

## НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ НЕРАЗРЕЗНЫХ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ БАЛОК, ЛЕЖАЩИХ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

© Ковров А.В., Синюкина Т.А., 2010

Предложена методика определения напряженно-деформированного состояния неразрезных железобетонных балок, лежащих на упругом основании с учетом переменной жесткости, основанная на численно-аналитическом варианте метода граничных элементов. Выполнен сравнительный анализ результатов расчетов с данными, полученными при помощи расчетов методом конечных элементов с использованием ПК "Lira".

**Ключевые слова:** напряженно-деформированное состояние, метод граничных элементов, метод конечных элементов.

The paper is considered the method of determination of tensely-deformed state of continuous reinforced concrete beams on elastic foundation with application of the numerically-analitical variant of the boundary elements method. A comparative analysis of simulation results with data obtained using the calculation of PC Lira.

**Keywords:** tensely-deformed state, boundary elements method, finite elements method.

**Актуальность исследований.** Сегодня для расчетов конструкций широко применяется метод конечных элементов. В то же время численный расчет методом конечных элементов содержит целый ряд сложностей и условностей при моделировании отдельных железобетонных элементов. Требуется развитие и совершенствование упрощенных моделей для расчета конструкций, отражающих физический характер их работы, в связи с чем разработка методики расчета неразрезных железобетонных балок на упругом основании с учетом жесткости переменной по длине, основанной на численно-аналитическом варианте метода граничных элементов, позволяющей исследовать работу балок вплоть до предельного состояния и соответствующей физическому характеру их работы, является актуальной задачей.

**Цель работы.** Разработать методику расчета неразрезных железобетонных балок переменной жесткости, лежащих на упругом основании, при помощи численно-аналитического варианта метода граничных элементов.

**Результаты теоретических исследований.** Дифференциальное уравнение изгиба балки постоянного поперечного сечения на упругом основании с моделью Винклера имеет вид:

$$B \frac{d^4 v(x)}{dx^4} + kbv(x) = q(x); \quad (1)$$

где  $B$  – жесткость балки, кНм<sup>2</sup>, которая в упругой стадии равна произведению  $EI$ ;  $v(x)$  – прогиб балки, м;  $k$  – коэффициент постели, кН/м<sup>3</sup>;  $b$  – ширина подошвы стержня, м;  $q(x)$  – поперечная нагрузка, кН/м.

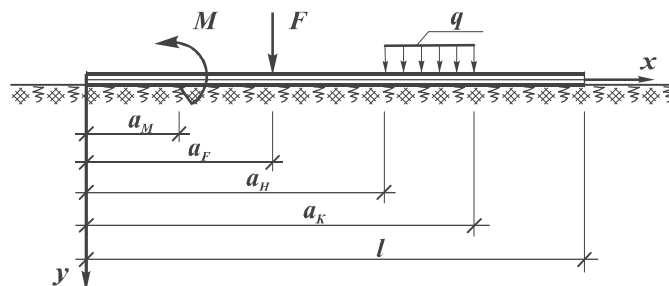


Рис. 1. Положительные направления приложенных воздействий

На рис. 1 приведены положительные направления внешних воздействий  $M_i$ ,  $F_i$  и  $q_i$  и соответствующие обозначения, принятые в численно-аналитическом варианте метода граничных элементов.

Для определения перемещений и внутренних усилий в стержне используются дифференциальные зависимости:

$$EI\varphi(x) = \lambda EI \frac{dv(x)}{dx}; \quad M(x) = -\lambda^2 EI \frac{d^2v(x)}{dx^2}; \quad Q(x) = -\lambda^3 EI \frac{d^3v(x)}{dx^3}. \quad (2)$$

здесь параметр  $\lambda$  определяется выражением

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{kb}{4B}}, \quad \left[ \frac{1}{m} \right]. \quad (3)$$

