

## ДИНАМІКА ДИСКРЕТИЗОВАНИХ СИГНАЛІВ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ КWТА-НЕЙРОННОЇ СХЕМИ

© Тимощук П., 2010

Аналізується динаміка дискретизованих сигналів математичної моделі нейронної схеми типу “K-winners-take-all” (KWTA), призначеної для ідентифікації K максимальних серед N невідомих сигналів, де  $1 \leq K < N$ . Аналіз здійснюють за допомогою використання відповідної енергетичної функції. Наведено результати комп’ютерного моделювання, які підтверджують теоретичні положення.

**Ключові слова:** нейронна схема, сигнал, енергетична функція, модель.

**Dynamics of mathematical model of discrete-time K-winners-take-all (KWTA) neural circuit that identifies K maximal among N unknown signals, where  $1 \leq K < N$ , is analyzed. The analysis is fulfilled by using corresponding energy function. Computer modeling results presented confirm theoretical statements.**

**Keywords:** energy function, model.

### 1. Вступ

Нейронні мережі типу “K-winners-take-all” (KWTA-мережі), як відомо, здійснюють вибір K серед N елементів, де  $1 \leq K < N$ , з більшими значеннями активаційних функцій, ніж у решти  $N - K$  елементів. Коли K дорівнює одиниці, KWTA-мережа є мережею типу “Winner-takes-all” (WTA-мережею), яка може розрізняти нейрон з максимальною активацією [5, 7, 8]. Вибір K найбільших елементів з множини даних N дійсних чисел є ключовою задачею мереж прийняття рішень, розпізнавання образів, пов’язаних пам’ятей і конкуруючого навчання [9, 11]. Задачі такого типу природно зустрічаються при розв’язанні задач класифікації і застосовуються для розроблення класифікаційних нейронних мереж, для розв’язання задач сортування, розпізнавання і класифікації зразків [4]. KWTA-мережі застосовуються в телекомунікації, особливо для керування пакетними перемикачами даних [1]. KWTA-механізми застосовують у машинному навчанні, зокрема, для розв’язання задач класифікації k найближчих об’єктів, кластеризації k значень та ін. [3, 6].

У статті аналізується динаміка дискретизованих сигналів математичної моделі KWTA-нейронної схеми. Термін “динамічний” пов’язується з нейронною мережею, що моделюється диференціальним рівнянням, яке визначає еволюцію змінної стану, або просто стану. Така еволюція відбувається у просторі станів дискретного часу, і функція, що описує цю еволюцію у просторі станів називається траєкторією (стану), або розв’язком. Динамічна нейронна мережа обробки дискретизованих сигналів має зворотний зв’язок, який схемотехнічно реалізується на базі часової затримки. Частковим випадком динамічної нейронної мережі є статична нейронна мережа. Термін “статична нейронна мережа” визначає нейронну мережу, що функціонує у статичному режимі. Статична нейронна мережа моделюється алгебраїчним рівнянням, тому траєкторія її розв’язку не має ніякого перехідного режиму. Статична нейронна мережа не має ніякого зворотного зв’язку.

### 2. Математична модель KWTA-нейронної схеми обробки дискретизованих сигналів

Нехай задано N дійсних чисел від  $a_1$  до  $a_N$ ,  $N > 1$ , тобто  $a_1, a_2, \dots, a_N$  як миттєвих значень невідомих вхідних сигналів і необхідно вибрати K найбільших з них, де  $1 \leq K < N$  – ненегативне ціле. Припустимо, що задані числа розподілені у відомому діапазоні  $a \in (A_{\min}, A_{\max})$ . Покладемо,

що ці числа не однакові (відрізняються між собою за значеннями) і впорядковані у спадаючому за величиною порядку так, що задовольняються нерівності

$$a_1 > a_2 > \dots > a_N, \quad (1)$$

де індекси  $1, 2, \dots, N$  у загальному випадку можуть відрізнятися від оригінальних номерів входів, означаючи, що компоненти вектора  $a = [a_1, \dots, a_N]$  – впорядковані. Побудуємо математичну модель нейронної схеми, яка обробляє вхідний вектор дискретизованих сигналів  $a$  так, що після скінченної кількості ітерацій отримуються вихідні сигнали схеми  $b = [b_1, \dots, b_N]$ , які задовольняють нерівності

$$b_i > 0, i \in 1, 2, \dots, K; b_j < 0, j \in K + 1, K + 2, \dots, N. \quad (2)$$

Нерівності (2) виражають КВТА-властивість, тобто що саме вихідні сигнали від  $b_1$  до  $b_K$  "виграють" конкуренцію і той факт, що тільки вони є позитивними компонентами вектора  $b$  свідчить про те, що вхідні сигнали від  $a_1$  до  $a_K$  є  $K$  найбільшими компонентами вектора  $a$ .

