

Теорема. Нехай коефіцієнти систем (1) і (2) задовольняють умови 1) – 5). Тоді для як завгодно малого $\eta > 0$ і як завгодно великого $L > 0$ можна вказати таке $\varepsilon_0 > 0$, що за умови $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ на відрізку $0 \leq t \leq \frac{L}{\varepsilon}$ виконуються нерівності

$$M|\bar{a} - a|^2 < \eta, \quad M|\bar{\psi} - \psi|^2 < \eta,$$

де M – математичне сподівання.

Висновок. Як видно з теореми, метод усереднення стохастичних диференціальних рівнянь з швидкозмінною фазою, які описують коливні процеси в істотно нелінійних системах з випадковими збуреннями, дає змогу отримати результати з достатньою точністю.

1. Митропольський Ю.А. *Метод усреднения в нелинейной механике.* – К.: Наукова думка, 1971. – 440 с. 2. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.* – М.: Наука, 1974. – 501 с. Гихман И.И. *О некоторых дифференциальных уравнениях со случайными функциями / Укр. мат. журнал.* – 1950. – Т.2. – № 3. – С. 45–69. Цикайло Т.-Н.М. *Исследование случайных колебаний в существенно нелинейных автономных стохастических системах.* – В кн.: *Аналитические методы исследования нелинейных колебаний.* – К.: Ин-т математики АН УССР, 1980. – С. 161–168.

УДК 621.86.534-16

І.А. Вікович, Х.А. Висоцька, Ю.Р. Оленюк
Національний університет “Львівська політехніка”,
кафедра транспортних технологій

ВИМУШЕНІ КОЛИВАННЯ ПІДВІСНИХ ВАНТАЖОТРИМКИХ КОНВЕЄРІВ

© Вікович І.А., Висоцька Х.А., Оленюк Ю.Р., 2010

Розроблено математичну модель вимушених поздовжніх коливань підвісних вантажотримких конвеєрів у вигляді континуальної системи із замкнутим контуром.

It was devise a mathematical model of the suspended weightholding conveyors as continual a system in a view of dispersion of energy in the material.

Вступ. Підвісні вантажотримкі конвеєри набули широкого застосування в різних галузях промисловості для переміщення виробів (деталей, вузлів, невеликих агрегатів і складальних одиниць тощо) і напівфабрикатів, а також на складах і терміналах для переміщення автоматизованого складування поштучних вантажів під час навантажувально-розвантажувальних робіт. Переважно підвісні вантажотримкі конвеєри встановлюють у вигляді замкнутих контурів з просторовими прямолінійними і криволінійними траєкторіями руху. Довжина цих конвеєрів є в межах від декількох десятків до сотень метрів, а на окремих підприємствах довжина їх може сягати декілька кілометрів. Значна довжина і певна податливість в осьовому напрямі, циклічність зубчатого приводу конвеєра, а також наявність фрикційних явищ у цих конвеєрах призводять до

нерівномірного руху й виникнення поздовжніх та поперечних коливань, що вимагає відповідних теоретичних досліджень.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. В усіх відомих дослідженнях підвісних вантажотримких конвеєрів для аналізу динамічних явищ у них розрахункові схеми переважно подають у вигляді розімкнутих систем. У роботі [6] для дослідження динаміки підвісних вантажотримких конвеєрів розрахункові схеми подано у вигляді замкнутого контуру із зосередженими масами. У роботі [6] розрахункова схема задається у вигляді замкнутого контуру з розподіленими параметрами. У цій статті запропоновано нову розрахункову схему, яка істотно відрізняється від аналогічних [3, 5, 6].

Постановка завдання і виклад основного матеріалу. Для аналізу вимушених коливань підвісних вантажотримких конвеєрів подамо розрахункову схему у вигляді замкнутого плоского контуру, вважаючи, що ведуча вітка конвеєра, з пружно підвішеними рівномірно розподіленими вантажами, і ведена вітка конвеєра рухаються з деякою поступальною сталою швидкістю. Привідний і натяжний механізми конвеєра розміщені на краях замкнутого контуру (рис. 1).