Интегрирование выражения (1) приводит к системе уравнений, обобщая которую на действие системы сосредоточенных сил, моментов и распределенных нагрузок, получим:

$$\begin{aligned} EIv(x) &= A_{11}(\lambda, x)EIv(0) + A_{12}(\lambda, x)EI\varphi(0) + \sum_{i=1}^n \Big|_{a_i} M_i A_{13}(\lambda, x - a_i) + \\ &+ \sum_{i=1}^n \Big|_{b_i} F_i A_{14}(\lambda, x - b_i) + \sum_{i=1}^n \Big|_{c_i} q_i A_{15}(\lambda, x - c_i) - \Big|_{d_i} q_i A_{15}(\lambda, x - d_i) \Big|; \\ EI\varphi(x) &= A_{21}(\lambda, x)EIv(0) + A_{11}(\lambda, x)EI\varphi(0) + \sum_{i=1}^n \Big|_{a_i} M_i A_{12}(\lambda, x - a_i) + \\ &+ \sum_{i=1}^n \Big|_{b_i} F_i A_{13}(\lambda, x - b_i) + \sum_{i=1}^n \Big|_{c_i} q_i A_{14}(\lambda, x - c_i) - \Big|_{d_i} q_i A_{14}(\lambda, x - d_i) \Big|; \\ M(x) &= -A_{31}(\lambda, x)EIv(0) - A_{21}(\lambda, x)EI\varphi(0) - \sum_{i=1}^n \Big|_{a_i} M_i A_{11}(\lambda, x - a_i) - \\ &- \sum_{i=1}^n \Big|_{b_i} F_i A_{12}(\lambda, x - b_i) - \sum_{i=1}^n \Big|_{c_i} q_i A_{13}(\lambda, x - c_i) - \Big|_{d_i} q_i A_{13}(\lambda, x - d_i) \Big|; \\ Q(x) &= -A_{41}(\lambda, x)EIv(0) - A_{31}(\lambda, x)EI\varphi(0) - \sum_{i=1}^n \Big|_{a_i} M_i [-4\lambda^4 A_{14}(\lambda, x - a_i)] - \\ &- \sum_{i=1}^n \Big|_{b_i} F_i A_{11}(\lambda, x - b_i) - \sum_{i=1}^n \Big|_{c_i} q_i A_{12}(\lambda, x - c_i) - \Big|_{d_i} q_i A_{12}(\lambda, x - d_i) \Big|. \end{aligned} \quad (4)$$

В системе уравнений (4) через  $A_{11}(\lambda, x)$ ,  $A_{12}(\lambda, x)$ ,  $A_{13}(\lambda, x)$ ,  $A_{14}(\lambda, x)$ ,  $A_{21}(\lambda, x)$ ,  $A_{31}(\lambda, x)$ ,  $A_{41}(\lambda, x)$ ,  $A_{15}(\lambda, x)$  обозначены фундаментальные функции Крылова:

$$\begin{aligned} A_{11}(\lambda, x) &= ch\lambda x \cos \lambda x; \\ A_{12}(\lambda, x) &= (ch\lambda x \sin \lambda x + sh\lambda x \cos \lambda x); \\ A_{13}(\lambda, x) &= \frac{1}{2\lambda^2} sh\lambda x \sin \lambda x; \\ A_{14}(\lambda, x) &= \frac{1}{4\lambda^3} (ch\lambda x \sin \lambda x - sh\lambda x \cos \lambda x); \\ A_{21}(\lambda, x) &= -\lambda (ch\lambda x \sin \lambda x - sh\lambda x \cos \lambda x); \\ A_{31}(\lambda, x) &= -2\lambda^2 sh\lambda x \sin \lambda x; \\ A_{41}(\lambda, x) &= -2\lambda^3 (ch\lambda x \sin \lambda x + sh\lambda x \cos \lambda x); \\ A_{15}(\lambda, x) &= \frac{1}{4\lambda^4} [H(\lambda x) - ch\lambda x \cos \lambda x]. \end{aligned} \quad (5)$$

В выражениях (4), (5) используется функция Хевисайда (функция-прерыватель):

$$\Big|_a = H(x - a) = \begin{cases} 0, & x < a; \\ 1, & x \geq a. \end{cases} \quad (6)$$

Функции  $v(x)$ ,  $\varphi(x)$ ,  $M(x)$ ,  $Q(x)$  – соответственно прогиб, угол поворота, изгибающий момент и поперечная сила в сечении на расстоянии  $x$  от начала координат.