Виконаємо попередню обробку заданого вектора  $a$  вхідних сигналів, віднявши від усіх його компонентів значення  $A_{\min}$  і отримаємо додаткові сигнали

$$c_1 > c_2 > \dots > c_N, \quad (3)$$

де  $c_n = a_n - A_{\min}$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ . Неважко побачити, що сигнали (3) знаходяться у діапазоні  $(0, A)$ , де  $A = A_{\max} - A_{\min} > 0$ , тобто  $c \in (0, A)$ , де  $c = [c_1, c_2, \dots, c_N]$ . Оскільки вхідні сигнали (1) не однакові і розподілені у відомому діапазоні, то сигнали (3) також різні і обмежені в діапазоні  $(0, A)$ . Отже, для будь-яких  $1 \leq K < N$  існують такі значення  $x \in \mathfrak{R}$ , які задовольняють нерівності

$$c_i > x, i \in 1, 2, \dots, K; c_j < x, j \in K + 1, K + 2, \dots, N. \quad (4)$$

Віднімання  $x$  від (4) дає

$$c_i - x > 0, i \in 1, 2, \dots, K; c_j - x < 0, j \in K + 1, K + 2, \dots, N. \quad (5)$$

Як можна побачити з (5), сигнали  $c_n - x$ , де  $n = 1, 2, \dots, N$ , володіють КВТА-властивістю. Тому такі сигнали можуть бути використані, як вихідні сигнали моделі КВТА-нейронної схеми, тобто можна записати рівності

$$b_i = c_i - x, i \in 1, 2, \dots, K; b_j = c_j - x, j \in K + 1, K + 2, \dots, N. \quad (6)$$

Для побудови моделі КВТА-нейронної схеми необхідно розробити процедуру знаходження значення скалярного динамічного зсуву вхідних сигналів  $x$ , який задовольняє нерівності (4). Використаємо для цього вимогу, що такий зсув у встановленому режимі повинен знаходитись у діапазоні  $(0, A)$ . Спроекуємо траєкторію дискретного часу  $x^{(k)}$ , де  $k = 1, 2, \dots, m$  – кількість ітерацій до досягнення встановленого режиму, яка може перетнути весь діапазон  $(0, A)$ . Нехай така траєкторія буде розв'язком відповідного різницевого рівняння  $x^{(k+1)} = \varphi(x^{(k)})$  з початковою умовою  $x^{(1)}$ , де  $\varphi(x^{(k)})$  – певна функція, яка повинна бути визначена. Припустимо, що у деякий момент дискретного часу  $t^{(m)}$  змінна  $x^{(k)}$  набуває у встановленому режимі значення  $x^{(k)} = x^{(m)}$ , яке задовольняє нерівність (4). Для зупинки обчислювального процесу у момент  $t^{(m)}$  визначимо наступну умову, яка керує кількістю переможців і переможених у кожній дискретній часовій точці протягом обчислювального процесу:

$$R(x^{(k)}) = 2K - N - \sum_{n=1}^N \text{sgn}(b_n^{(k)}), \quad (7)$$

де  $R(x^{(k)})$  –  $k$ -те дискретне значення нев’язки,  $b_n^{(k)} = c_n - x^{(k)}$  – значення  $n$ -го вихідного сигналу моделі на  $k$ -й ітерації:

$$\text{sgn}(b_n^{(k)}) = \begin{cases} 1, & \text{if } b_n^{(k)} > 0; \\ 0, & \text{if } b_n^{(k)} = 0; \\ -1, & \text{if } b_n^{(k)} < 0 \end{cases} \quad (8)$$

– сигнум (жорсткообмежувальна) функція,  $\sum_{n=1}^N \text{sgn}(b_n^{(k)})$  – різниця між дійсними кількостями переможців і переможених. Сигнум-функція виконує порівняння між  $k$ -м дискретним значенням  $n$ -го вихідного сигналу  $b_n^{(k)}$  і нулем. Якщо  $b_n^{(k)} > 0$ , тоді  $n$ -на сигнум-функція забезпечує вихідний сигнал  $\text{sgn}(b_n^{(k)}) = 1$ , якщо  $b_n^{(k)} = 0$ , тоді вихідний сигнал  $n$ -ї сигнум-функції  $\text{sgn}(b_n^{(k)}) = 0$ , інакше  $\text{sgn}(b_n^{(k)}) = -1$ .