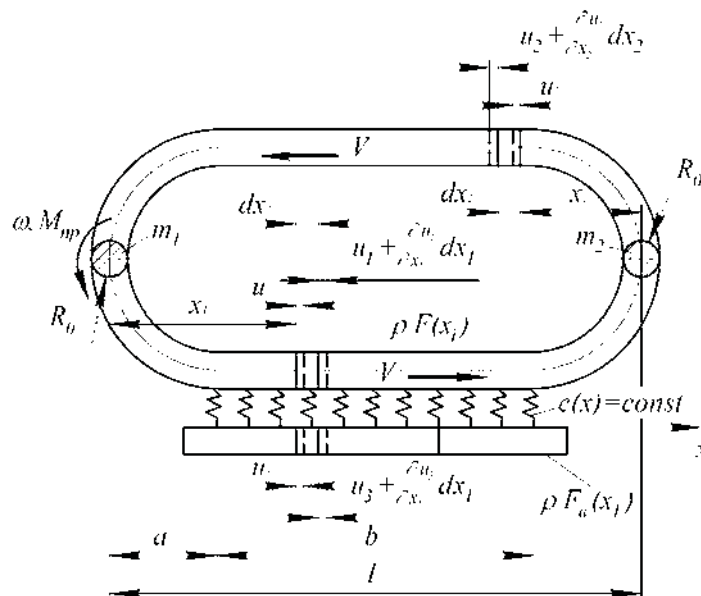


Рис. 1. Розрахункова схема підвісного вантажотримкого конвеєра

Тут m_1 і m_2 – зведені маси ведучого і веденого механізмів конвеєра; $\rho F(x_1) = \rho F(x_2)$ – маси одиниці довжини робочої і неробочої віток конвеєра; $\rho F_e(x_1)$ – погонна маса вантажів; $c(x)$ – деякий зведений коефіцієнт згинальної жорсткості постелі вантажів; ρ – густина матеріалу; $F_i(x_i)$ – площі поперечних перерізів веденої і ведучої віток конвеєра ($i=1,2$).

Зазначимо, що

$$\rho F_e(x_1) = \rho F_e [\sigma_0(x_1 - a) - \sigma_0(x_1 - b)]$$

$$\rho F_e(x_1) = \begin{cases} 0 & \text{при } x_1 < a \text{ і } x_1 > b \\ \rho F_e & \text{при } a < x_1 < b, \end{cases}$$

де $\sigma_0(x_1)$ – одинична функція Хевісайда:

Для складання диференціальних рівнянь руху вантажотримкого конвеєра використаємо принцип Даламбера. Розглянемо динамічну рівновагу виділеного довільного елемента системи завдовжки dx_i , розміщеного між двома суміжними поперечними перерізами (рис.2).

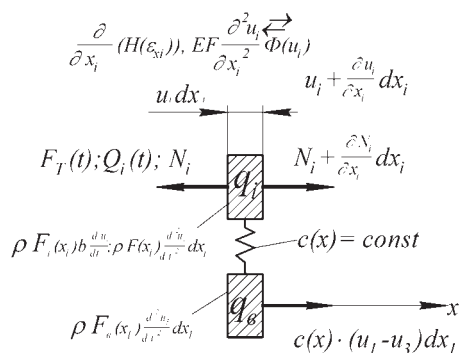


Рис. 2. Схема дії внутрішніх зусиль на довільний елемент коливальної системи підвісного вантажотримкого конвеєра

Нехай $u_1(x_1, t)$, $u_2(x_2, t)$, та $u_3(x_1, t)$, – відповідно поздовжні переміщення поперечних перерізів робочої і неробочої віток конвеєра та розподіленої системи вантажів (або довгомірною вантажу) під час коливань. Тоді поздовжні переміщення робочої і неробочої віток конвеєра у поперечному перерізі $x_i + dx_i$ можна подати виразом

$$u_i + \frac{\partial u_i}{\partial x_i} dx_i \quad (i=1,2).$$

Поздовжня розтягувальна сила N_i у довільному поперечному перерізі віток конвеєра з координатами x_i дорівнює

$$N_i = \sigma_i F_i(x_i) = \varepsilon_i E F_i(x_i) = E F_i(x_i) \frac{\partial u_i}{\partial x_i},$$

де $\varepsilon_i = \frac{u_i(x_i + dx_i) - u_i(x)}{\Delta x_i} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$ – відносна деформація; σ_i – нормальне напруження; E – модуль пружності Юнга.