Значения  $v(0)$ ,  $\varphi(0)$ ,  $M(0)$ ,  $Q(0)$  – соответственно прогиб, угол поворота, изгибающий момент и поперечная сила в начале координат ( $x = 0$ ), которые принято называть начальными параметрами.

Систему уравнений (4) представим в матричном виде:

$$Y = A X(0) + B \quad (7)$$

где  $Y$  – матрица усилий и перемещений в произвольном сечении;  $A$  – матрица коэффициентов системы уравнений изгиба (матрица фундаментальных функций);  $X(0)$  – матрица усилий и перемещений в начале координат (матрица начальных параметров);  $B$  – матрица внешней нагрузки, каждый элемент которой может быть сформирован при помощи метода начальных параметров по методике, изложенной в [2].

$$Y = \begin{bmatrix} EIv(x) \\ EI\varphi(x) \\ M(x) \\ Q(x) \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & -A_{13} & -A_{14} \\ A_{21} & A_{11} & -A_{12} & -A_{13} \\ -A_{31} & -A_{21} & A_{11} & A_{12} \\ -A_{41} & -A_{31} & A_{21} & A_{11} \end{bmatrix} \quad X(0) = \begin{bmatrix} EIv(0) \\ EI\varphi(0) \\ M(0) \\ Q(0) \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} B_{11}(x) \\ B_{21}(x) \\ -B_{31}(x) \\ -B_{41}(x) \end{bmatrix} \quad (8)$$

Начальные параметры определяются из граничных условий: условий опирания и уравнений равновесия. Элементы вектора внешней нагрузки  $B$  можно сформировать при помощи метода начальных параметров:

$$\begin{aligned} B_{11} &= \sum_{i=1}^n \left|_{a_i} M_i A_{13}(\lambda, x - a_i) + \sum_{i=1}^n \left|_{b_i} F_i A_{14}(\lambda, x - b_i) + \sum_{i=1}^n \left|_{c_i} q_i A_{15}(\lambda, x - c_i) - \sum_{i=1}^n \left|_{d_i} q_i A_{15}(\lambda, x - d_i) \right.; \right. \\ B_{21} &= \sum_{i=1}^n \left|_{a_i} M_i A_{12}(\lambda, x - a_i) + \sum_{i=1}^n \left|_{b_i} F_i A_{13}(\lambda, x - b_i) + \sum_{i=1}^n \left|_{c_i} q_i A_{14}(\lambda, x - c_i) - \sum_{i=1}^n \left|_{d_i} q_i A_{14}(\lambda, x - d_i) \right.; \right. \quad (9) \\ B_{31} &= \sum_{i=1}^n \left|_{a_i} M_i A_{11}(\lambda, x - a_i) + \sum_{i=1}^n \left|_{b_i} F_i A_{12}(\lambda, x - b_i) + \sum_{i=1}^n \left|_{c_i} q_i A_{13}(\lambda, x - c_i) - \sum_{i=1}^n \left|_{d_i} q_i A_{13}(\lambda, x - d_i) \right.; \right. \\ B_{41} &= \sum_{i=1}^n \left|_{a_i} M_i [-4\lambda^4 A_{14}(\lambda, x - a_i)] + \sum_{i=1}^n \left|_{b_i} F_i A_{11}(\lambda, x - b_i) + \sum_{i=1}^n \left|_{c_i} q_i A_{12}(\lambda, x - c_i) - \sum_{i=1}^n \left|_{d_i} q_i A_{12}(\lambda, x - d_i) \right.; \right. \end{aligned}$$

