Висновки. Заміна традиційних клинопасових передач на АРПП має перспективу з таких причин. АРПП не вимагає застосування спеціальних засобів та методів контролю попереднього пружного натягу приводного паса, що спрощує догляд за роботою передачі в експлуатаційних умовах. Ресурс роботи приводного паса збільшується за рахунок зменшення напружень згину, оскільки пас охоплює самозатяжне кільце з більшим діаметром, ніж діаметр ведучого шківа у традиційній передачі. Діаметр d_2 веденого шківа в АРПП значно менший ніж у традиційній передачі. Наведений у даному дослідженні спосіб заміни традиційної клинопасової передачі на АРПП не вимагає складних розрахунків.

1. Деклараційний патент на корисну модель UA 10157. Шків автоматично регульованої пасової передачі / В. Т. Павлище, Р. Я. Предко. Бюл. № 11, 2005. 2. Иоселевич Г. Б. Детали машин: Учебник для студентов машиностр. спец. вузов. – М.: Машиностроение, 1988. – 368 с. 3. Кіндрацький Б. І., Павлище В. Т., Предко Р. Я. Розрахункові параметри автоматично регульованої пасової передачі з самозатяжним кільцем // Вісник Східноукраїнського національного університету імені Володимира Даля. – 2007. – № 9. – С. 73–78. 4. Кіндрацький Б., Павлище В., Предко Р. Ресурс приводних пасів в автоматично регульованих клинопасових передачах // Машинознавство. – 2006. – № 6 (108). – С. 40–43. 5. Павлище В.Т., Предко Р.Я. Про пружні властивості приводних клинових пасів пасових передач // Вісник Нац. ун-ту "Львівська політехніка" "Динаміка, міцність та проектування машин і приладів". – 2004. – № 509. – С. 96–99. 6. Предко Р.Я. Класифікація і порівняльна оцінка автоматично регульованих пасових передач // Збірник наукових праць „Проектування, виробництво та експлуатація автотранспортних засобів і поїздів". – 2007. – № 10. – С. 63 – 68.

УДК 534.111

М.Б. Сокіл
Національний університет "Львівська політехніка",
кафедра транспортних технологій

ЗГИННІ НЕЛІНІЙНІ КОЛИВАННЯ ОДНОВИМІРНИХ ТІЛ, ЯКІ ХАРАКТЕРИЗУЮТЬСЯ ПОЗДОВЖНЬОЮ ШВИДКІСТЮ РУХУ, І НАБЛИЖЕНЕ ЇХ ДОСЛІДЖЕННЯ

Викладено методику дослідження згинних нелінійних коливань одновимірних тіл, які характеризуються сталою швидкістю поздовжнього руху. В її основу покладено принципи одночастотності коливань у нелінійних системах та основні ідеї методів Бубнова–Гальоркіна та Ван-дер-Поля. Розглянуто резонансний і нерезонансний випадки.

The method of research of bend nonlinear vibrations of unidimensional bodies is expounded, what харктеризуються by the permanent rate of longitudinal movement. In its basis of покладено принцмп of одночастотності vibrations in the nonlinear systems and basic ideas of methods of Bubnov-Galerkina and Wan-der-Poll. Resonance and unresonance cases are considered.

Актуальність і огляд основних результатів. Важливою проблемою динаміки одно- і багатовимірних систем є вивчення впливу швидкості їх поздовжнього руху та різної природи нелінійних сил на поздовжні та згинні коливання. Йдеться про коливання гнучких елементів систем приводу, канатних витягів, рухомих балок, трубопроводів, по яких протікає рідина та ін. Як показують результати експериментальних досліджень [1], поздовжній рух впливає не тільки на кількісні характеристики коливань, але й на стійкість процесу. До того ж, за значних швидкостей руху відбувається зрив коливань [2,3]. Якщо для випадку малих згинних жорсткостей тіл (гнучких елемнтів систем приводу, запису інформації, канатних витягів) розроблено різні підходи до аналітичного їх дослідження [2–6], то для випадку значних згинних жорсткостей задачі розглядались тільки в окремих випадках [7–9]. Так, у [8, 9], використовуючи асимптотичні методи [10], розлянуто згинні нелінійні коливання рухомої балки для випадку малої швидкості руху, у [7] розроблено методику для довільної швидкості, однак вона простотою не відзначається, і застосовувати її для розв'язування прикладних задач складно. Основні труднощі дослідження коливних процесів рухомих тіл, які характеризуються сталою сладовою швидкості поздовжнього руху (навіть для випадку малої нелінійності) полягають у знаходженні розв'язку відповідної лінійної моделі процесу. Адже в основу тих чи інших модифікацій методів збурень [11,12] покладено існування розв'язку незбуреної моделі, а знаходження останнього для однорідних чи неоднорідних середовищ, які характеризуються сталою швидкістю поздовжнього руху, сьогодні залишається проблематичним. Нижче для дослідження коливань тіл значних згинних жорсткостей заздалегідь пропонуються деякі неточності в описі форми зігнутої осі рухомого тіла, водночас основну увагу приділено амплітудно-частотній характеристиці (АЧХ) власних і вимушених нелінійних коливань. Таке не зовсім строге розв'язання поставленої задачі для багатьох приклад-них випадків є оправданим, адже отримані розрахункові формули, з врахуванням наведеного, є достатньо простими, а похибки для основних характеристик процесу – незначними.

