4. Застосування непараметричних та робастних методів оброблення дослідних даних дає змогу певною мірою дискримінувати вплив шумової складової розподілення та спрогнозувати необхідну кількість циклів спрацьовування ІЛОН для подальшого забезпечення енергетичної стабільності випромінювання (12,8± 0,91Дж) для зварювання..

1. Оптимізація режимів лазерного мікрозварювання пакетних струмопроводів з алюмінію // Вісник Нац. ун-ту “Львівська політехніка” „Оптимізація виробничих процесів і технічний контроль у машинобудуванні та приладобудуванні”. – 2009. 2. Григорьянц А.Г., Шиганов И.Н. Лазерная сварка металов. – М.: Высшая школа, 1988. 3. Новицкий П.В., Зограф И.А. Оценка погрішностей результатов измерений. – Л.: Энергоатомиздат, 1989. 4. Грановский В.А., Сирая Т.Н. Методы обработки экспериментальных данных при измерениях. – Л.: Энергоатомиздат, 1990. 5. Гнеденко Б.В., Беляев Ю.К. Математические методы в теории надежности. – М.: Наука, 1965.

УДК: 624.131.51.9

Т.-Н.М. Ванькович, Я.А. Зінько, М.В. Боженко
Національний університет “Львівська політехніка”,
кафедра механіки і автоматизації машинобудування

МЕТОД УСЕРЕДНЕННЯ ДЛЯ КОЛИВНИХ СТОХАСТИЧНИХ СИСТЕМ ІЗ ШВИДКОЗМІННОЮ ФАЗОЮ

Обґрунтовано метод усереднення для стохастичних систем з швидкозмінною фазою, до яких зводяться коливні процеси в істотно нелінійних системах. Формулюється теорема про оцінювання різниці між розв’язком точної і усередненої в першому наближенні систем на скінченному часовому інтервалі.

A method of averaging for arbitrary systems with quickly changing phase to what fluctuating processes in substantially nonlinear systems concern has discussed. The theorem of a dsfference estimation between a condusion of the systems exact and averaged in the first rapprochement in ended time interval is formulated.

Актуальність і постановка задачі. Метод усереднення є одним з асимптотичних методів, який широко застосовується і дає змогу досліджувати розв’язання складних диференціальних рівнянь або систем рівнянь, що виникають при вивченні багатьох задач фізики, механіки, теорії коливань.

Аналіз відомих досліджень і публікацій. За методом усереднення, який виник у небесній механіці, було отримано багато важливих результатів [1]. Строге обґрунтування методу усереднення дали Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольський та інші [2].

Суть методу усереднення полягає в тому, що досліджувана система диференціальних рівнянь вигляду $\frac{dx_i}{dt} = f_i(i=\overline{1,n})$, де праві частини f_i можуть залежати від функцій $\tilde{o}_j(j=\overline{1,n})$, аргумента t та інших різних фізичних параметрів, замінюється системою рівнянь $\frac{dx_i}{dt} = \vec{f}_i$, де $\vec{f}_i$ підбираються так, щоб, з одного боку, нова система рівнянь була простішою, ніж вихідна, а з іншого боку, щоб розв'язок нової системи достатньо точно описував розв'язок вихідної системи.

Перші результати із застосування і обґрунтування методу усереднення для диференціальних рівнянь з випадковими функціями отримав І.І. Гіхман [3] Для істотно нелінійних стохастичних систем, які зводяться до стандартного вигляду з швидко змінною фазою, вигляду

$$
\begin{gathered}
da = \varepsilon\, A(a,\psi,\varepsilon)\,dt + \sqrt{\varepsilon}B(a,\psi,\varepsilon)\,d\xi(t);\\
d\psi = [\omega(a) + \varepsilon C(a,\psi,\varepsilon)]dt + \sqrt{\varepsilon}D(a,\psi,\varepsilon)\,d\xi(t);\\
a(o) = a_o\,; \qquad \psi(o) = \psi_o
\end{gathered}
\tag{1}
$$

метод усереднення узагальнено Т.-Н.М. Цікайло (Ванькович) [4].

У системі (1) праві частини відносно змінних a і ε – аналітичні функції; відносно ψ 2π – періодичні ; $\xi(t)$ – випадковий вінерівський процес.

