відстоював теоретичну компонету в математиці і дещо зневажливо ставився до прикладних можливостей її) додає: "строго кажучи, у фразі Уайтгеда є словесне надуживання: в нашому розумінні абстрактність і є загальність... але занадто велика загальність веде до безликості: «кожна річ є тим, чим вона є», і відмінності між речами так само цікаві, як і подібність їх... У математиці властивості, притаманні надто багатьом об'єктам, слабко надихають дослідника, і математична ідея стає розпливчастою, якщо вона не має індивідуальності. Тут знову можна зацитувати слова Уайтгеда: «Найплідніша концепція – це високий ступінь загальності у вдалому поєднанні з частковістю».

Проте не слід забувати, що, як підкреслює Гарді, "сенс слів дуже важливий і логіки мають рацію, нагадуючи нам елементарну істину, що її схильна забувати більшість фахівців: у середовищі, наприклад, астрономів або фізиків часом можна почути твердження, що хтось знайшов «математичне доведення» певних властивостей чи рис поведінки реальних об'єктів. Неможливо довести математично, чи завтра буде затемнення, бо затемнення, як і всі інші фізичні явища, не відноситься до світу математики і це, я думаю, мають під тиском логіки визнати навіть астрономи, скільки б затемнень вони не завбачили з високою точністю". Все стане зрозумілим, коли прийняти, що мова тут про верифікацію (від лат. verus істинний; справдження) принципів, покладених в основу математичної моделі (див.[8]). І якщо вона вкладається у певну математичну структуру, то цим коректність моделі є логічним вислідом з загальних властивостей структури. В іншому разі необхідно спеціально задатись обґрунтуванням моделі, враховуючи відомі факти про досліджуваний об'єкт, і намагатись сформувати потрібні аксіоми, а радше спершу постулати, які пізніше (у разі справдження вислідів із них) можуть набути статусу аксіом. У цьому сенс праці Бурбакі [8] з їхнім задумом, за словами її редактора, "створити трактат, що став би оглядом усієї математики, побудований на сучасному рівні наукової строгості, і спертим на загальних принципах". Правда, він розтягнувся на десятки томів. У цій статті автори вибрали з цього матеріалу, що підсумовує розвій усієї математики, те, що істотне для зрозуміння сенсу математичного моделювання.

Щодо практичного освоєння математики для моделювання дуже цікава спроба Д. Кнута у співпраці з колегами [20] заміни спецкурсу "Дискретна математика" на поєднання КОНтинуальної та дисКРЕТНОЇ в одному терміні конкретної математики як усвідомленого оперування формулами з використанням певного набору методів розв'язання задач. Її, за словами редактора передмови до перекладу В. Арнольда, "можна рекомендувати активним математикам, усім студентам і всім користувачам математики. Вона розкриває таємницю одного феномена американської освіти – як перетворювати малограмотних школярів на прекрасних математиків". Та це щодо техніки і засобів, але, за відомим афоризмом, до книжки та комп'ютера потрібно мати ще й голову.

А загалом, під час математичного моделювання очевидно, що математика є засобом, мовою праці, провідною ж – інтуїція. Корисним у цій справі, крім праці [5] Р. Фейнмана та [9] А. Пункаре, може стати збірник його ж публікацій [21]. Далі наведемо відповідний дещо доповнений матеріал публікації [7] авторів цієї статті.

Суть і роль математичних моделей у науковому дослідженні

Нашу історичну добу інколи характеризують як період другої промислово-технічної революції, маючи на думці створення та практичне використання принципів, методів і засобів реалізації допомоги людині – полегшення її розумової праці, а навіть все частіше заміни людини «машиною» для виконання дій, притаманних людському мисленню. Двадцяте сторіччя характерризується різким розширенням можливостей наукового пізнання, ґрунтуючись передовсім на істотних здобутках, започаткованих квантовою теорією і так званою релятивістською фізикою, теорією комунікації (яку чомусь називають теорією інформації), теорією управління (кібернетикою), про що говорять як про інформаційну революцію, інформаційний вибух. І тут, крім загальної ейфорії, породженої перебільшеною вірою у всемогутність науки, маємо справу із втіленням у цих фразах справжніх конструктивних ідей заступлення формальних аспектів у людському світосприйманні, мисленні та прогнозуванні подальших дій (і подій – наслідків їх) перетвореннями даних в абстрактному поданні (відображенні) їх водночас з автоматизацією цих перетворень. І саме цей конструктивний аспект є продуктивним.