Постановка задачі. Математичною моделлю згинних коливань багатьох пружних тіл, які характеризуються сталою швидкістю поздовжнього руху, є дифренціальне рівняння

$$u_{tt} + 2Vu_{xt} - \left(\alpha^2 - V^2\right)u_{xx} + \beta^2 u_{xxxx} = \varepsilon f\left(u, u_t, u_x, u_{xx}, u_{xxx}, u_{xxxx}, \theta\right), \theta = \mu t, \qquad (1)$$

в якому $u(x,t)$ – поперечне відхилення перерізу тіла з координатою x у довільний момент часу t, V – швидкість поздовжнього руху (стала), $\alpha^2 = S/\rho$, S – розтягуюче зусилля, ρ – погонна маса тіла, $\beta^2 = EI/\rho$, EI – згинна жорсткість тіла, $\varepsilon f\left(u, u_t, u_x, u_{xx}, u_{xxx}, u_{xxxx}, \theta\right)$ – відома аналітична 2π – періодична по θ функція, яка описує відхилення пружних властивостей матеріалу тіла від лінійного закону, сили опору, дисипативні, періодичні сили (μ – їх частота), а малий параметр ε вказує на незначну величину максимального значення цих сил порівняно із відновлювальною силою. Незважаючи на вказане, з часом ефект від дії таких сил зростає, і вони спричиняють значні зміни у плині динамічного процесу. Для рівняння (1) розглянемо найпростіші крайові умови

$$u(x,t)\big|_{x=j} = u_{xx}(x,t)\big|_{x=j} = 0, \; j = 0, l. \qquad (2)$$

Отже, задача полягає у отриманні залежностей, які визначають вплив всієї низки параметрів і сил на динамічний процес систем, математичними моделями процесу яких є крайова задача (1), (2).

Методика розв'язування. Застосувати безпосередньо для побудови розв'язку крайової задачі (1), (2) основну ідею методів збурень [11,12] чи їх модифікації [10, 13] не вдається, адже вже на першому кроці її реалізації виникають значні труднощі – не вдається знайти розв'язок незбуреної ($\varepsilon = 0$) лінійної крайової задачі – відповідне рівняння не допускає застосування для свого інтегрування ні методу Фур'є, ні методу Д'Аламбера. Тому для наближеного розв'язання поставленої задачі зробимо у рівняння (1) формальну підстановку

$$u(x,t) = T(t)\sin\frac{k\pi}{l}x, \qquad (3)$$

крайові умови (2) при цьому будуть виконуватись автоматично. Для знаходження невідомої функції $T(t)$ у (3), після нескладних перетворень, отримуємо звичайне нелінійне рівняння

$$\ddot{T}+\omega^2 T=\varepsilon f\left(T,\dot{T},\theta\right), \tag{4}$$

де $\omega^2=\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2\left[\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2\beta^2+\left(\alpha^2-V^2\right)\right]$, $\bar{f}\left(T,\dot{T},\theta\right)=\frac{1}{l}\int\limits_0^l f(u,u_t,u_x,u_{xx},u_{xxx},u_{xxxx},\theta)\sin\frac{k\pi}{l}xdx$ за умови, що функція $u(x,t)$ та її частинні похідні визначаються співвідошеннями, які випливають із формули (3). Перше наближення асимптотичного розв'язку рівняння (4) відповідно до методу Ван-дер-Поля [14, 15] можна подати у вигляді

$$T=a(t)\cos(\omega t+\varphi(t)), \tag{5}$$

де $a(t)$ і $\varphi(t)$ – невідомі змінні функції часу. Для їх визначення із (4) отримуємо систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{gathered}\dot{a}\cos(\omega t+\varphi(t))-\dot{\psi}a\sin(\omega t+\varphi(t))=0,\\ \dot{a}\omega\sin(\omega t+\varphi(t))+\dot{\psi}a\omega\cos(\omega t+\varphi(t))=-\varepsilon f\left(a\cos(\omega t+\varphi),-a\omega\sin(\omega t+\varphi),\theta\right).\end{gathered} \tag{6}$$