Сили інерції переносного руху віток конвеєра та системи вантажів одиничної довжини характеризуються величинами

$$q_i = \rho F_i(x_i) \frac{d^2 u_i}{dt^2} dx_i \quad \text{та} \quad q_e = \rho F_e(x_i) \frac{d^2 u_3}{dt^2} dx_i.$$

У підвісних стрічкових вантажотримких конвеєрах переважно застосовують як тяговий вантажотримкий елемент (стрічку) ланцюг. Ланцюгові передачі зазвичай характеризуються нерівномірністю ходу приводу, який створює певну пульсацію у вітках конвеєра.

Нерівномірність ходу ланцюга у встановленому режимі зумовлена тим, що швидкість руху ланцюга конвеєра V залежить від кута κ повороту шестикутної зірочки [3], зумовлює збурення у вітках конвеєра, і наближено для практичних розрахунків поступальну швидкість віток конвеєра можна представити у вигляді $V(t) = \omega_0 R_0 \sin \omega_0 t$, де ω_0 – кутова швидкість обертання привідної зірочки конвеєра, R_0 – її радіус.

Привідний механізм конвеєра надає робочій вітці тягове розподілене зусилля $F_T(t) = \rho F_1 R_0 \omega_0^2 \sin \omega_0 t$, а під час руху конвеєра в робочій і неробочій вітках виникають розподілені сили опору їх переміщень відповідно $Q_1(t) = \rho F_1(x_1) Q_1 \sin \omega_0 t$ і $Q_2(t) = \rho F_2(x_2) Q_2 \sin \omega_0 t$, ω_0 – частота збурювальної сили, с^{-1} .

Оскільки вітки конвеєра рухаються з поступальною переносною швидкістю V , то усі елементи віток конвеєра під час поздовжніх коливань перебувають у складному русі, тому абсолютне переміщення перерізів віток конвеєра дорівнює

$$u_i(x_i, t) = u_i^e(t) + u_i^r(x_i, t),$$

де $u_i^e(t)$ – переносне переміщення віток конвеєра з переносною швидкістю V і $u_i^r(x_i, t)$ – відносне переміщення віток конвеєра під час поздовжніх коливань.

Відомо, що деформації, напруження і внутрішні зусилля виникають від відносних, а сили інерції – від абсолютних переміщень і обчислюються за формулами [1]:

$$\varepsilon_i = \frac{\partial u_i^r}{\partial x_i}; \quad \sigma_i = \varepsilon_i E = E \frac{\partial u_i^r}{\partial x_i}; \quad N_i = \sigma_i F_i = EF_i \frac{\partial u_i^r}{\partial x_i};$$

$$\rho F_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \rho F_i \left(\frac{\partial^2 u_i^e}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u_i^r}{\partial t^2} \right).$$

Дослідимо у першому наближенні вимушені поздовжні коливання підвісного вантажотримкого конвеєра з урахуванням зовнішнього в'язкого тертя у вітках конвеєра, але без урахування внутрішнього розсіяння енергії в матеріалі ланцюгових стрічок та без уточненого урахування впливу поздовжньої швидкості руху віток конвеєра на коливальний процес.

Рівняння, які описують поступальний поздовжній коливальний рух у вітках замкнутого підвісного вантажотримкого конвеєра з огляду на вищенаведені спрощення запишемо у вигляді:

$$\rho F \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \rho F b \frac{\partial u_1}{\partial t} - EF \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + c(x)(u_1 - u_3) = \rho F R_0 \omega_0^2 \cos \omega_0 t - \rho F Q_1 \cos \omega_0 t;$$

$$\rho F \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \rho F b \frac{\partial u_2}{\partial t} - EF \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} = \rho F R_0 \omega_0^2 \cos \omega_0 t - \rho F Q_2 \cos \omega_0 t;$$

$$\rho F_e \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} + \rho F_e b \frac{\partial u_1}{\partial t} - c(x)(u_1 - u_3) = 0. \quad (1)$$

Крайові умови інтегрування рівнянь (1):

$$u_1(0) = u_2(l_2),$$

$$u_1(l_1) = u_2(0),$$

$$EF \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \Big|_{x_1=0} - m_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \Big|_{x_1=0} = EF \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \Big|_{x_2=l_2},$$

$$EF \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \Big|_{x_1=l_1} + m_2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \Big|_{x_1=l_1} = EF \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \Big|_{x_2=0}. \quad (2)$$

