

Висновки

Математичне моделювання фільтрації рідини в пористих середовищах на основі механіки мікронеоднорідних середовищ дає можливість розв'язувати багато важливих задач. Зокрема отримані формули для знаходження проникливості тріщинувато-пористих середовищ, на основі яких можна розробити методіку оцінювання проникливості, враховуючи геометричні параметри порового простору. Рівняння фільтрації отримано шляхом усереднення рівнянь руху в класичній теорії пружності. Такий підхід дає можливість розглядати сумісно процес фільтрації рідини та зміну напруженого стану в пласті внаслідок фільтрації. Крім цього, врахування електрокінетичного ефекту дає можливість пояснити появу аномального магнітного поля поблизу свердловин у процесі їх експлуатації.

1. Седов Л.И. *Механика сплошной среды*. – М.: Наука, 1976. – 536 с. 2. Шермергор Т.Д. *Теория упругости микронеоднородных сред*. – М.: Наука, 1977. – 400 с. 3. Барренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжык В.М. *Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа*. – М.: Недра, 1972. – 288 с.

УДК 536.24

В. Гавриш

Національний університет “Львівська політехніка”,
кафедра програмного забезпечення

МОДЕЛЮВАННЯ ТЕМПЕРАТУРНИХ РЕЖИМІВ У ТЕРМОЧУТЛИВОМУ ШАРІ З ТЕПЛОВИДІЛЯЮЧИМ ВКЛЮЧЕННЯМ ПАРАЛЕЛЕПЕДНОЇ ФОРМИ МАЛИХ РОЗМІРІВ

© Гавриш В., 2010

Розглядається стаціонарна нелінійна задача теплопровідності для ізотропного шару з чужорідним тепловиділяючим паралелепедним включенням малих розмірів із тепловіддачею. Запропонована методика розв'язування цієї задачі та її застосування для конкретної залежності коефіцієнта теплопровідності матеріалу шару від температури.

Ключові слова: температура, теплопровідність, стаціонарна, ізотропний, включення, тепловіддача.

The steady state nonlinear problem of thermal conduction for isotropic layer with foreign heat dissipating parallelepipedic inclusion of a small size with heat dissipation has been considered. The methodology of this problem solution and its application for the substance thermal-conductivity coefficients of the layer on temperature has been offered.

Keywords: temperature, thermal conduction, steady state, isotropic, inclusion, heat dissipation.

Вступ

Побудова розв'язків – як аналітичних, так і числових – для задач теплоперенесення має наукове, практичне та економічне значення. Теплові режими конструкцій значною мірою визначають їхні якісні та кількісні характеристики і характеризуються температурними полями або величинами, які визначаються із цих полів, а саме – значеннями абсолютних температур, перепадами температур у просторі та часі, поведінкою температури та її градієнтів на граничних поверхнях конструкцій з різними заданими граничними умовами і на поверхнях спряження різнорідних елементів конструкцій, часом встановлення заданого розподілу температури або перепадів

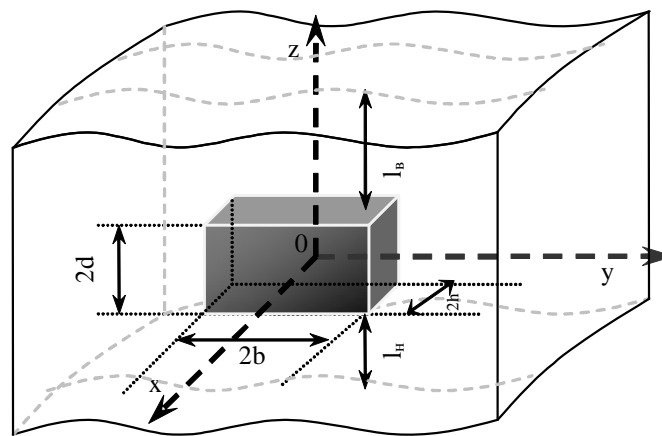
температур і т.д. Температурні поля, розподіл температур у просторі та часі отримуються у результаті дослідження побудованої математичної моделі явища теплоперенесення як результат аналітичного або числового розв'язування чи проведення експерименту з фізичною моделлю. У деяких випадках математичне моделювання є єдиним джерелом інформації про температурні поля конструкцій, наприклад, поля в окремих елементах чи вузлах мікроелектронних пристроїв, поля в елементах літальних апаратів, енергетичних установок, які є недоступними для датчиків температури або теплового потоку. Тому побудова математичних моделей теплових режимів для різного роду конструкцій, які піддаються температурним впливам, є важливою задачею, оскільки багато якісних та кількісних показників оцінювання поведінки конструкцій частіше визначають, враховуючи температурні режими роботи. Задачі моделювання теплових режимів значно ускладнюються для термочутливих конструкцій кусково-однорідної структури.