Диференціальні рівняння (6) визначають функції $a(t)$ і $\varphi(t)$ у вигляді

$$\begin{gathered}\dot{a}=-\frac{\varepsilon}{\omega a}f\left(a\cos(\omega t+\varphi),-a\omega\sin(\omega t+\varphi),\theta\right)\sin(\omega t+\varphi),\\ \dot{\varphi}=-\frac{\varepsilon}{\omega a}f\left(a\cos(\omega t+\varphi),-a\omega\sin(\omega t+\varphi),\theta\right)\cos(\omega t+\varphi).\end{gathered} \tag{7}$$

З врахуванням того, що праві частини співвідношень (7) є періодичними за $\psi=\omega t+\varphi$ та $\theta=\mu t$ (система піддається зовнішньому періодичному збуренню частоти μ), нижче розглянемо два випадки: нерезонансний ($\omega\neq\frac{p}{q}\mu$, p,q – взаємно прості числа) та резонансний $\omega\approx\frac{p}{q}\mu$. Для простішого, нерезонансного випадку, як показано у [14], амплітуда нелінійних коливань істотно не залежить від частоти змушуючої сили. Це дає змогу диференціальні рівняння (7) замінити простішими, усередненими [16]

$$\begin{gathered}\dot{a}=-\frac{\varepsilon}{4\pi^2\omega}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\bar{f}\left(a\cos\psi,-a\omega\sin\psi,\theta\right)\sin\psi d\psi d\theta\\ \dot{\psi}=\omega-\frac{\varepsilon}{4\pi^2\omega a}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\bar{f}\left(a\cos\psi,-a\omega\sin\psi,\theta\right)\cos\psi d\psi d\theta.\end{gathered} \tag{8}$$

Отже, праві частини диференціальних рівнянь (8) відрізняються від правих частин рівнянь (7) на величину вищого порядку ніж ε, тому точності наближення не порушено. Одночасно диференціальні рівняння є набагато протішими у дослідженні: вони інтегруються для багатьох винадків у квадратурах чи їх досдідження можна провести з використанням якісної теорії [17].

Резонансний випадок. Тут можливі два випадки: а) при розгляді резонансу достатньо обмежитись розглядом тільки самого резонансу $\omega\approx\frac{p}{q}\mu$; б) крім самого резонансного явища, треба вивчити процес проходження через резонанс. У першому випадку величина $\omega-\frac{p}{q}\mu$ є малою порядку ε, у другому ж – вказане, взагалі кажучи, не виконується. Розглянемо спочатку перший випадок, тобто $\omega\approx\frac{p}{q}\mu$. Диференціальне рівняння (4) з урахуванням вказаного подамо у вигляді

$$\ddot{T}+\left(\frac{p}{q}\mu\right)^2 T=\varepsilon f\left(x,\dot{x},\theta\right)-\Delta T\,, \tag{9}$$

де $\Delta=\omega^2-\left(\frac{p}{q}\right)^2$ і є величиною порядку ε. Внаслідок заміни змінних в ньому відповідно до залежностей

$$T=a(t)\cos\psi,\ \dot{T}(t)=-\frac{p}{q}\mu a(t)\sin\psi \tag{10}$$

воно набуває вигляду

$$\dot{a}=-\frac{\varepsilon q}{p\mu}f\left(a\cos\psi,-\frac{p}{q}\mu a\sin\psi,\theta\right)\sin\psi-\frac{\Delta aq}{2p\mu}\sin 2\psi,$$

$$\dot{\psi}=\frac{p}{q}\mu-\frac{\varepsilon q}{ap\mu}f\left(a\cos\psi,-\frac{p}{q}\mu a\sin\psi,\theta\right)\cos\psi-\frac{\Delta q}{p\mu}\cos^2\psi\ . \tag{11}$$