Визначатимемо динамічний зсув  $x^{(k)}$  за допомогою такого рекурсивного алгоритму:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \Delta x^{(k)}, \quad (9)$$

де  $\Delta x^{(k)} = \text{sgn}(R(x^{(k)}))\alpha^k$ ,  $\alpha$  – параметр, який гарантує збіжність алгоритму до КВТА-розв’язку;  $0 \leq x^{(1)} \leq A$  – початкова умова;  $m$  – число ітерацій до досягнення збіжності пошуковим процесом встановленого режиму.

### 3. Динаміка дискретизованих сигналів математичної моделі КВТА-нейронної схеми

Розглянемо динаміку дискретизованих сигналів математичної моделі КВТА-нейронної схеми, яка описується різницеvim рівнянням (9) і рівностями (6). Для цього сформулюємо наступну лему.

*Лема.* Енергетична функція  $|R(x^{(k)})|$ , де  $k = 1, 2, \dots, m$  є монотонно спадною до нуля функцією дискретного часу для кожного  $0 < \alpha < 1$  і для будь-якого  $0 \leq x^{(1)} \leq A$ .

*Доведення.* Нехай початковою точкою буде  $x^{(1)} = A$ . Тоді вихідні сигнали набувають значення  $b_n^{(1)} = c_n - x^{(1)} < 0$  для кожного  $n = 1, 2, \dots, N$  і функція  $R(x^{(k)})$  набуває значення  $2K - N - \sum_{n=1}^N \text{sgn}(b_n^{(1)}) = 2K > 0$ . Тому у цій точці траєкторія розв’язку описується різницеvim рівнянням  $x^{(k+1)} = x^{(k)} - A\alpha^k$ , і зсув  $x^{(k)}$  буде експоненціально зменшуватись. У точці  $x^{(1)} = c_1$ , де  $c_1$  є максимальним вхідним сигналом згідно з (3), значення вихідних сигналів  $b_1^{(1)} = c_1 - x^{(1)} = 0$  і значення вихідних сигналів  $b_j^{(1)} < 0$ ,  $j = 2, 3, \dots, N$  відповідно до (5) і (6). Тому функція  $R(x^{(k)})$  набуває значення  $2K - N - \sum_{n=1}^N \text{sgn}(b_n^{(1)}) = 2K - 1 > 0$ , і зсув  $x^{(k)}$  буде продовжувати експоненціально спадати згідно з рівнянням  $x^{(k+1)} = x^{(k)} - A\alpha^k$ . В інтервалі  $c_1 > x^{(1+1)} > c_2$ , де  $c_2$  – другий найбільший вхідний сигнал, вихідний сигнал  $b_1^{(1+1)} = c_1 - x^{(1+1)} > 0$  і решта вихідних сигналів  $b_j^{(1+1)} = c_j - x^{(1+1)} < 0$ ,  $j = 2, 3, \dots, N$ . У цьому інтервалі функція  $R(x^{(k)})$  отримує значення  $2K - N - \sum_{k=1}^N \text{sgn}(b_n^{(1+1)}) = 2K - 2 > 0$  ф так далі, поки задовольняється рівність  $R(x^{(1+1)}) = 0$ , тобто якщо  $K \neq 1$ . Інакше, якщо  $K = 1$  і тому  $R(x^{(1+1)}) = 0$ , тоді рівняння (9) набуває вигляду форму  $x^{(k+1)} = x^{(k)}$  і зсув  $x^{(k)}$  надалі не змінюється, зберігаючи постійне значення  $x^{(k+1)} = x^{(m)}$ . У

результаті такої динаміки функція  $R(x^{(k)})$  послідовно отримує ненегативні значення  $2K, 2K-1, 2K-2, \dots, 0$ . Це означає, що функція  $|R(x^{(k)})| = R(x^{(k)})$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$  у цьому випадку є монотонно спадною до нуля для кожного  $0 < \alpha < 1$ .