Наближений аналітичний розв'язок лінійної стаціонарної задачі теплопровідності для півпростору з чужорідним тепловиділяючим паралелепіпедним включенням малих розмірів побудовано в роботі [1]. У праці [2] наведено розв'язок лінійної стаціонарної задачі теплопровідності для шару з тепловіддачею і тепловиділяючим включенням малих розмірів.

Загальні рівняння теплопровідності для термочутливих кусково-однорідних тіл наведено в працях [3, 4].

Постановка задачі

Розглянемо термочутливий в сенсі теплофізичних характеристик ізотропний шар, який містить паралелепіпедне включення з об'ємом $V_0 = 8 \cdot h \cdot b \cdot d$, в області $\Omega_0 = \{(x, y, z) : |x| \leq h, |y| \leq b, |z| \leq d\}$ якого діють рівномірно розподілені внутрішні джерела тепла з потужністю q_0 . Тіло, яке розглядається, віднесено до прямокутної декартової системи координат $(Oxyz)$ із початком в центрі включення. На граничних площинах чужорідного тепловиділяючого включення $\Pi_x^\pm = \{(\pm h, y, z) : |y| \leq b, |z| \leq d\}$, $\Pi_y^\pm = \{(x, \pm b, z) : |x| \leq h, |z| \leq d\}$ та $\Pi_z^\pm = \{(x, y, \pm d) : |x| \leq h, |y| \leq b\}$ виконуються умови ідеального теплового контакту, а на граничних площинах шару $K_\epsilon = \{(x, y, d + \ell_\epsilon) : |x| < \infty, |y| < \infty\}$ і $K_H = \{(x, y, -d - \ell_H) : |x| < \infty, |y| < \infty\}$ здійснюється конвективний теплообмін із зовнішнім середовищем зі сталою температурою t_c (рисунок).



Термочутливий шар з включенням паралелепіпедної форми

Для визначення стаціонарного температурного поля $t(x, y, z)$ в термочутливому шарі використаємо рівняння теплопровідності [3]

$$\operatorname{div}[\lambda(x, y, z, t) \cdot \operatorname{grad} t] = -Q(x, y, z), \quad (1)$$

де

$$\begin{aligned}\lambda(x, y, z, t) &= \lambda_1(t) + [\lambda_0(t) - \lambda_1(t)] \cdot N(x, h) N(y, b) N(z, d); \\ Q(x, y, z) &= q_0 N(x, h) N(y, b) N(z, d); \\ N(\zeta, \eta) &= S(\zeta + \eta) - S(\zeta - \eta);\end{aligned}\tag{2}$$

де $\lambda_1(t), \lambda_0(t)$ – коефіцієнти теплопровідності матеріалів шару та включення відповідно; $S(\zeta)$ – симетрична одинична функція.