Тут наголосимо, що основою автоматизації є інформація – так доцільно називати спеціально підготовані (перетворені) для цієї мети відомості (дані) про досліджуваний об'єкт. А їх можна отримати винятково від самого об'єкта та єдиним носієм цих даних є сиґнал – фізичний процес чи явище, у змінах ознак (параметрів) якого "записані" ці дані. Для обґрунтування, розроблення та коректного аналізу всіх перетворень даних (фактично ж сиґналів чи їхніх образів) необхідний відповідний теоретичний апарат – понятя (і терміни), числення, правила зіставлення з емпіричними фактами. А цей апарат має спиратись на адекватну до ситуації математичну модель, бо математика незбагненно ефективна, за словами Ю. Віґнера, для теоретичного аналізу, а також найефективніша мова автоматизації. А в наш час – поширення у практиці дослідження комп'ютерів, спецпроцесорів, контролерів – вона стає і єдиною мовою. Сеґреґація типів моделей має основуватись на дискримінації (виокремлені й постульовані) загальних властивостей (ознак) – спільних і притаманних для кожного зосібна об'єкта із множин (сукупностей) певних об'єктів. Зокрема, такі сукупності творять складні екобіотехнічні системи, тому дослідження їх уможливилось з використанням сучасних моделей і алґоритмів.

Математична ж модель – це математичний об'єкт у повному сенсі, тобто об'єкт певного розділу математики, означений коректно згідно з канонами цього розділу, які виступають в цьому разі в ролі засобів дискримінації – формалізації враховуваних (і постульованих яко аксіоми), а також нехтуваних при цьому ознак і закономірностей досліджуваних і водночас модельованих об'єктів. І, власне, формулювання постулатів (явне чи не зовсім) якраз і становить суть математичного моделювання, бо модель має однозначно означуватись (в логічному сенсі) постулатами, піднесеними до ранґу аксіом. Висновки ж із них, що в сукупності становлять теорію (цього класу об'єктів), повинні бути рівносильні аксіомам. Аксіоми ж формулюють тільки на високому рівні розвитку теорії.

Стосунок моделі до досліджуваного об'єкта оснований на концепції моделі реального об'єкта (тобто такого, що вже насправді існує, чи віртуального, планованого) як власне засобу наукового дослідження, передовсім теоретичного. Фактично модель при цьому є заступником реального об'єкта і яко математичний об'єкт втілює у своїй структурі деякі істотні для розв'язуваних задач закономірності досліджуваного. Цим наголошується на факті, що математична модель – її вигляд і сенс урахованих нею величин (а заодно нехтуваних – свідомо чи ні) і об'єктом якого розділу математики у результаті цього вона стає, тобто який математичний апарат має бути застосованим для дослідження й використання її – все це визначає як досліджуваний об'єкт (відомості про нього), так і не меншою мірою задачі щодо нього, що їх має намір розв'язувати дослідник. А звідси випливає рідко коли наголошувана активна (і визначальна) роль задачі (чи, радше, типу задач) під час побудови моделі на противагу традиційним поглядам в галузі, до якої дослідники (досить-таки довільно) зараховують досліджуваний об'єкт, що, по суті, перекриває шлях інноваціям. Пам'ятаймо, що різні задачі щодо того самого об'єкта вимагають різних моделей. Дослідники про це кажуть як про вдосконалення, розвиток, узагальнення моделі – заміну «старої» моделі новою. Тому нова задача вимагає нових понять (означень їх) і символів (позначень), на чому наголошував ще фундатор сучасної логіки Ґ. Freґе (див. [22]). Тут знову проявляється «моральний тиск» якщо не математичного способу мислення, то принаймні вимоги подання формулами, хоч усі знають афоризм: формула – ще не обов'язково модель, та й фізика – не формули, а тлумачення формул.

Концепція оцінення якості математичних моделей

Використання конкретної з відомих уже моделей чи розроблення нової для розв'язання цієї задачі обґрунтовують тим, що саме вона в якомусь сенсі в такому разі оптимальна і тому взято її за базу дослідження – планування збирання даних, розроблення алґоритмів опрацювання їх та тлумачення результатів опрацювання. Все це можливе в термінах властивостей моделі. Підкреслімо ще, що ця (як і всяка) оцінка загалом є якісною: «добра» модель чи ні, але фізики й техніки звикли до кількісних як придатних для стандартизації. Тому шукають такий критерій (показник), що його числові значення визначають умову оптимальності, бо тоді таке обґрунтування стає прозорим і не тільки за Геґелем, що кількість переходить у якість.