Якщо початкова точка  $x^{(1)} = 0$ , то вихідні сигнали набувають значення  $b_n^{(1)} = c_n - x^{(1)} > 0$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ . Функція  $R(x^{(k)})$  набуває значення  $2K - N - \sum_{n=1}^N \text{sgn}(b_n^{(1)}) = 2K - 2N < 0$ . Тому різницеве рівняння (9) набуває у цій точці форми  $x^{(k+1)} = x^{(k)} + A\alpha^k$ , і зсув  $x^{(k)}$  експоненціально зростатиме. У точці  $x^{(q)} = c_N$ , де  $c_N$  – найменший вхідний сигнал відповідно до (3), вихідний сигнал  $b_N^{(q)} \in b_N^{(q)} = c_N - x^{(q)} = 0$  і вихідні сигнали  $b_j^{(q)}$ ,  $j = 1, 2, \dots, N-1 \in b_j^{(q)} > 0$  згідно з (5) і (6). Тому функція  $R(x^{(k)})$  пробігає значення  $2K - N - \sum_{n=1}^N \text{sgn}(b_n^{(q)}) = 2K - 2N + 1 < 0$ , і зсув  $x^{(k)}$  продовжує експоненціально зростати відповідно до рівняння  $x^{(k+1)} = x^{(k)} + A\alpha^k$ . У діапазоні  $c_N < x^{(q+1)} < c_{N-1}$ , де  $c_{N-1}$  є другим найменшим вхідним сигналом, вихідні сигнали  $b_N^{(q+1)} = c_N - x^{(q+1)} < 0$  і решта вихідних сигналів  $b_j^{(q+1)} = c_j - x^{(q+1)} > 0$ ,  $j = 1, 2, \dots, N-1$ . У цьому діапазоні функція  $R(x^{(k)})$  набуває значення  $R(x) = 2K - N - \sum_{k=1}^N \text{sgn}(b_n^{(q+1)}) = 2K - 2N + 2 < 0$  і так далі, якщо тільки не задовольняється рівність  $R(x^{(q+1)}) = 0$ , тобто  $K \neq N-1$ . Інакше, якщо  $K = N-1$  і тому  $R(x^{(q+1)}) = 0$ , то рівняння (9) трансформується до вигляду  $x^{(k+1)} = x^{(k)}$ , і зсув  $x^{(k)}$  не змінюється надалі, набуваючи постійних значень  $x^{(k)} = x^{(m)}$ . У результаті такої динаміки функція  $R(x^{(k)})$  поступово набуває неопозитивних значень  $2K-2N, 2K-2N+1, 2K-2N+2, \dots, 0$ . Тому у цьому випадку функція  $|R(x^{(k)})| = -R(x^{(k)})$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$  є монотонно спадною до нуля для кожного  $0 < \alpha < 1$ .

Отже, енергетична функція  $|R(x^{(k)})|$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$  є монотонно спадною до нуля функцією дискретного часу для кожного  $0 \leq x^{(1)} \leq A$  і для кожного  $0 < \alpha < 1$ . ■

Щоби модель, яка описується різницеvim рівнянням (9) і рівностями (6), знаходила  $K$  переможців, повинні задовольнятися нерівності  $A\alpha^m < c_K - c_{K+1}$ . Взяти логарифм від останньої нерівності за основу  $\alpha$  для  $0.5 < \alpha < 1$ , можна отримати наступну нижню границю для кількості ітерацій траєкторій розв'язків рівняння (9) для досягнення збіжності:

$$m > \log_{\alpha} \frac{c_K - c_{K+1}}{A}. \quad (10)$$

Права частина рівняння (10) є скінченною для кожного  $c_K - c_{K+1} \neq 0$ , тобто для кожного вхідного сигналу, який можна розрізнити. Алгоритм, що описується різницеvim рівнянням (9) і рівностями (6), має логарифмічну швидкість збіжності, як це впливає з (10).

Зазначимо, що коли необхідно ідентифікувати  $K$  переможців у випадку, коли  $k$ -й найбільший і  $(k+1)$ -й найбільший сигнали відрізнити тяжко, тобто якщо діапазон  $[c_{k+1}, c_k]$  є дуже малим, то кількість ітерацій  $m$ , необхідних для того, щоб змінна  $x^{(k)}$  потрапила у цей діапазон, буде скінченною, але може бути дуже великою. Однак, властивість монотонності і спадання до нуля енергетичної функції дискретного часу  $|R(x^{(k)})|$  спільно з логарифмічною швидкістю збіжності алгоритму, що описується

різницею рівнянням (9) і рівністю (6), приводить до знаходження  $K-1$  переможців після значно меншої, ніж  $m$  кількості ітерацій, якщо проміжок  $[c_K, c_{K-1}]$  є не дуже вузьким.

Використовуючи (10), можна встановити, що для досягнення умови  $R(x^{(k)})=0$  не більше, ніж за  $m$  ітерацій для будь-яких заданих вхідних сигналів  $a_n, n=1,2,\dots,N$ , повинно бути задано значення коефіцієнта загасання

$$\alpha > m \sqrt{\frac{c_K - c_{K+1}}{A}}. \quad (11)$$

Період повторення вхідних сигналів  $a_n, n=1,2,\dots,N$ , які можуть оброблятися коректно моделлю, описаною різницею рівнянням (9) і рівностями (6), повинен задовольняти нерівність

$$T > \log_{\alpha} \frac{c_K - c_{K+1}}{A} \tau, \quad (12)$$

де  $\tau = t^{(k+1)} - t^{(k)}$  – період дискретизації.