Рассматривая неразрезную балку в виде системы из  $n$  составных стержней, сочленённых в местах приложения неизвестных воздействий (реакций опор), приходим к решению краевой задачи, количество уравнений которой равно  $4n$ . Систему уравнений можно рассматривать в виде:

$$Y(i) = A(i) X(0) + B(i), \quad (10)$$

где  $Y(i)$  – вектор усилий и перемещений в конце локальной системы координат  $i$ -го участка балки;  $A(i)$  – матрица коэффициентов;  $X(0)$  – вектор усилий и перемещений в начале локальной системы координат  $i$ -го участка балки;  $B(i)$  – вектор внешней нагрузки, действующей на  $i$ -й участок.

Размеры матриц зависят только от количества участков стержня. Вид матриц зависит от наличия и размещения консолей неразрезной балки.

Авторами выполнены исследования закономерностей формирования матриц для различных видов балок, с учетом характерной для численно-аналитического варианта МГЭ цепочки преобразований:

$$A(i) X(0) - Y(i) = -B(i) \Rightarrow A^* X^* = -B(i). \quad (11)$$



В результате решения уравнения краевой задачи вычисляется вектор граничных параметров  $X^*$ .

Рассмотрим методику расчета на примере неразрезной железобетонной балки на упругом основании с переменной жесткостью (рис. 2).

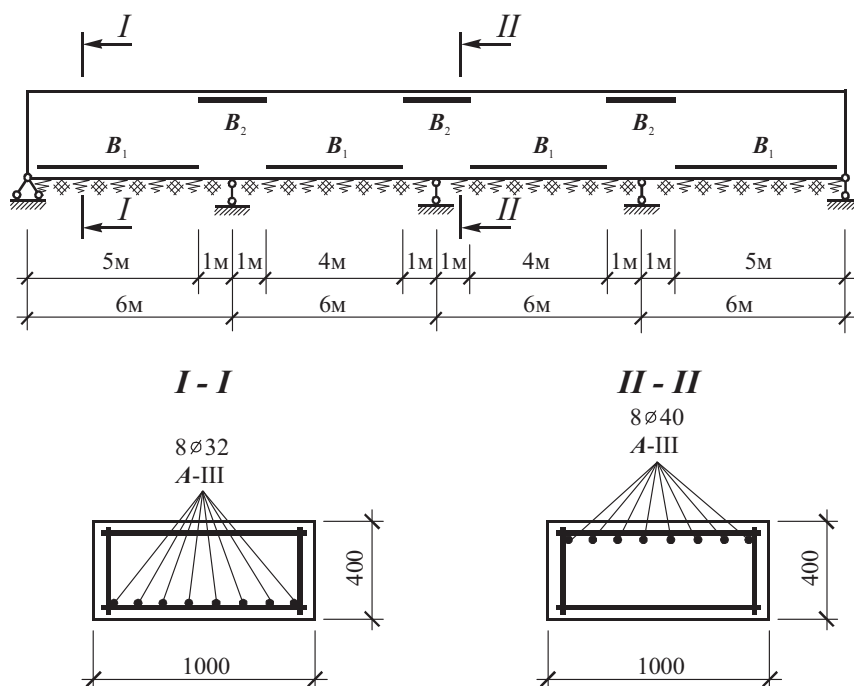


Рис. 2. Схема неразрезной железобетонной балки на упругом основании

Рассчитываемая балка содержит участки, имеющие различные жесткости в пролете  $B_1$  и на опоре  $B_2$ .

Расчетная схема балки содержит 10 локальных участков с постоянной жесткостью.