Систему диференціальних рівнянь (11) зручно спростити, ґрунтуючись на таких міркуваннях: у резонансному випадку на коливний процес істотно впливає різниця фаз власних і вимушених коливань. Тому, вводячи у рівняння (11) вказаний параметр ($\gamma=\psi-\frac{p}{q}\theta$), що еквівалентно $\psi=\gamma+\frac{p}{q}\theta$, отримуємо

$$\dot{a}=-\frac{\varepsilon q}{p\mu}f\left(a\cos\left(\gamma+\frac{p}{q}\theta\right),-\frac{p}{q}\mu a\sin\left(\gamma+\frac{p}{q}\theta\right),\theta\right)\sin\left(\gamma+\frac{p}{q}\theta\right)-\frac{\Delta a}{2}\sin 2\left(\gamma+\frac{p}{q}\theta\right),$$

$$\dot{\gamma}=-\frac{\varepsilon q}{ap\mu}f\left(a\cos\left(\gamma+\frac{p}{q}\theta\right),-\frac{p}{q}\mu a\sin\left(\gamma+\frac{p}{q}\theta\right),\theta\right)\sin(\gamma+\theta)+\frac{\Delta q}{p\mu}\cos^2\left(\gamma+\frac{p}{q}\theta\right). \tag{12}$$

Із першого рівняння наведеної вище системи випливає, що за один період дії періодичного збурення амплітуда змінюється на величину порядку вище ε. Останнє дає змогу, не змінюючи точності наближення, замінити її простішою провівши усереднення її по фазі θ. Отже, резонансні співвідношення, що визначають закони зміни амплітуди і фази коливань, набувають вигляду

$$\dot{a}=-\frac{\varepsilon q}{2\pi p\mu}\int_0^{2\pi}f\left(a\cos\left(\gamma+\frac{p}{q}\theta\right),-\frac{p}{q}\mu a\sin\left(\gamma+\frac{p}{q}\theta\right),\theta\right)\sin\left(\gamma+\frac{p}{q}\theta\right)d\theta,$$

$$\dot{\gamma}=\frac{\Delta q}{2p\mu}-\frac{\varepsilon q}{2\pi ap\mu}\int_0^{2\pi}f\left(a\cos\left(\gamma+\frac{p}{q}\theta\right),-\frac{p}{q}\mu a\sin\left(\gamma+\frac{p}{q}\theta\right),\theta\right)\cos\left(\gamma+\frac{p}{q}\theta\right)d\theta. \tag{13}$$

Наведена система диференціальних рівнянь еквівалентна такій

$$\dot{a}=-\frac{\varepsilon q}{2\pi p\mu}\int_0^{2\pi}f\left(a\cos\left(\gamma+\frac{p}{q}\theta\right),-\frac{p}{q}\mu a\sin\left(\gamma+\frac{p}{q}\theta\right),\theta\right)\sin\left(\gamma+\frac{p}{q}\theta\right)d\theta,$$

$$\dot{\gamma}=\omega-\frac{p}{q}\mu-\frac{\varepsilon q}{2\pi ap\mu}\int_0^{2\pi}f\left(a\cos\left(\gamma+\frac{p}{q}\theta\right),-\frac{p}{q}\mu a\sin\left(\gamma+\frac{p}{q}\theta\right),\theta\right)\cos\left(\gamma+\frac{p}{q}\theta\right)d\theta. \tag{14}$$

Отже, у випадку резонансу амплітуда коливань змінюється відповідно до рівняння (14).

Набагато складнішим і одночасно важливішим з огляду на практичне значення є випадок переходу через резонанс. Як і в попередньому випадку, амплітуда коливань істотно залежить від різниці фаз власних і вимушених коливань $\gamma=\psi-\theta$, тобто $a=a(\gamma)$. З цією метою, вводячи у диференціальні рівняння вказаний параметр, маємо

$$\cos\psi\left(\frac{\partial\dot{a}}{\partial\gamma}\left(\omega-\frac{p}{q}\mu\right)-2a\omega\dot{\varphi}\right)+\sin\psi\left(-2\omega\dot{a}-a\frac{\partial\dot{\varphi}}{\partial\gamma}\left(\omega-\frac{p}{q}\mu\right)\right)=\varepsilon\sum_s\exp(isq\gamma)f_{1s}(a,\psi) \tag{15}$$

де $f_{1s}(a,\psi)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(a\cos\psi,-a\omega\sin\psi,\theta)\exp\left(-isq\left(\psi-\frac{p}{q}\theta\right)\right)d\theta$.