Припустимо, що усі вхідні сигнали є випадково розподіленими на інтервалі  $[0,A]$ . Як це було показано вище, якщо виконується умова  $0.5 < \alpha < 1$  і вхідні сигнали неоднакові, то можна гарантувати, що експоненціальний пошук може досягти будь-якого значення з  $[0,A]$  для кожного  $x^{(1)} \in [0,A]$  за скінченну кількість ітерацій. За статистикою [5, 10], що значення математичного сподівання  $c_{K+1}$   $N$  однорідно розподілених вхідних сигналів, позначене через  $\mu_{K+1,N}$  для  $0 \leq c_{K+1} \leq A$ , можна визначити як

$$\mu_{K+1,N} = \frac{(N-K)A}{N+1}. \quad (13)$$

З тієї ж причини математичне сподівання  $K$ -го максимального вхідного сигналу  $\mu_{K,N} = \frac{(N-K+1)A}{N+1}$ . Різниця між математичними сподіваннями  $K$ -го і  $(K+1)$ -го максимальних

сигналів  $\mu_{K,N} - \mu_{K+1,N} = \frac{A}{N+1}$ . Якщо модуль  $\Delta x^{(k)}$  стає меншим від цієї різниці, то пошукова точка може потрапити в діапазон  $(\mu_{K+1,N}, \mu_{K,N})$ , тоді збіжність може бути гарантована у сенсі середнього. Замінивши в (10)  $c_K - c_{K+1}$  на  $\frac{A}{N+1}$ , математичне сподівання числа ітерацій до досягнення збіжності для однорідно розподілених вхідних сигналів можна визначити як

$$m > \log_{\alpha} \frac{1}{N+1}. \quad (14)$$

Для однорідно розподілених вхідних сигналів математичне сподівання числа ітерацій до досягнення збіжності зменшується із зменшенням розмірності задачі  $N$ , оскільки

$\frac{d}{dN} \left( \log_{\alpha} \frac{1}{N+1} \right) = -\frac{1}{(N+1) \ln \alpha} > 0$  для кожного  $0.5 < \alpha < 1, N > 0$ . З іншого боку, для однорідно

розподілених вхідних сигналів математичне сподівання кількості ітерацій, необхідних для збіжності, зменшується із зменшенням значення параметра  $\alpha$ , оскільки

$\frac{d}{d\alpha} \left( \log_{\alpha} \frac{1}{N+1} \right) = \frac{\alpha (\ln(N+1))^3}{(\ln \alpha)^2} > 0$ . І, нарешті, для однорідно розподілених вхідних сигналів

математичне сподівання числа ітерацій до досягнення збіжності не залежить від кількості переможців, оскільки  $\frac{d}{dK} \left( \log_{\alpha} \frac{1}{N+1} \right) = 0$ .

У випадку, коли вхідні сигнали вибираються випадково з іншого розподілу, кількість ітерацій, необхідних для збіжності станів моделі, залежна від математичного сподівання роздільної здатності  $(\mu_{K+1,N}, \mu_{K,N})$ , може бути подана як

$$m > \log_{\alpha} \frac{\mu_{K,N} - \mu_{K+1,N}}{A}, \quad (15)$$

де  $\mu_{K+1,N}$  і  $\mu_{K,N}$  – статистичні середні.

Алгоритм (9) можна розглядати як експоненціальний пошук для визначення динамічного зсуву  $x^{(k)}$ . Такий алгоритм може бути спрощений шляхом заміни в (9)  $\alpha^k$  на  $\alpha$ , де параметр  $\alpha$  повинен задовольняти нерівності  $\alpha < \frac{r}{A}$  для гарантованого потрапляння зсуву  $x$  в діапазон  $(x^{(k)}, x^{(k+1)})$ . Отриманий так алгоритм буде частковим випадком алгоритму (9). У цьому випадку процедура визначення зсуву  $x^{(k)}$  є лінійним пошуковим процесом, який призводить до низької швидкості збіжності.