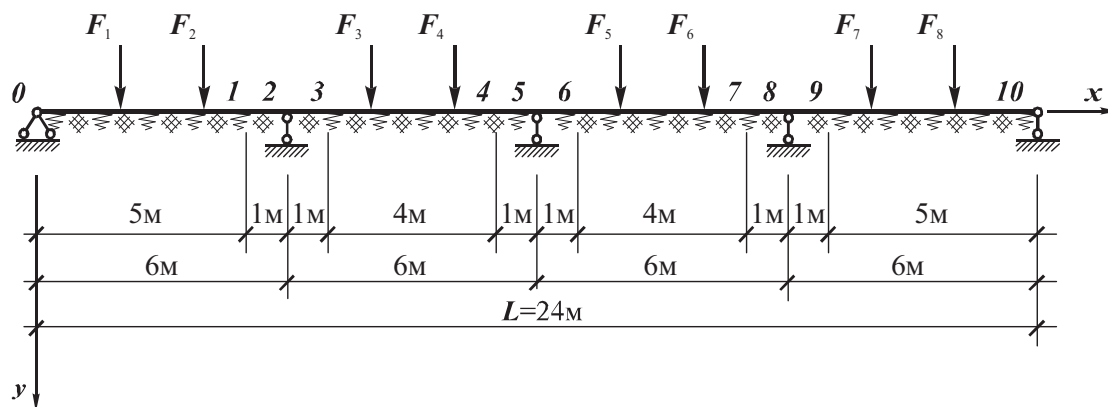


Рис. 3. Расчетная схема балки

Исходные данные для расчета балки:

$$k = 10000 \text{ кН/м}^2; E_b = 2,7 \cdot 10^7 \text{ кН/м}^2; E_s = 20 \cdot 10^7 \text{ кН/м}^2; F_i = 100,0 \text{ кН}.$$

Жесткость железобетонной балки  $B$  в стадии деформирования без трещин определяется по формуле:

$$B = E_{bI} I_{red}, \quad (14)$$

где  $E_{bI}$  – модуль деформации бетона;  $I_{red}$  – момент инерции приведенного поперечного сечения элемента.

Жесткости балки равны:  $B_1 = 177283,97 \text{ кН м}^2$ ,  $B_2 = 190262,89 \text{ кН м}^2$ .

С учетом переменной жесткости матрица неизвестных параметров  $X^*$  принимает вид:

$$X^* = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & Q^{1-2}(l_2) \\ \hline 2 & EI_1 \varphi^{0-1}(0) \\ \hline 3 & Q^{4-5}(l_5) \\ \hline 4 & Q^{0-1}(0) \\ \hline 5 & EI_2 v^{1-2}(0) = n_1 EI_1 v^{0-1}(l_1) \\ \hline 6 & EI_2 \varphi^{1-2}(0) = n_1 EI_1 \varphi^{0-1}(l_1) \\ \hline 7 & M^{1-2}(0) \\ \hline 8 & Q^{1-2}(0) \\ \hline 9 & Q^{7-8}(l_8) \\ \hline 10 & EI_2 \varphi^{2-3}(0) \\ \hline 11 & M^{2-3}(0) \\ \hline 12 & Q^{2-3}(0) \\ \hline 13 & EI_3 v^{3-4}(0) = n_2 EI_2 v^{2-3}(l_3) \\ \hline 14 & EI_3 \varphi^{3-4}(0) = n_2 EI_2 \varphi^{2-3}(l_3) \\ \hline 15 & M^{3-4}(0) \\ \hline 16 & Q^{3-4}(0) \\ \hline 17 & EI_4 v^{4-5}(0) = n_3 EI_3 v^{3-4}(l_4) \\ \hline 18 & EI_4 \varphi^{4-5}(0) = n_3 EI_3 \varphi^{3-4}(l_4) \\ \hline 19 & M^{4-5}(0) \\ \hline 20 & Q^{4-5}(0) \\ \hline 21 & EI_7 \varphi^{9-10}(l_{10}) \\ \hline 22 & EI_4 \varphi^{5-6}(0) \\ \hline 23 & M^{5-6}(0) \\ \hline 24 & Q^{5-6}(0) \\ \hline 25 & EI_5 v^{6-7}(0) = n_4 EI_4 v^{5-6}(l_6) \\ \hline 26 & EI_5 \varphi^{6-7}(0) = n_4 EI_4 \varphi^{5-6}(l_6) \\ \hline 27 & M^{6-7}(0) \\ \hline 28 & Q^{6-7}(0) \\ \hline 29 & EI_6 v^{7-8}(0) = n_5 EI_5 v^{6-7}(l_7) \\ \hline 30 & EI_6 \varphi^{7-8}(0) = n_5 EI_5 \varphi^{6-7}(l_7) \\ \hline 31 & M^{7-8}(0) \\ \hline 32 & Q^{7-8}(0) \\ \hline 33 & Q^{9-10}(l_{10}) \\ \hline 34 & EI_6 \varphi^{8-9}(0) \\ \hline 35 & M^{8-9}(0) \\ \hline 36 & Q^{8-9}(0) \\ \hline 37 & EI_7 v^{9-10}(0) = n_6 EI_6 v^{8-9}(l_9) \\ \hline 38 & EI_7 \varphi^{9-10}(0) = n_6 EI_6 \varphi^{8-9}(l_9) \\ \hline 39 & M^{9-10}(0) \\ \hline 40 & Q^{9-10}(0) \\ \hline \end{array} \quad (15)$$