Прирівнюючи у правій і лівій частинах залежності (15) коефіцієнти при $\sin\psi$ і $\cos\psi$, отримуємо систему двох диференціальних рівнянь, яка є базовою для описання коливного процесу системи при проходженні через резонанс

$$\frac{\partial\dot{a}}{\partial\gamma}\left(\omega-\frac{p}{q}\mu\right)-2a\omega\dot{\varphi}=\frac{\varepsilon}{\pi}\sum_s \exp(isq\gamma)\int\limits_0^{\pi} f_{1s}(a,\psi)\cos\psi d\psi,$$

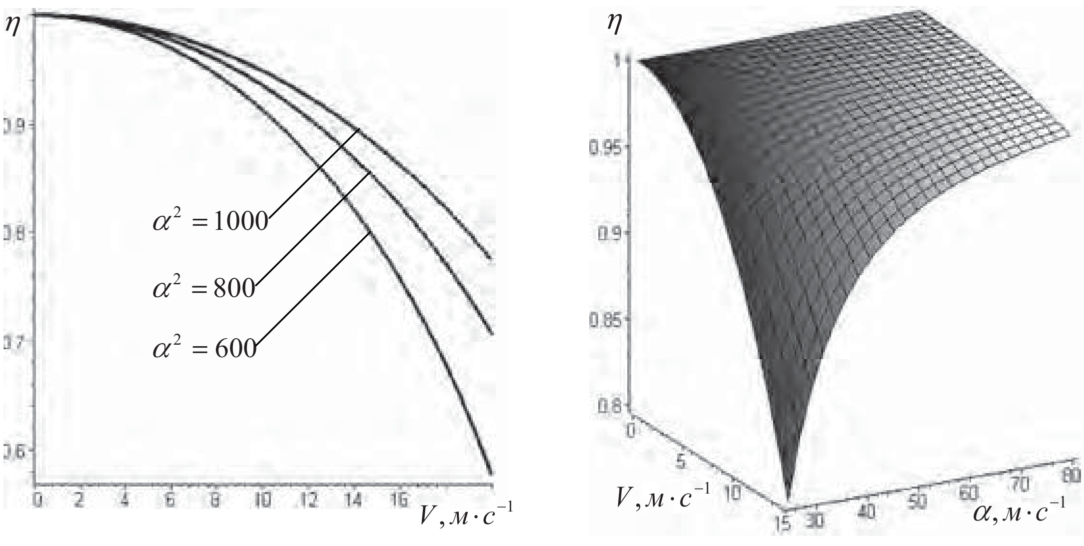
$$2\omega\dot{a}+a\frac{\partial\dot{\varphi}}{\partial\gamma}\left(\omega-\frac{p}{q}\mu\right)=-\frac{\varepsilon}{\pi}\sum_s \exp(isq\gamma)\int\limits_0^{\pi} f_{1s}(a,\psi)\sin\psi d\psi. \qquad (16)$$

Досліджувати систему диференціальних рівнянь (16) можна якісними методами. Якщо врахувати, що праві частини системи диференціальних рівнянь є 2π-періодичними по γ, то відповідно до теорії Пуанкаре [17], розв’язок системи диференціальних рівнянь з часом наближається до стаціонарного, який визначається із умови $\dot{a}=0, \dot{\gamma}=0$, що є еквівалентним

$$\frac{\partial\dot{a}}{\partial\gamma}\left(\omega-\frac{p}{q}\mu\right)=\frac{\varepsilon}{\pi}\sum_s \exp(isq\gamma)\int\limits_0^{\pi} f_{1s}(a,\psi)\cos\psi d\psi,$$

$$a\frac{\partial\dot{\varphi}}{\partial\gamma}\left(\omega-\frac{p}{q}\mu\right)=-\frac{\varepsilon}{\pi}\sum_s \exp(isq\gamma)\int\limits_0^{\pi} f_{1s}(a,\psi)\sin\psi d\psi.$$

Нижче на рисунку наведено відповідно відношення головних власних частот коливань незбуреної системи від швидкості і параметра α при $\beta=0$, знайдених відповідно до описаного наближеного методу та точного, отриманого на основі хвильової теорії руху [6].