На основі вищенаведеного можна стверджувати, що існує таке  $t^{(m)} > 0$ , що задовольняє нерівність

$$b_1(t^{(k)}) > \dots > b_K(t^{(k)}) > 0 > b_{K+1}(t^{(k)}) > \dots > b_N(t^{(k)}) \quad (16)$$

для кожного  $t^{(k)} > t^{(m)}$ , де  $b_n(t^{(k)}) = c_n - x(t^{(k)})$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ , оскільки число переможців  $K = 1, 2, \dots, N-1$  і вектор вхідних сигналів  $a$  є впорядкованим. Це означає, що змінна  $x^{(k)}$  рівняння (9) стартує з початкового значення  $x^{(1)}$  і фінішує в стані  $x^{(m)}$ , що відповідає компонентам вихідного вектора  $b$ , розщепленим у позитивну і негативну площини відповідно до (2). У будь-який момент часу після  $t^{(m)}$  вихідні сигнали, що визначаються з рівняння (9) і рівностей (6), володіють KWTA-властивістю.

Зазначимо, що для будь-якого  $k > 0$  нерівності (16) описують властивість збереження впорядкування сигналів, тобто для будь-яких заданих сигналів  $a_n, n = 1, 2, \dots, N$  впорядкування вихідних сигналів є тим самим, що й впорядкування вхідних сигналів. Така властивість є очевидною, оскільки задовольняється умова  $b_n^{(k)} = c_n - x^{(k)} = a_n - A_{\min} - x^{(k)}$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$  для кожного  $t^{(k)} \geq 0$ . Інакше кажучи, вихідні сигнали дорівнюють вхідним сигналам мінус динамічний зсув, який є однаковим для усіх вхідних сигналів, а тому він не змінює впорядкування сигналів. Це призводить до того, що задовольняються нерівності (1). Отже, впорядкування вихідних сигналів моделі і впорядкування відповідних вхідних сигналів є однаковим для кожного  $x^{(k)} \in [0, A]$ .

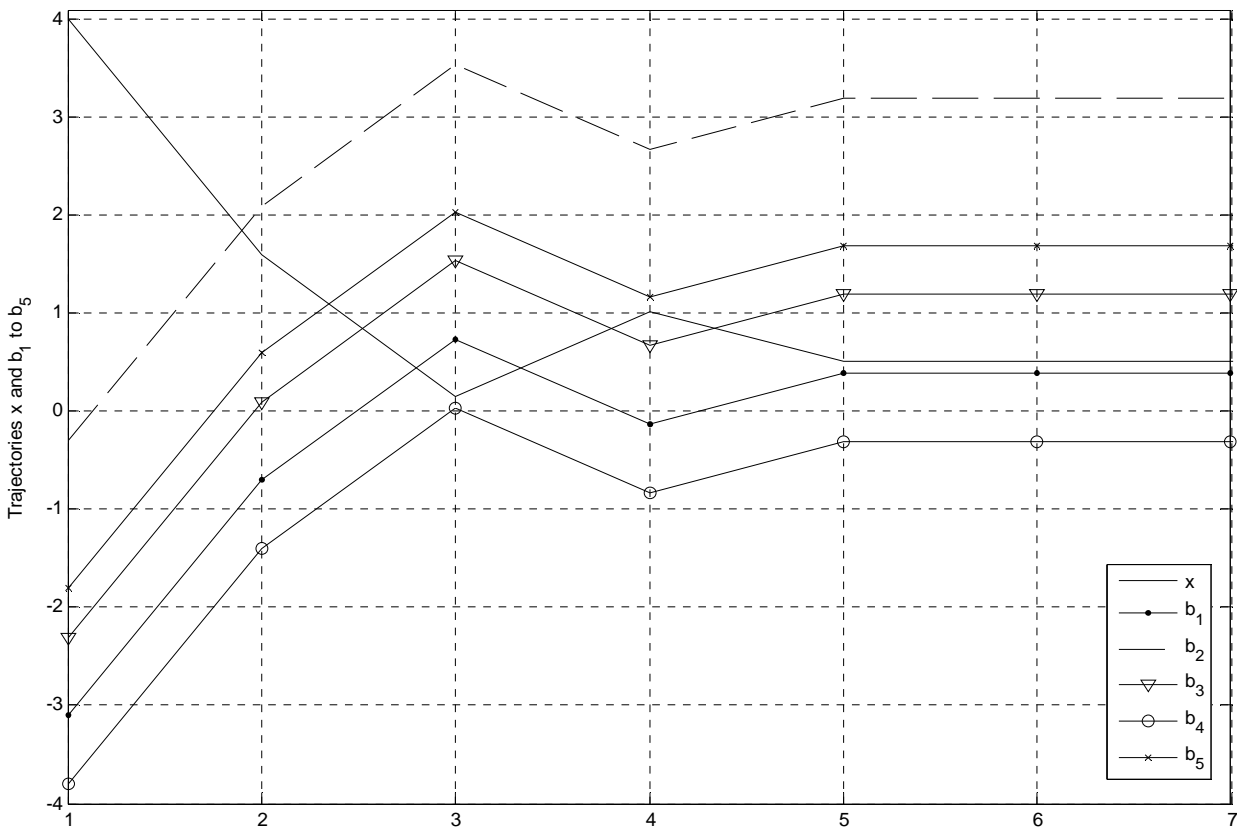
Отримані результати, які ґрунтуються на лемі, гарантують, що різницеве рівняння (9) і рівності (6) описують модель KWTA-схеми обробки дискретизованих сигналів. Цей факт можна подати у вигляді теореми.