Граничні умови запишуться у вигляді

$$\begin{aligned}\lambda_1(t) \frac{\partial t}{\partial z} \Big|_{z=d+l_e} &= \alpha_e (t_c - t \Big|_{z=d+l_e}), \quad \lambda_1(t) \frac{\partial t}{\partial z} \Big|_{z=-d-l_n} = \alpha_n \left(t \Big|_{z=-d-l_n} - t_c \right), \\ t \Big|_{|x| \rightarrow \infty} &= t \Big|_{|y| \rightarrow \infty} = 0, \quad \frac{\partial t}{\partial x} \Big|_{|x| \rightarrow \infty} = \frac{\partial t}{\partial y} \Big|_{|y| \rightarrow \infty} = 0,\end{aligned}\tag{3}$$

де α_e, α_n – коефіцієнти тепловіддачі з граничних площин шару K_e, K_n відповідно.

Припустимо, що розміри включення є малими величинами порівняно з відстанями l_e та l_n від граничних площин включення Π_z^\pm до граничних площин K_e і K_n шару. Введемо приведену теплопровідність $\Lambda_0 = \lambda_0 \cdot V_0$ включення, приведену потужність діючих в ньому джерел тепла $Q_0 = q_0 \cdot V_0$ і перейдемо у виразах (2) до границі для $h \rightarrow 0, b \rightarrow 0, d \rightarrow 0$, зберігаючи при цьому Λ_0 і Q_0 сталими та використавши відому границю $\lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{N(\zeta, \eta)}{2\eta} = \delta(\zeta)$.

У результаті отримаємо

$$\lambda(x, y, z, t) = \lambda_1(t) + \Lambda_0 \cdot \delta(x, y, z),\tag{4}$$

$$Q(x, y, z) = Q_0 \cdot \delta(x, y, z).\tag{5}$$

Тут $\delta(x, y, z)$ – дельта-функція Дірака.

Хоча локальна неоднорідність шару, яка описується співвідношенням (4), що містить дельта-функцію Дірака, формально зосереджена в початку координат, фактично вона характеризується скінченними розмірами, пов'язаними з об'ємом V_0 . Отже, за допомогою виразу (4) ефективно враховуються скінченні розміри включення [5].

Із врахуванням співвідношень (4) і (5) рівняння (1) перепишемо у вигляді

$$\operatorname{div}[\lambda_1(t) \cdot \operatorname{grad} t] = -\Lambda_0 \cdot \frac{\partial t(0, 0, z)}{\partial z} \Big|_{z=0}^* \delta(x, y) \cdot \delta'(z) - Q_0 \cdot \delta(x, y, z),\tag{6}$$

де

$$\frac{\partial t(0, 0, z)}{\partial z} \Big|_{z=0}^* = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial t(0, 0, z)}{\partial z} \Big|_{z=+0} + \frac{\partial t(0, 0, z)}{\partial z} \Big|_{z=-0} \right).$$

Тут враховано, що $\frac{\partial t(x, 0, 0)}{\partial x} \Big|_{x=0}^* = \frac{\partial t(0, y, 0)}{\partial y} \Big|_{y=0}^*$.

Лінеаризація рівняння теплопровідності (6)

Розглянемо змінну Кірхгофа [3]

$$\vartheta = \frac{1}{\lambda_1^0} \int_0^{t(x, y, z)} \lambda_1(\zeta) d\zeta,\tag{7}$$

продиференціювавши яку по x , y та z , отримаємо

$$\lambda_1^0 \frac{\partial \vartheta}{\partial \zeta} = \lambda_1(t) \frac{\partial t}{\partial \zeta} \quad (\zeta = x, y, z), \quad (8)$$

де λ_1^0 – опорний коефіцієнт теплопровідності шару.