Усередненою системою для системи (1) у першому наближенні є система

$$
\begin{gathered}
d\vec{a} = \varepsilon A_o^{(o)}(\vec{a})dt + \sqrt{\varepsilon}B_{11}^{(o)}(\vec{a})d\xi_1(t) + \sqrt{\varepsilon}B_{12}^{(o)}(\vec{a})d\xi_2(t)\,;\\
d\vec{\psi} = \left[\omega(\vec{a}) + \varepsilon C_o^{(o)}(\vec{a})\right]dt + \sqrt{\varepsilon}B_{21}^{(o)}(\vec{a})d\xi_1(t) + \sqrt{\varepsilon}B_{22}^{(o)}(\vec{a})d\xi_2(t);\\
\vec{a}_o = a_o\,; \quad \vec{\psi}_o = \psi_o\,.
\end{gathered}
\tag{2}
$$

Тут $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$ – незалежні вінерівські процеси. Всі інші коефіцієнти визначаються за формулами

$$
\begin{gathered}
\grave{A}_{\hat{\imath}}^{(\hat{\imath})}(\vec{a}) = \frac{1}{2\pi}\int_o^{2\pi} A_o(\vec{a},\vec{\psi})d\vec{\psi}\,;\\
C_o^{(o)}(\vec{a}) = \frac{1}{2\pi}\int_o^{2\pi} C(\vec{a},\vec{\psi})d\vec{\psi}\,,
\end{gathered}
\tag{3}
$$

де $\grave{A}(\vec{a},\vec{\psi}) = A(a,\psi,\varepsilon)\big|_{\varepsilon=o}\,,\quad C(\vec{a},\vec{\psi}) = C(a,\psi,\varepsilon)\big|_{\varepsilon=o}\,.$

Матриця коефіцієнтів $\left\|Bij(\vec{a})\right\|_1^2$ визначається як квадратний корінь від симетричної матриці $\left\|Cij(\vec{a})\right\|_1^2$, елементи якої

$$
\begin{gathered}
C_{11}(\vec{a}) = \frac{1}{2\pi}\int_o^{2\pi} B^2(\vec{a},\vec{\psi})d\vec{\psi}\,;\\
C_{12}(\vec{a}) = C_{21}(\vec{a}) = \frac{1}{2\pi}\int_o^{2\pi} B(\vec{a},\vec{\psi})D(\vec{a},\psi)d\vec{\psi};\\
C_{22}(\vec{a}) = \frac{1}{2\pi}\int_o^{2\pi} D^2(\vec{a},\vec{\psi})d\vec{\psi}\,.
\end{gathered}
\tag{4}
$$

Щоб обґрунтувати запропонований метод усереднення для систем стохастичних диференціальних рівнянь з швидкозмінною фазою, доведемо теорему, яка дає можливість оцінити різницю між розв'язком точної системи (1) і усередненої в першому наближенні системи (2).

Виклад основного матеріалу. Зупинемося лише на формулюванні цієї теореми, бо доведення теореми є доволі громіздким.

Припустимо, що коефіцієнти системи (1) і (2) задовольняють такі умови:

1) усі коефіцієнти визначені на неперервні за сукупністю змінних при t є $[O,T]$,

де
$$T \approx \frac{L}{\varepsilon} \qquad (L = const)\ ;$$

2) всі коефіцієнти є обмеженими в області зміни a і ψ ;

3) можна вказати таку сталу $\tilde{N} > 0$, що для всіх $t \geq 0$ і для довільних значень a, ψ, a', ψ' з області зміни a і ψ задовольняються нерівності:

$$\left| \varepsilon A(a,\psi,\varepsilon) - \varepsilon A(a',\psi',\varepsilon) \right| +$$
$$+ \left| \sqrt{\varepsilon} B(a,\psi,\varepsilon) - \sqrt{\varepsilon} B(a',\psi',\varepsilon) \right| \leq C\left(|a - a'| + |\psi - \psi'| \right);$$

$$\left| \omega(a) + \varepsilon C(a,\psi,\varepsilon) - \omega(a') - \varepsilon C(a',\psi',\varepsilon) \right| + \left| \sqrt{\varepsilon} D(a,\psi,\varepsilon) - \sqrt{\varepsilon}\, D(a',\psi',\varepsilon) \right| \leq$$
$$\leq C\left(|a - a'| + |\psi - \psi'| \right);$$

$$\left| \varepsilon A_o^{(o)}(a,\varepsilon) - \varepsilon A_o^{(o)}(a',\varepsilon) \right| + \sum_{i=1}^{2} \left| \sqrt{\varepsilon} B_{1i}^{(o)}(a,\varepsilon) - \sqrt{\varepsilon} B_{1i}^{(o)}(a',\varepsilon) \right| \leq C\left(|a - a'| \right);$$

$$\left| \omega(a) + \varepsilon C_o^{(o)}(a,\varepsilon) - \omega(a') - \varepsilon C_o^{(o)}(a',\varepsilon) \right| + \sum_{i=1}^{2} \left| \sqrt{\varepsilon} B_{2i}^{(o)}(a,\varepsilon) - \sqrt{\varepsilon} B_{2i}^{(o)}(a',\varepsilon) \right| \leq$$
$$\leq C\left(|a - a'| \right).$$