Для приведения перемещений к одному масштабу жесткости введены отношения:

$$n_i = \frac{B_{i+1}}{B_i}; \quad N_i = \frac{1}{n_i}. \quad (16)$$

В результате выполненных преобразований матрица коэффициентов  $A^*$  примет вид:

(17)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40				
1	$A_{12}$	$-A_{14}$	$-N_1$																																									
2	$A_{11}$	$-A_{13}$		$-N_1$																																								
3	$-A_{21}$	$A_{22}$					$-1$																																					
4	$-A_{31}$	$A_{32}$						$-1$																																				
5					$A_{11}$	$A_{12}$	$-A_{13}$	$-A_{14}$																																				
6					$A_{21}$	$A_{22}$	$-A_{23}$	$-A_{24}$		$-1$																																		
7					$-A_{31}$	$-A_{32}$	$A_{33}$	$A_{34}$			$-1$																																	
8	$-1$				$-A_{41}$	$-A_{42}$	$A_{43}$	$A_{44}$																																				
9									$A_{12}$	$-A_{13}$	$-A_{14}$	$-N_2$																																
10									$A_{21}$	$-A_{22}$	$-A_{23}$	$-A_{24}$	$-N_2$																															
11									$-A_{31}$	$A_{32}$	$A_{33}$	$A_{34}$		$-1$																														
12									$-A_{41}$	$-A_{42}$	$A_{43}$	$A_{44}$			$-1$																													
13									$A_{11}$	$A_{12}$	$-A_{13}$	$-A_{14}$	$-N_5$																															
14									$A_{21}$	$A_{22}$	$-A_{23}$	$-A_{24}$	$-N_5$																															
15									$-A_{31}$	$-A_{32}$	$A_{33}$	$A_{34}$		$-1$																														
16									$-A_{41}$	$-A_{42}$	$A_{43}$	$A_{44}$			$-1$																													
17									$A_{11}$	$A_{12}$	$-A_{13}$	$-A_{14}$																																
18									$A_{21}$	$A_{22}$	$-A_{23}$	$-A_{24}$																																
19									$-A_{31}$	$-A_{32}$	$A_{33}$	$A_{34}$																																
20									$-A_{41}$	$-A_{42}$	$A_{43}$	$A_{44}$																																
21																																												
22																																												
23																																												
24																																												
25																																												
26																																												
27																																												
28																																												
29																																												
30																																												
31																																												
32																																												
33																																												
34																																												
35																																												
36																																												
37																																												
38																																												
39																																												
40																																												

При помощи программы, разработанной в системе компьютерной математики MatLab, определены значения усилий и перемещений, возникающих в балке (таблица). В таблице приведены результаты расчетов рассматриваемой балки при помощи комплекса “Lira”.