Використавши вирази (8), рівняння (6) запишемо так:

$$\Delta \vartheta = -\frac{1}{\lambda_1^0} \left[\Lambda_0 \cdot \frac{\partial t(0,0,z)}{\partial z} \Big|_{z=0}^* \cdot \delta'(z) + Q_0 \cdot \delta(z) \right] \cdot \delta(x, y). \quad (9)$$

Граничні умови (3) із використанням виразу (7) матимуть вигляд

$$\lambda_1^0 \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \Big|_{z=d+l_g} = \alpha_g \left(t_c - t \Big|_{z=d+l_g} \right), \quad \lambda_1^0 \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \Big|_{z=-d-l_n} = \alpha_n \left(t \Big|_{z=-d-l_n} - t_c \right), \quad (10)$$

$$\vartheta \Big|_{|x| \rightarrow \infty} = \vartheta \Big|_{|y| \rightarrow \infty} = 0, \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \Big|_{|x| \rightarrow \infty} = \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \Big|_{|y| \rightarrow \infty} = 0.$$

Вважатимемо, що на граничних площинах шару K_g , K_n коефіцієнт теплопровідності не залежить від температури, тобто

$$\lambda_1(t) \Big|_{z=-d-l_n} = \lambda_1(t) \Big|_{z=d+l_g} = \lambda_1 = const.$$

Тоді зі співвідношення (7) одержимо

$$\lambda_1^0 \cdot \vartheta \Big|_{z=-d-l_n} = \lambda_1 \cdot t(x, y, -d-l_n), \quad \lambda_1^0 \cdot \vartheta \Big|_{z=d+l_g} = \lambda_1 \cdot t(x, y, d+l_g). \quad (11)$$

Використавши вирази (11), граничні умови (10) перепишемо

$$\lambda_1^0 \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \Big|_{z=d+l_g} = \alpha_g \left(t_c - \frac{\lambda_1^0}{\lambda_1} \cdot \vartheta \Big|_{z=d+l_g} \right), \quad \lambda_1^0 \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \Big|_{z=-d-l_n} = -\alpha_n \left(t_c - \frac{\lambda_1^0}{\lambda_1} \cdot \vartheta \Big|_{z=-d-l_n} \right), \quad (12)$$

$$\vartheta \Big|_{|x| \rightarrow \infty} = \vartheta \Big|_{|y| \rightarrow \infty} = 0, \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \Big|_{|x| \rightarrow \infty} = \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \Big|_{|y| \rightarrow \infty} = 0.$$

Побудова аналітичного розв'язку задачі (9), (12)

Застосувавши інтегральне перетворення Фур'є за координатами x та y до граничної задачі (9), (12), приходимо до звичайного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$\frac{d^2 \bar{\vartheta}}{dz^2} - \gamma^2 \bar{\vartheta} = \frac{1}{2\pi \lambda_1^0} \cdot \left[\Lambda_0 \cdot \frac{\partial t(0,0,z)}{\partial z} \Big|_{z=0}^* \cdot \delta'(z) - Q_0 \cdot \delta(z) \right] \quad (13)$$

і таких граничних умов:

$$\lambda_1^0 \frac{d \bar{\vartheta}}{dz} \Big|_{z=d+l_g} = \alpha_g \cdot \left(t_c \cdot \delta(\alpha, \beta) - \frac{\lambda_1^0}{\lambda_1} \bar{\vartheta} \Big|_{z=d+l_g} \right), \quad (14)$$

$$\lambda_1^0 \frac{d \bar{\vartheta}}{dz} \Big|_{z=-d-l_n} = \alpha_n \cdot \left(\frac{\lambda_1^0}{\lambda_1} \bar{\vartheta} \Big|_{z=-d-l_n} - t_c \cdot \delta(\alpha, \beta) \right),$$

де $\bar{\vartheta} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{idx} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{iby} dy$ – трансформанта функції ϑ ; $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$.

Загальний розв'язок рівняння (13) має вигляд

$$\bar{\vartheta} = c_1 e^{\gamma z} + c_2 e^{-\gamma z} + \frac{1}{2\pi \lambda_1^0} \left[\Lambda_0 \cdot \frac{\partial t(0,0,z)}{\partial z} \Big|_{z=0}^* \cdot \operatorname{ch} \gamma z - Q_0 \cdot \frac{\operatorname{sh} \gamma z}{\gamma} \right] \cdot S(z).$$

Тут c_1 , c_2 – сталі інтегрування.