а *б*

Залежності, які визначають відношення головних власних частот коливань незбурених систем, знайдених відповідно до описаного наближеного та точного методів

Висновки. Отримані розрахункові формули та графіки показують:

– при швидкостях поздовжнього руху, менших за $10\,м\cdot c^{-1}$, похибки знаходження наближених власних частот коливань реальних систем не перевищують 8 %, тому отримані шляхом узагальнення методу Ван-дер-Поля розрахункові формули можуть бути основою для наближеної оцінки впливу не тільки нелінійних і періодичних сил, але й поздовжньої швидкості руху на динамічні процеси одновимірних систем, які характеризуються сталою складовою швидкості поздовжнього руху. Вони вказують на значний вплив останньої на АЧХ згинних як резонансних, так і нерезонансних коливань;

– із зростанням поздовжньої швидкості руху частота власних згинних коливань зменшується і при швидкості поздовжнього руху $V = \sqrt{S / \rho}$ вона збігається із частотою середовища без урахування розтягуючої сили.

– резонансне значення амплітуди із зростанням швидкості поздовжнього руху збільшується.

Отже, викладена методика може слугувати основою для наближених інженерних розрахунків динамічних систем, математичними моделями руху яких є рівняння (1). Її без особливих труднощів можна узагальнити на складніші крайові умови та динамічні системи більш загального вигляду.

1.Башта О.Т. Некоторые вопросы колебаний трубопроводов с протекающей жидкостью // Рассеяние энергии при колебании механических систем. – К.: Наукова думка, 1968. – С. 23–29. 2. Мартинців М.П., Сокіл М.Б. Одне узагальнення методу Д'Аламбера для систем, які характеризуються поздовжнім рухом // Збірник науково-технічних праць УДЛТУ. – 2003. – Вип.13.4. – С.64–67. 3.Мартинців М.П., Сокіл Б.І., Сокіл М.Б. Хвильові процеси в однорідних нелінійно-пружних системах і методи їх дослідження // Лісове господарство, лісова, паперова і деревообробна промисловість. – Львів: УДЛТУ, 2003. – Вип. 28. – С.81–89. 4. Вікович І.А., Висоцька Х.А. Поздовжні коливання рухомої стрічки з урахуванням розсіяння енергії в матеріалі // Вібрації в техніці та технологіях. – Полтава. – 2005. – С.13–17. 5. Харченко Є.В., Сокіл М.Б. Вплив періодичного збурення на багаточастотні коливання одновимірних нелінійно пружних середовищ, які характеризуються поздовжнім рухом // Динаміка, міцність та проектування машин і приладів // Вісник Нац. ун-ту "Львівська політехніка". – Львів. – 2007. – №588. – С.81–89. 6. Харченко Є.В., Сокіл М.Б. Нелінійні процеси у середовищах, які характеризуються поздовжнім рухом і вплив способу закріпленні на їх коливання // Автоматизація виробничих процесів у машинобудуванні і приладобудуванні. – 2007. – № 41. – С.156–159. 7. Калиняк М.І., Барвінський А.Ф. Вільні поперечні коливання одного класу систем з урахуванням недосконалої пружності матеріалу // Доп. НАН УРСР. – 1977. – №5. – С.435–439. 8. Сокіл Б.І., Сліпчук А.М. Дослідження впливу стискаючої сили на нелінійні поперечні коливання рухомих одновимірних систем // "Вібрації в техніці і технологіях" 2005. – Вип. №3(4). – С. 93–99. 9. Сліпчук А.М. Нелінійні поперечні коливання пружної рухомої балки // "Вісник Нац. ун-ту "Львівська політехніка" "Оптимізація виробничих процесів і технічний контроль у машинобудуванні та приладобудуванні" – 2004. – №515. – С. 47–51. 10. Митропольский Ю.А., Мосеенков Б.И. Асимптотические решения уравнений в частных производных. – К.: Вища школа, 1976. – 584 с. 11. Neyfch, Hasan Ali. Perturbation Methods. – New Yorcetc: John Wiley Sons, 1972. – 425 p. 12. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике. – М.: Мир, 1972. – 276 с. 13. Bogolubov N.N., Mitropolsky Yu. A., Asimptotische Methode in der Theori der nichtlinearen Schwindungen.- Berlin: Acad. Verlag, 1965. – 453 s. 14. Wan der Pol. A Teory of the Amplutude of Free and Forced Triode Vibrations//Radio Review,1920, №1–2. 15. Казакевич В.В. Приближенный метод исследования некоторых типов сильно нелинейных систем // Труды Междунар. симпозиума по нелинейным колебаниям. Т.1. – К: Накова думка, 1963. – С.226 – 255. 16. Митропольский Ю.А. Метод усреднения в нелинейной механике. – К.: Наукова думка, 1972. – 440 с. 17. Проскуряков А.П. Метод Пуанкаре в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1977. – 256 с. 18. Каудерер Г. Нелинейная механика. – М.: ИЛ, 1961. – 777 с.