### Результаты расчетов балки

Корд. x, м	Изгибающий момент $M$ , кНм			Прогиб $v$ , м $\times 10^{-4}$		
	Приведенная методика	Lira	Разница, %	Приведенная методика	Lira	Разница, %
0.0	0	0	0	0	0	0
1.0	49.039	50.007	1,97	8,4949	8,4940	0,01
2.0	106.34	108.44	1,97	14,184	14,183	0,01
3.0	77.373	77.900	0,68	14,750	14,748	0,01
4.0	62.787	64.028	1,98	10,882	10,880	0,02
5.0	-41.166	-41.976	1,97	4,3620	4,3610	0,02
6.0	-140.57	-143.34	1,97	0	0	0
7.0	-45.773	-46.675	1,97	1,3289	1,3280	0,07
8.0	50.561	51.560	1,97	5,0842	5,0830	0,02
9.0	51.788	52.811	1,97	6,9041	6,9030	0,02
10.0	59.675	60.853	1,97	5,7707	5,7700	0,01
11.0	-26.903	-27.432	1,97	2,1848	2,1840	0,04
12.0	-111.18	-113.37	1,97	0	0	0
13.0	-26.903	-27.432	1,97	2,1848	2,1840	0,04
14.0	59.675	60.853	1,97	5,7707	5,7700	0,01
15.0	51.788	52.811	1,97	6,9041	6,9030	0,02
16.0	50.561	51.560	1,97	5,0842	5,0830	0,02
17.0	-45.773	-46.675	1,97	1,3289	1,3280	0,07
18.0	-140.57	-143.34	1,97	0	0	0
19.0	-41.166	-41.976	1,97	4,3620	4,3610	0,02
20.0	62.787	64.028	1,98	10,882	10,880	0,02
21.0	77.373	77.900	0,68	14,750	14,748	0,01
22.0	106.34	108.44	1,97	14,184	14,183	0,01
23.0	49.039	50.007	1,97	8,4949	8,4940	0,01
24.0	0	0	0	0	0	0

**Выводы.** В результате выполненных теоретических исследований предложена методика определения напряженно-деформированного состояния неразрезных железобетонных балок, лежащих на упругом основании с учетом переменной жесткости, основанная на численно-аналитическом варианте метода граничных элементов. Сравнительный анализ полученных данных свидетельствует о том, что результаты расчетов являются достоверными.

1. Баженов В.А., Коломиец Л.В., Оробей В.Ф. и др. *Строительная механика. Специальный курс. Применение метода граничных элементов.* – Одесса: Астропринт, 2003. – 288 с. 2. Оробей В.Ф., Ковров А.В. *Решение задач статики, динамики и устойчивости стержневых систем. Применение метода граничных элементов: Учебн. пособие.* – Одесса, 2004. – 122 с. 3. Оробей В.Ф., Ковров А.В. *Расчет балок на упругом винклеровском основании при помощи метода граничных элементов // Вісник Одеської державної академії будівництва та архітектури.* – Вип. № 16. – Одеса: ОДАБА, 2004. – С. 165–170. 4. Яременко А.Ф., Ковров А.В. *Напряженно-деформированное состояние неразрезных железобетонных балок // Автомобільні дороги і дорожнє будівництво. Науково-технічний збірник.* – Вип. 71. – К., 2004. – С. 198–205. 5. Ковров А.В. *Применение метода граничных элементов для расчета балок с переменной жесткостью // Сталезалізобетонні конструкції. Збірник наукових статей.* – Вип. 6. – Кривий Ріг, 2004. – С. 241–246.