*Теорема.* Нехай коефіцієнт загасання  $\alpha$  різницевого рівняння (9) задовольняє обмеження  $0.5 < \alpha < 1$ . Тоді для заданого вхідного вектора  $a \in \mathfrak{X}$  з нерівними компонентами і позитивним цілим  $1 \leq K < N$  це рівняння і рівності (6) описують модель KWTA-нейронної схеми обробки дискретизованих сигналів.

#### 4. Результати комп'ютерного моделювання

Для ілюстрації теоретичних результатів, представлених у статті, розглянемо конкретний приклад з відповідним комп'ютерним моделюванням, який демонструє динаміку дискретизованих сигналів моделі KWTA-нейронної схеми.

*Приклад.* Нехай необхідно ідентифікувати чотири найбільші сигнали, тобто  $K = 4$  вектора  $a = [-1.1, 1.7, -0.3, -1.8, 0.2]$ , тобто  $N = 5$ , використавши модель, що описується різницеvim рівнянням (9) і рівностями (6). Задамо для цієї моделі  $A_{\min} = -2$ ,  $A = 4$ , початкову умову  $x^{(1)} = A$  і коефіцієнт загасання  $\alpha = 0.6$ , вибраний з обмеження леми. Визначимо траєкторії дискретного часу зсуву  $x^{(k)}$  і вихідні сигнали  $b_i^{(k)}$ ,  $i = 1, 2, 3, 4, 5$  згідно з різницеvim рівнянням (9) і рівностями (6). Такі траєкторії в нормалізованих одиницях показані на рис. 1. Як можна побачити, у встановленому режимі сигнали  $b_1 > 0, b_2 > 0, b_3 > 0, b_5 > 0$  відповідають чотирьом найбільшим компонентам вектора  $a$  – переможцям, а сигнал  $b_4 < 0$  відповідає переможеному згідно з KWTА-властивістю (2). Збіжності пошукового процесу до встановленого режиму досягають за  $m = 5$  ітерацій відповідно до оцінки (12).



*Рис. 1. Траєкторії дискретного часу зсуву  $x^{(k)}$  і вихідних сигналів  $b_i^{(k)}$ ,  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ , які представляють KWTА-властивість моделі, що описується різницеvim рівнянням (9) і рівностями (6)*

На рис. 2 представлено фазовий портрет траєкторії дискретного часу зсуву  $x^{(k)}$ . Як можна побачити, фазова крива змінної  $x^{(k)}$  є скінченною закрученою спіраллю кусково-лінійної форми, що гарантує стабільну динаміку зсуву  $x^{(k)}$ . Зміна зсуву  $\Delta x^{(k)} = x^{(k+1)} - x^{(k)}$  демонструє стрибки на початку і в кінці кожного горизонтального сектора.

Отже, результати комп'ютерного моделювання підтверджують теоретичні положення.