І виопуклення ролі задачі в ґенезі математичної моделі ставить проблему загальної концепції ефективності всіх етапів моделювання: як побудови моделі, так і ґрунтованих на ній засобів – алґоритмів і тлумачень. Відомі часткові концепції: функціоналізм соціолога Р.Парсонса, операціоналізм фізика П. Бріджмена, а загальну сформулював наш знаменитий економіст і математик Є.Слуцький (див. збірник, вказаний у посиланні [23]), запровадивши термін "праксеологія". Про неї пропаґандист і продовжувач його ідей, вихованець львівсько-варшавської школи Р. Котарбінський [24] писав, що в опублікованій у 20-х роках українською і німецькою мовою праці [23] "знайшла свій найяскравіший вираз залежність праксеологічних проблем від галузі ще загальніших досліджень із загальної теорії комплексів і подій" (див. також [25]).

Тепер ці, хоч не сформульовані явно, обставини спонукали поглянути на ефективність досліджень як на сферу дії праксеології та запровадження інновацій для ґарантування її.

У працях авторів такими інноваціями є: 1) енергетична концепція в теорії сиґналів, що перетворилась на енергетичну теорію стохастичних сиґналів, яка охоплює і теорію ритміки як стохастичних коливань і дала засоби вивчення їх у біотехнічних системах (Я. Драґан, Б. Яворський) та прихованої комунікації (Б. Яворський); 2) формалізація теорії алґоритмів, що привела до створення алґебри алґоритмів (В. Овсяк); 3) сиґнально-системна та інформаційно-ресурсна концепції як засоби інтелектуалізації технічних систем управління (Л. Сікора); 4) концепція енергоактивних об'єктів, що привела до інновацій у теорії засобів керування (М. Медиковський).

Підсумки

Матеріал статті показує, що є два варіанти обґрунтування моделі: 1) коли за математичну модель взято структуру – просту чи складну, що є поєднанням кількох, то обґрунтування її є автоматичним наслідком коректності основної (підставової) структури; 2) коли ж такої структури ще немає, то потрібно починати з формулювання постулатів – вимог, що їх мала б задовольняти потрібна математична структура, які обов'язково мусять бути піднесені до ранґу аксіом, і розвивати теорію, як і в першому випадку. Різниця буде у верифікації, бо в такому разі вона буде тільки підтвердженням доцільності вибору саме цих постулатів.

Дещо, може, завелика кількість цитувань, хоч так роблять, як показано, і знамениті математики, випливає, природно, з факту, що автори статті за походженням не є математиками, а дослідниками фізико-технічних проблем, і підсумовують погляди на математичне моделювання як метод у царинах своїх зацікавлень, тому не вважають можливим давати категоричні твердження щодо математики.

А загалом, наведений аналіз показує справедливість та істинний сенс афоризму: формули – це ще не модель, а фізика – не формули, а тлумачення формул.

Модель – формула з тлумаченням стає основою теорії, яка й визначає, що і як можна спостерігати у світі та що означатиме результат. Бо поняття факту не є незалежним від теорії. Навіть традиційна вимога до теорії – відповідність її фактам не змінює справи. Як пише відомий наш фізик-теоретик А. Свідзинський [26]: "Лише враховуючи, окрім раціональних, інтуїтивні, естетичні та інші подібні арґументи, наукова спільнота зрештою виносить вердикт теорії, постійно зберігаючи готовність, у разі потреби, до її перегляду. При цьому нова фізична теорія здобуває визнання й утверджується, як правило, значно раніше, ніж вона виявить усі свої можливості та задемонструє вирішальні переваги над старою. На цьому ранньому етапі її розвитку «аванс довіри» видається їй найпроникливішими дослідниками, які керуються радше інтуїцією і тонким відчуттям перспективности нових ідей, аніж суто раціональними арґументами". Ця думка підкреслює складність проблем і роль творчих фахівців у розвої науки, їхніх переконань "як обгрунтованої віри" [26]. А вона вже визнає потрібність нових понять і математичних засобів (пор. [11, 16, 27).