Використавши граничні умови (14), отримаємо такий частковий розв'язок задачі (3), (4):

$$\begin{aligned} \bar{\vartheta} = & -\frac{1}{4\pi\lambda_1^0\Delta} \cdot \left\{ \Lambda_0 \cdot \frac{\partial t(0,0,z)}{\partial z} \Big|_{z=0}^* \cdot [\alpha_n^- \cdot e^{-\gamma|z|} \cdot \text{sgn } z - \alpha_e^+ \cdot e^{2\gamma(2d+l_e+l_n)} \cdot e^{-\gamma|z|} \cdot \text{sgn } z + \right. \\ & \left. + e^{2\gamma d} (\alpha_n^+ \cdot e^{-\gamma(z-2l_e)} - \alpha_e^- \cdot e^{\gamma(z+2l_n)}) \right] + \\ & \left. + \frac{Q_0}{\gamma} [\alpha_n^- \cdot e^{\gamma|z|} + \alpha_e^+ \cdot e^{2\gamma(2d+l_e+l_n)} \cdot e^{-\gamma|z|} + e^{2\gamma d} \cdot (\alpha_e^- \cdot e^{\gamma(z+2l_n)} + \alpha_n^+ \cdot e^{-\gamma(z-2l_e)})] \right\} \end{aligned} \quad (15)$$

де $\Delta = \alpha_e^- \alpha_n^- - \alpha_e^+ \alpha_n^+ \cdot e^{2\gamma(2d+l_e+l_n)}$; $\alpha_e^\pm = (\lambda_1 \gamma \pm \alpha_e)$; $\alpha_n^\pm = (\lambda_1 \gamma \pm \alpha_n)$.

Перейшовши у формулі (15) до оригіналу, знаходимо вираз для функції ϑ

$$\vartheta = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \cos \alpha x \cos \beta y \bar{\vartheta} d\alpha d\beta. \quad (16)$$

Підставивши конкретну залежність коефіцієнта теплопровідності матеріалу шару у співвідношення (7), (16), приходимо до нелінійного рівняння для визначення величини $\frac{\partial t(0,0,z)}{\partial z} \Big|_{z=0}^*$.

Шукане температурне поле для нелінійної граничної задачі теплопровідності (1), (3) визначається з нелінійного рівняння, отриманого з використанням співвідношень (7), (16) після підстановки в них конкретного виразу залежності коефіцієнта теплопровідності матеріалу шару.

Часткові приклади та аналіз отриманих результатів

На практиці зустрічаються такі залежності коефіцієнта теплопровідності від температури [6,7]:

$$\begin{aligned} 1) \quad \lambda &= \lambda^0 (1 - kt), \\ 2) \quad \lambda &= \lambda^0 t^3, \end{aligned} \quad (17)$$

де λ^0 і k – опорний і температурний коефіцієнти теплопровідності.

Тоді з використанням виразів (7), (16) отримаємо формули для визначення температури t для наведених залежностей (17) коефіцієнта теплопровідності від температури

$$1) \quad t = \frac{1 - \sqrt{1 - 2k_1 \vartheta}}{k_1}. \quad (18)$$

Значення величини $\frac{\partial t(0,0,z)}{\partial z} \Big|_{z=0}^*$ отримується у результаті розв'язування такого кубічного рівняння:

$$k_1 I_3 \cdot \left(\frac{\partial t(0,0,z)}{\partial z} \Big|_{z=0}^* \right)^3 + (k_1 \cdot I_4 - I_1) \cdot \left(\frac{\partial t(0,0,z)}{\partial z} \Big|_{z=0}^* \right)^2 - 2I_1 I_2 \frac{\partial t(0,0,z)}{\partial z} \Big|_{z=0}^* - I_2^2 + 1 = 0,$$