Розв'язок кожного з рівнянь (1) шукаємо у вигляді розкладу за власними формами коливань (метод головних координат [1]) у вигляді:

$$u_i(x_i, t) = \sum_{l_i=1}^{\infty} U_{Li}(x_i) \eta_{Li}(t), \quad (3)$$

де $\eta_{Li}(t)$ – шукані головні координати; $u_{Li}(x_i)$ – власні форми коливань, знайдені при розв'язанні однорідної системи рівнянь (1) (задача про вільні коливання). Загальний розв'язок правої частини рівнянь (1) шукаємо у вигляді:

$$u_1(x_1, t) = \varphi_1(x_1) \cos \omega t;$$

$$u_2(x_2, t) = \varphi_2(x_2) \cos \omega t; \quad (4)$$

$$u_3(x_1, t) = \varphi_3(x_1) \cos \omega t.$$

Підставляючи (4) у ліву частину рівнянь (1) і прирівнюючи відповідно між собою члени з синусами і косинусами та виразивши з третього рівняння (1) u_3 через u_1 , прийдемо до системи рівнянь, а відтак до

$$\frac{d}{dx} \left(EF \frac{dU_{Li}}{dx_i} \right) + \rho F \omega_{Li}^2 U_{Li} \quad (5)$$

з граничними умовами (2).

Помножимо результат підстановки (3), (4) у (1) на $U_{Si}(x_i)dx_i$, проінтегруємо за x у межах від 0 до L і, враховуючи умови ортогональності, одержимо злічену множину рівнянь коливань головних координат у такому вигляді:

$$M_{Li}(\ddot{\eta}_{Li} + b\dot{\eta}_{Li} + \omega_{Li}^2\eta_{Li}) = q_{Li} \cos \omega_0 t, \quad (6)$$

де

$$q_{Li} = \int_0^L q_i(x_i)U_{Li}(x_i)dx_i; \quad Li = 1,2,3...$$

$$M_{Li} = \int_0^L \rho F U_{Li} dx_i;$$

$$q_{Li}(x_i) = \rho F (R_0 \omega_0^2 - Q_i) \quad i = 1,2.$$

Частинний розв'язок кожного з цих рівнянь шукаємо у вигляді [1]

$$\eta_{Li} = a_{Li} \cos(\omega_0 t - \varphi_{Li}) = a_{Li} \cos \psi. \quad (7)$$

Підставивши (7) у (6) з урахуванням того, що $\cos \omega_0 t = \cos(\psi_{Li} + \varphi_{Li}) = \cos \psi_{Li} \cos \varphi_{Li} - \sin \psi_{Li} \sin \varphi_{Li}$ та прирівнюючи при цьому коефіцієнти при $\cos \psi_{Li}$ і $\sin \psi_{Li}$, одержимо системи рівнянь відносно сталих a_{Li} і φ_{Li}

$$M_{Li} a_{Li} (\omega_{Li}^2 - \omega_0^2) = q_{Li} \cos \varphi_{Li}; \quad (8)$$

$$2M_{Li} a_{Li} h_{Li} \omega_0 = q_{Li} \sin \varphi_{Li},$$

де $h_{Li} = \frac{b}{2}$.

Обмежимося випадком малого тертя $h_{Li}^2 < \omega_{Li}^2$, коли $\lambda_1^i = -h_{Li} + i\omega_{Li}$; $\lambda_2^i = -h_{Li} - i\omega_{Li}$.
З рівнянь (7) знаходимо

$$a_{Li} = \frac{\int_0^L q_i(x_i)U_{Li}(x_i)dx_i}{M_{Li} \sqrt{(\omega_{Li}^2 - \omega_0^2)^2 + 4h_{Li}^2 \omega_0^2}}; \quad \text{tg} \varphi_{Li} = \frac{b\omega_0}{\omega_{Li}^2 - \omega_0^2}. \quad (9)$$

Рівняння (6) з урахуванням (8) набуде вигляду

$$\eta_{Li} = \frac{\int_0^L q_i(x_i)U_{Li}(x_i)dx_i}{M_{Li} \sqrt{(\omega_{Li}^2 - \omega_0^2)^2 + 4h_{Li}^2 \omega_0^2}} \cos(\omega_0 t - \varphi_{Li}). \quad (10)$$

Рівняння (10) визначає чисто вимушені гармонічні поздовжні коливання L_i -ї головної координати віток конвеєра у дорезонансній, резонансній та зарезонансній зонах.