1. Словник іноземних слів / За ред. О.С. Мельничука. – К.: Гол. ред. укр. рад. енцикл., АН УРСР, 1974. – 776 с. 2. Merriam – Websters dictionary, 10th edition – Springfield, Massachusetts, USA: Merriam – Webster, Inc., 1993. – 1559 p. 3. Математическая энциклопедия. Т. 3 – М.: Сов. энцикл., 1982. – 1184 с. 4. Математическая энциклопедия. Т. 2 – М.: Сов. энцикл., 1979. – 1104 с. 5. Фейнман Р. КЭД – странная теория света и вещества. – М.: Наука, 1988. – 144 с. 6.Дорошевський В. Про тлумачення значень слів у словниках // Мовознавство. – 1970. – № 5. – С. 10–20. 7. Драґан Я., Медиковський М., Овсяк В., Сікора Л., Яворський Б. Концепції математичної моделі і праксеології в теорії сиґналів і систем // Тези доповідей конференції до 70-річчя Б. Попова. – Львів: Вид-во Фізико-механічного ін-ту НАНУ, 2010. 8. Бурбаки Н. Архитектура математики. Математика или математики? // Бурбаки Н. Очерки по истории математики. – М.: ИИЛ, 1963 – С. 245–259. 9. Пуанкаре А. Математические открытия // Математики о математике. – М.: Знание, 1967. – С. 24–32. 10. Гнеденко Б.В. Об истоках нового в математике // Современная культура и математика. – М.: Знание, 1975. – С. 35–51. 11. Степин В.С. Становление научной теории. – Минск: Изд-во Белгос. ун-та, 1976. – 319 с. 12. Адамар Ж. Исследование психологии процесса изобоетения в *области математики. – М.: Сов. радио, 1970. – 152 с. 13. Франко І.Я. З секретів поетичної творчості. – К.: Рад. письменник, 1969. – 191 с. 14. Математика серед наук / В. Левицький, М. Зарицький, І. Свєнціцкий. – Львів: Сп. діло, 1927 – 58 с. 15. Новіков Л.О., Скоробогатько В.Я. Методи математики: розвиток, застосування, відлуння. – Львів: Слово і комерція, 1995. – 219 с. 16. Драґан Я., Сікора Л., Яворський Б. Основи сучасної теорії сиґналів: енергетична концепція, математичний апарат, фізичне тлумачення. – Львів: Центр стратегічних досліджень еко-біотехнічних систем, 1999. – 133 с. 17. Ovsyak V.K. Computation models and algebra of algorithms // Вісник нац. ун-ту "Львівська політехніка". – 2008. – № 621: Інформаційні системи та мережі. – С. 3–18. 18. Ивс Г., Ньюсом К.В. О математической логике и философии математики. – М.: Знание, 1968. – 48 с. 19. Харди Г.Г. Исповедь математика // Математики о математике. – М.: Знание, 1967. – С. 4–14. 20. Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика. Основание математики. – М.: Мир, 1998. – 703 с. 21. Пуанкаре А. О науке. – М.: Наука, 1983. – 560 с. 22. Попа К. Теория определения. – М.: Прогресс, 1976. – 246 с. 23. Слуцький Є. Етюд до проблеми будування формально-праксеологічних засад економіки // Записки соціально-економічного відділу Української академії наук. – 1926. – Т. 4. – С. 165–175. (див. передрук у збірнику: Є. Слуцький. Творча спадщина з погляду сучасності. – К.: Знання, 2007. – С. 678–693). 24. Kotarbiński T. Abecadło praktyczności. – W.: Wiedza powszechna, 1972. – 87 s. 25. Злупко С.М. Основоположник праксеології // Аксіоми для нащадків. Українські імена у світовій науці. Зб. нарисів / Упоряд. О.К. Романчук. – Львів: Вид-во Меморіал, 1992. – 544 с. – С.465 – 487. 26. Свідзинський А. Самоорганізація і культура. – К.: Вид-во ім. Олени Теліги, 1999. – 256 с. 27. Свідзинський А. Математичні методи теоретичної фізики. – К.: Вид-во ім. Олени Теліги, 1998. – 442 с.*

УДК 519.16

Р.П. Базилевич, Р.К. Кутельмах, Б. Кузь
Національний університет “Львівська політехніка”,
кафедра програмного забезпечення

АЛГОРИТМ РОЗВ’ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ КОМІВОЯЖЕРА ВЕЛИКОЇ РОЗМІРНОСТІ МЕТОДОМ “ТОРА”

Запропоновано метод об’єднання часткових розв’язків, отриманих для локальних областей, утворених кластеризацією робочого поля для задачі комівояжера в загальний розв’язок. Метод зменшує затрати часу на пошуки розв’язку для задач великих та надвеликих розмірностей із незначними втратами якості, порівняно з результатами, отриманими за допомогою найкращих евристичних алгоритмів.

Ключові слова: задача комівояжера, комбінаторна оптимізація

Article describes approach to forming TSP solution from partial results. Approach reduces the cost of time to find solution for large size problems with small quality losses with comparison by the best heuristic algorithms.

Keywords – traveling salesman problem, combinatorial optimization

Вступ

Задача комівояжера належить до складних класу NP. Для задач великих та надвеликих розмірностей важко найти точний розв’язок. Для розв’язання таких задач використовують евристичні алгоритми, які дають змогу знайти розв’язок, наближений до оптимального. Із збільшенням розмірності множини даних істотно зростає час виконання алгоритму. В зв’язку з цим