Крім цього справедливі нерівності:

4)
$$\int_t^{t+\Delta} \left| \varepsilon A_o^{(o)}(a,\varepsilon) - \varepsilon A(a,\psi,\varepsilon) \right| \; dt \leq \varphi(\varepsilon)(1 + |a| + |\psi|);$$

$$\int_t^{t+\Delta} \left| \varepsilon C_o^{(o)}(a,\varepsilon) - \varepsilon C(a,\psi,\varepsilon) \right| \; dt \leq \varphi(\varepsilon)(1 + |a| + |\psi|);$$

5)
$$\int_o^t \left| \sum_{i=1}^{2} \sqrt{\varepsilon}\, B_{1i}^{(o)}(a,\varepsilon) - \sqrt{\varepsilon} B(a,\psi,\varepsilon) \right|^2 dt \leq \varphi(\varepsilon)(1 + |a|^2 + |\psi|^2)\ ;$$

$$\int_o^t \left| \sum_{i=1}^{2} \sqrt{\varepsilon}\, B_{2i}^{(o)}(a,\varepsilon) - \sqrt{\varepsilon} D(a,\psi,\varepsilon) \right|^2 dt \leq \varphi(\varepsilon)(1 + |a|^2 + |\psi|^2)\ ,$$

де функція $\varphi(\varepsilon)$ не залежить від a та ψ і $\varphi(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Тоді справедлива така теорема.

<u>Теорема.</u> Нехай коефіцієнти систем (1) і (2) задовольняють умови 1) – 5). Тоді для як завгодно малого $\eta > 0$ і як завгодно великого $L > 0$ можна вказати таке $\varepsilon_o > 0,$ що за умови $0 < \varepsilon < \varepsilon_o$ на відрізку $0 \le t \le \frac{L}{\varepsilon}$ виконуються нерівності

$$M|\vec{a} - a|^2 < \eta, \qquad M|\vec{\psi} - \psi|^2 < \eta,$$

де M – математичне сподівання.

Висновок. Як видно з теореми, метод усереднення стохастичних диференціальних рівнянь з швидкозмінною фазою, які описують коливні процеси в істотно нелінійних системах з випадковими збуреннями, дає змогу отримати результати з достатньою точністю.

1. Митропольський Ю.А. Метод усреднения в нелинейной механике. – К.: Наукова думка, 1971. – 440 с. 2. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – 501 с. Гихман И.И. О некоторых дифференциальных уравнениях со случайными функциями / Укр. мат. журнал. – 1950. – Т.2. – № 3. – С. 45–69. Цикайло Т.-Н.М. Исследование случайных колебаний в существенно нелинейных автономних стохастических системах. – В кн.: Аналитические методы исследования нелинейных колебаний. – К.: Ин-т математики АН УССР, 1980. – С. 161–168.

УДК 621.86.534-16

І.А. Вікович, Х.А. Висоцька, Ю.Р. Оленюк
Національний університет "Львівська політехніка",
кафедра транспортних технологій

ВИМУШЕНІ КОЛИВАННЯ ПІДВІСНИХ ВАНТАЖОТРИМКИХ КОНВЕЄРІВ

Розроблено математичну модель вимушених поздовжніх коливань підвісних вантажотримких конвеєрів у вигляді континуальної системи із замкнутим контуром.

It was devise a mathematical model of the suspended weightholding conveyors as continual a system in a view of dispersion of energy in the material.

Вступ. Підвісні вантажотримкі конвеєри набули широкого застосування в різних галузях промисловості для переміщення виробів (деталей, вузлів, невеликих агрегатів і складальних одиниць тощо) і напівфабрикатів, а також на складах і терміналах для переміщення автоматизованого складування поштучних вантажів під час навантажувально-розвантажувальних робіт. Переважно підвісні вантажотривкі конвеєри встановлюють у вигляді замкнутих контурів з просторовими прямолінійними і криволінійними траєкторіями руху. Довжина цих конвеєрів є в межах від декількох десятків до сотень метрів, а на окремих підприємствах довжина їх може сягати декілька кілометрів. Значна довжина і певна податливість в осьовому напрямі, циклічність зубчатого приводу конвеєра, а також наявність фрикційних явищ у цих конвеєрах призводять до