Підставляючи (10) у (3), з урахуванням тривіальних початкових умов, одержимо розв'язок рівнянь (1) у такій загальній формі

$$U_i(x_i, t) = \sum_{Li} \frac{U_{Li}(x_i) \int_0^L q_i(x_i)U_{Li}(x_i)dx_i}{M_{Li} \sqrt{(\omega_{Li}^2 - \omega_0^2)^2 + 4h_{Li}^2 \omega_0^2}} \cos(\omega_0 t - \varphi_{Li}) \quad (11)$$

за умови гармонічного збурення системи $q_i(x_i, t) = q_i(x_i) \cos \omega_0 t$, де $h_{Li} = b$; b – коефіцієнт зовнішнього в'язкого тертя у вітках конвеєра.

Зазначимо, що для визначення резонансу L_i -го порядку у вітках конвеєра $\omega_0 = \omega_{Li}$ у сумі рівняння (11) за правилом Відлера залишаємо L_i -й доданок. При цьому нехтуємо іншими доданками як малими величинами.

Використовуючи метод головних координат сумісно з методом комплексних амплітуд, розв'язок (11) можна подати у вигляді [1]:

$$u_i(x_i, t) = \sum_{L_i=1}^{\infty} \frac{U_{L_i}(x_i) q_{L_i} e^{i\omega_0 t}}{M_{L_i} [(i\omega_0)^2 + 2h_{L_i} i\omega_0 + \omega_{L_i}^2]} = W_i(x_i, \omega_0) e^{i\omega_0 t}, \quad (12)$$

де $W_i(x_i, \omega_0)$ – частотна передаточна функція-реакція коливальної системи на одиничне гармонічне збурення $e^{i\omega_0 t}$.

Отже, розв'язок системи рівнянь (1), які відповідають вимушеним поздовжнім коливанням віток підвісного вантажотримкого конвеєра, з крайовими умовами (2), можна подати у загальній (11) або у комплексній формі (12). При $\omega = \omega_{L_i}$ виникає резонанс L_i – головної координати коли

$$\int_0^L q_i(x_i) U_{L_i}(x_i) dx_i \neq 0.$$

Необхідно зазначити, що особливі труднощі виникають при розв'язуванні системи рівнянь (1), якщо враховувати гістерезисні втрати у коливальній системі конвеєра.

Тут розв'язок отримано в першому наближенні без врахування гістерезисних втрат. У подальших дослідженнях доцільно врахувати гістерезисні втрати у матеріалі від конвеєра під час коливань та їх поступальну швидкість руху.

Висновки. Отже, запропонований метод розрахунку дає змогу аналізувати коливання і вибирати раціональні конструктивні параметри підвісних вантажотримких конвеєрів під час проектування таких конвеєрів та вибирати оптимальні режими їх роботи з метою уникнення резонансних явищ у процесі роботи.

1. Василенко Н.В. Теория колебаний. – К.: Вища школа, 1992. – 430 с. 2. Вибрації в техніці: Справочник в 6-ти т. – М.: Машиностроение, 1978 – 1981. Т. 1: Колебания линейных систем. – 1978. – 322 с. 3. Зенков Р.Л., Ивашков И.И., Колобов Л.Н. Машины непрерывного транспорта. – М.: Машиностроение. – 304 с. 4. Писаренко Г.С., Богинич О.Е. Колебания кинематически возбуждаемых механических систем с учетом диссипации энергии. – К.: Наукова думка, 1984. – 220 с. 5. Харченко Е.В., Поліщук Л.К., Собковскі С. Розрахунок перехідних процесів у стрічковому конвеєрі з урахуванням рухомості меж транспортувального органу // Журн. "Технічні вісті". – Львів: Вид-во ДУ "Львівська політехніка". – 2001/1(12), 2(13). – С. 102–106. 6. Хорольський І.М. Замкнутый контур і розімкнута схема у дослідженнях динаміки машин безперервного транспорту // Вісн. Львів. політехн. ін-ту. – 1991. – №259. – С. 105–108.