де

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{\Lambda_0}{2\pi^2 \lambda_1^0} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\gamma}{\Delta} [\alpha_+^+ e^{2\gamma(2d+l_e+l_n)} - \alpha_-^- + e^{2\gamma d} (\alpha_+^- \cdot e^{2\gamma l_n} - \alpha_-^+ e^{2\gamma l_e})] d\alpha d\beta, \\ I_2 &= \frac{Q_0}{2\pi^2 \lambda_1^0} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\gamma}{\Delta} \cdot e^{2\gamma d} (\alpha_+^- e^{2\gamma l_n} - \alpha_-^+ e^{2\gamma l_e}) d\alpha d\beta, \quad I_3 = \frac{\Lambda_0}{\pi^2 \lambda_1^0} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{\Delta} \cdot e^{2\gamma d} (\alpha_+^+ e^{2\gamma l_n} - \alpha_-^- e^{2\gamma l_e}) d\alpha d\beta, \\ I_4 &= \frac{Q_0}{\pi^2 \lambda_1^0} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{\gamma \Delta} [\alpha_-^- + \alpha_+^+ e^{2\gamma(2d+l_e+l_n)} + e^{2\gamma d} (\alpha_+^- e^{2\gamma l_n} - \alpha_-^+ e^{2\gamma l_e})] d\alpha d\beta. \end{aligned}$$

$$2) \quad t = \sqrt[4]{4\vartheta}. \quad (19)$$

Для цього випадку величину $\left. \frac{\partial t(0,0,z)}{\partial z} \right|_{z=0}^*$ можна отримати, розв'язавши нелінійне алгебраїчне рівняння

$$8 \cdot \left[I_3 \left. \frac{\partial t(0,0,z)}{\partial z} \right|_{z=0}^* + I_4 \right]^3 \cdot \left(\left. \frac{\partial t(0,0,z)}{\partial z} \right|_{z=0}^* \right)^4 + \left[I_1 \cdot \left. \frac{\partial t(0,0,z)}{\partial z} \right|_{z=0}^* + I_2 \right]^4 = 0.$$

Числові розрахунки показують, що врахування наведених залежностей коефіцієнта теплопровідності від температури приводить до зменшення температурного поля порівняно з нетермочутливою системою (теплофізичні параметри не залежать від температури) на 3,8% для першого випадку і 3,5% для другого випадку, якщо матеріалом шару є кераміка ВК-94-1, а матеріалом включення – молібден.

Висновки

За допомогою отриманого аналітичного розв'язку (16) для змінної Кірхгофа із використанням наведених залежностей (17) коефіцієнта теплопровідності від температури, із врахуванням формул (18), (19) побудовано нові алгоритми та створено програмні засоби, які дають змогу оцінити температурні градієнти в області чужорідного включення та спрогнозувати режими роботи конструкцій електронних пристроїв, що приводить до підвищення їх термостійкості та збільшення терміну експлуатації.

1. Коляно Ю.М. Температурное поле в полупространстве с параллелепипедным тепловыделяющим включением / Ю.М. Коляно, Ю.М. Кричевец, Е.Г. Иваник, В.И. Гаврыш // Инж. – физ. журнал. – 1989. – 57, №5. – С. 849 – 853. 2. Fedasyuk Dmytro. Heat exchange simulation for layer with heat-releasing parallelepiped-shape insertion / Dmytro Fedasyuk, Vasul Gavrysh, Andriy Kuzmin // Proceedings of the Xth Integrational Conference CADSM 2009 “The experience of Designing and Application of CAD Systems in Microelectronics” – Polyana – Svalyava (Zakarpattya), Ukraine. – 2009. – P. 26 – 28. 3. Подстригач Я.С. Термоупругость тел неоднородной структуры / Я.С. Подстригач, В.А. Ломакин, Ю.М. Коляно. – М.: Наука, 1984. – 386 с. 4. Коляно Ю.М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела. – К.: Наук. думка, 1992. – 280 с. 5. Косевич А.М. Физическая механика реальных кристаллов. – К.: Наук. думка, 1981. – 328 с. 6. Ломакин В.А. Теория упругости неоднородных тел. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976. – 376 с. 7. Берман Р. Теплопроводность твердых тел. – М.: Мир, 1979. – 288 с.