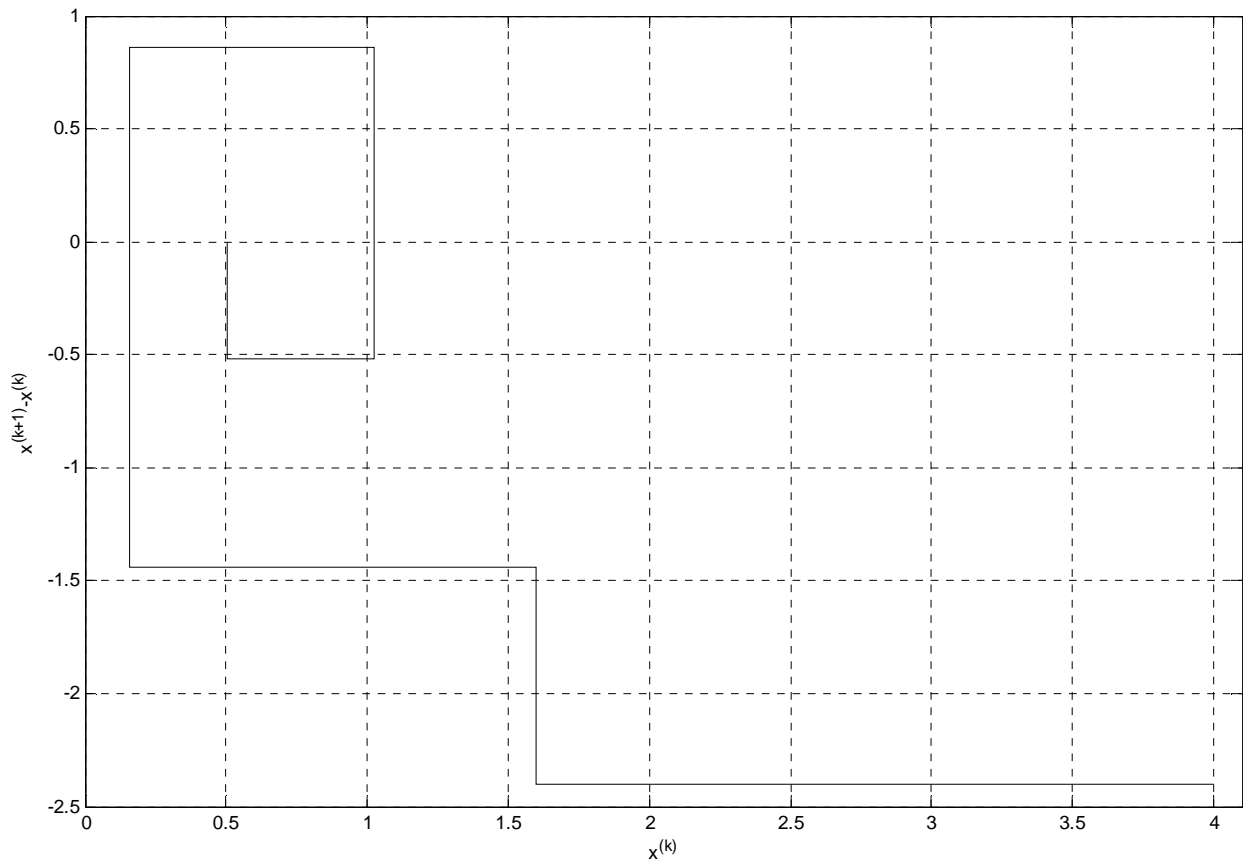


Рис. 2. Фазова крива траєкторії зсуву  $x^{(k)}$

### Висновки

У статті проаналізовано динаміку дискретизованих сигналів математичної моделі нейронної схеми типу “K-winners-take-all”. Схема придатна для обробки будь-яких неоднакових сигналів із скінченними значеннями і володіє властивістю збереження впорядкування сигналів. Отримано оцінки для кількості ітерацій до досягнення збіжності пошукового процесу до встановленого режиму.

1. Bihn L.N., Chong H.C. A neural-network contention controller for packet switching networks, *IEEE Trans. on Neural Networks* 6 (1995) 1402-1410.
2. David H.A. *Order Statistics*, 2nd ed. (New York: Wiley, 1980).
3. Hu X., Wang J. An improved dual neural network for solving a class of quadratic programming problems and its k-winners-take-all application, *IEEE Trans. on Neural Networks*, 19 (2008) 2022-2031.
4. Kwon T.M., Zervakis M. A parallel sorting network without comparators: A neural-network approach, in: *Proc. Int. Joint Conf. on Neural Networks*, Vol. 1 (1992) 701–706.
5. Lippmann R.P., Gold B., Malpass M.L. A comparison of Hamming and Hopfield neural nets for pattern classification, *MIT Lincoln Laboratory Technical report TR-769* (1987) 1-37.
6. Liu S., Wang J. A simplified dual neural network for quadratic programming with its KWTA application, *IEEE Trans. on Neural Networks*, 17 (2006) 1500-1510.
7. Tymoshchuk P., Kaszkurewicz E. A Winner-take-all circuit based on second order Hopfield neural networks as building blocks, in: *Proc. Int. Joint Conf. on Neural Networks*, Vol. II (2003) 891-896.
8. Tymoshchuk P. and Kaszkurewicz E. A winner-take-all circuit using neural networks as building blocks, *Neurocomputing* 64 (2005) 375-396.
9. Urahama K., Nagao T. K-Winner-take-all circuit with  $O(n)$  complexity, *IEEE Trans. on Neural Networks* 6 (1995) 776-778.
10. Yang J.F., Chen C.M. A Dynamic K-Winners-Take-All Neural Network, *IEEE Trans. on Syst., Man and Cyb.* 27 (1997) 523–526.
11. Yen J.C., Guo J.I., Chen H.-C. A new k-Winners-take all neural network and its array architecture, *IEEE Trans. on Neural Networks* 9 (1998) 901-912.