

## МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ФІЛЬТРАЦІЇ РІДИНИ В НЕОДНОРІДНОМУ ПОРИСТОМУ ПЛАСТІ З ВРАХУВАННЯМ ЕЛЕКТРОКІНЕТИЧНОГО ЕФЕКТУ

© Федоришин О., Струк Є., 2010

Розглядається двофазне в'язко-пружне стохастично-неоднорідне середовище, яке моделює насичену рідиною проникливу гірську породу. Для цього середовища отримано рівняння фільтрації та формули для проникливості. На основі розв'язку рівняння фільтрації для безмежного середовища з однією свердловиною отримано потоки рідини та густину струму, викликаного електрокінетичним ефектом. Розраховане магнітне поле навколо свердловини, викликане цим струмом.

**Ключові слова:** фільтрація, проникливість, густина струму, магнітне поле.

The two-phase viscoelastic stochastic inhomogeneous medium which models the rock saturated with a fluid is considered. For this medium is received the equation of a filtration and the permeability formula. On the basis of the solution of equation of filtration for the infinite medium with one chink are received streams of a liquid and density of the electric current caused by electrokinetic effect. The magnetic field round a chink, caused by this current is calculated.

**Keywords:** filtering, insight, current density, magnetic field.

### Вступ

У процесі експлуатації свердловин, нафтових або артезіанських, навколо них виникає аномальне магнітне поле. Природу цього поля остаточно не з'ясовано, але є підстави вважати, що воно з'являється внаслідок електрокінетичних ефектів у насичених пористих середовищах. Відомо, що на границі між твердою і рідкою фазами завжди з'являються заряджені частинки. Рідина, рухаючись в процесі фільтрації, може захоплювати за собою ці частинки, утворюючи таким чином електричний струм, який не є викликаний зовнішнім електричним полем. Це явище відоме як сейсмоелектричний ефект другого роду. Наведено математичну модель сейсмоелектричного ефекту в пористому пласті навколо свердловини і показано принципову можливість спостереження за фільтрацією рідини за даними вимірювання аномального магнітного поля.

### Теорія фільтрації рідини в пористих середовищах

Теорія фільтрації вивчає рух рідин і газів у пористих середовищах. Пористе середовище є сукупністю хаотично розташованих пустот в твердому скелеті, з'єднаних між собою каналами та мікротріщинами. Ці пустоти, як правило, є заповнені рідиною, водою або нафтою. Спільний рух рідини і твердого тіла описуються рівняннями руху для в'язкопружного тіла і рівнянням нерозривності [1].

$$\begin{aligned} \operatorname{Div} \sigma(\vec{r}, t) - \rho(\vec{r}) \frac{\partial \vec{v}(\vec{r}, t)}{\partial t} &= 0, \\ \sigma(\vec{r}, t) &= C(\vec{r}) \varepsilon(\vec{r}, t) + \eta(\vec{r}) \frac{\partial \varepsilon^d(\vec{r}, t)}{\partial t}, \\ \operatorname{Rot} \varepsilon(r, t) &= 0, \quad \operatorname{div} \rho(\vec{r}) \vec{v}(\vec{r}, t) + \frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t} = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Тут  $\sigma(\vec{r}, t), \varepsilon(\vec{r}, t)$  – тензори напружень і деформацій,  $\vec{v}(\vec{r}, t)$  – швидкість,  $\varepsilon^d$  – девіаторна частина тензора деформації,  $C_{ijkl}(\vec{r}) = \lambda(\vec{r})\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\vec{r})(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{jk}\delta_{il})$  – модулі пружності,  $\rho(\vec{r}, t)$  – густина,  $\eta(\vec{r})$  – в'язкість. Всі приведені характеристики є випадковими функціями координат. В механіці деформованого твердого тіла розроблені методи статистичного усереднення таких рівнянь[2]. Зокрема розроблені методи знаходження математичних сподівань випадкових функцій, у результаті чого отримано такі самі рівняння, але з ефективними матеріальними параметрами середовища  $C^*, \eta^*, \rho^*$  [2], у результаті чого система рівнянь (1) набуде вигляду:

$$\begin{aligned} \text{Div } \sigma(\vec{r}, t) - \rho^* \frac{\partial \vec{v}(\vec{r}, t)}{\partial t} &= 0, \\ \sigma(\vec{r}, t) &= C^* \varepsilon(\vec{r}, t) + \eta^* \frac{\partial \varepsilon^d(\vec{r}, t)}{\partial t}, \\ \text{Rot } \varepsilon(r, t) &= 0, \quad \text{div } \rho^* \vec{v}(\vec{r}, t) + \frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t} = 0. \end{aligned}$$

Однак тут нас буде цікавити не рух середовища загалом, а рух рідини в порах. З цією метою ми будемо шукати умовні математичні сподівання, тобто математичні сподівання випадкових функцій у деякій точці, за умови, що в цій точці знаходиться тверда або рідка фаза. У результаті для скелета отримаємо рівняння у вигляді рівнянь руху в теорії пружності

$$\text{Div } \sigma_s - \rho_s \frac{\partial \vec{v}_s}{\partial t} = 0; \quad \sigma_s = C_s \varepsilon_s; \quad \text{Rot } \varepsilon_s = 0, \quad (2)$$

а для рідини – у вигляді рівнянь гідродинаміки.

$$\text{Div } \sigma_f - \rho_f \frac{\partial \vec{v}_f}{\partial t} = 0; \quad \sigma_f = -p_f + \eta_f \frac{\partial \varepsilon_f^d}{\partial t}; \quad (3)$$

$$\text{div } \rho_f \vec{v}_f + \frac{\partial \rho_f}{\partial t} = 0 \quad (4)$$

Індексом  $f$  позначені матеріальні і польові функції в рідкій фазі, індексом  $s$  – у скелеті,  $p_f$  – тиск в рідині. Для знаходження зв'язку між  $\sigma_s$  та  $\sigma_f$ , а також між  $\varepsilon_s$  та  $\varepsilon_f$  слід використати очевидні співвідношення [2]

$$\sigma = C^* \varepsilon; \quad \sigma = c_s \sigma_s + c_f \sigma_f; \quad \varepsilon = c_s \varepsilon_s + c_f \varepsilon_f; \quad \rho^* = c_s \rho_s + c_f \rho_f; \quad p_f = K \varepsilon_f,$$

де  $c_s, c_f$  – об'ємні концентрації твердої та рідкої фази відповідно,  $K$  – модуль стиску рідини. Надалі у зв'язку з тим, що нас цікавить тільки рух рідини в порах, систему рівнянь (2) не розглядатимемо, а розглядатимемо тільки системи рівнянь (3) та (4). Тому для зручності індекс  $f$  будемо опускати. В процесі фільтрації швидкість руху рідини змінюється слабо, тому інерційним членом  $\partial v / \partial t$  в (3) можна знехтувати. У цьому випадку матимемо

$$-\text{grad } p + \eta \text{Div } \frac{\partial \varepsilon^d}{\partial t} = 0. \quad (5)$$

Тепер необхідно знайти зв'язок між кількістю рідини, яка протікає крізь пористе середовище і компонентами тензора швидкостей деформацій. Розглянемо для цього дві прості задачі з гідродинаміки: рух в'язкої рідини між двома паралельними площинами і рух в'язкої рідини в капілярі. Швидкість руху в'язкої рідини між двома паралельними площинами розподілена по параболі, як це показано на рис. 1. Біля площин швидкість руху рівна нулю, а посередині – максимальна, тобто

$$v(y) = v_0 \left( 1 - 4 \frac{y^2}{d^2} \right). \quad (6)$$

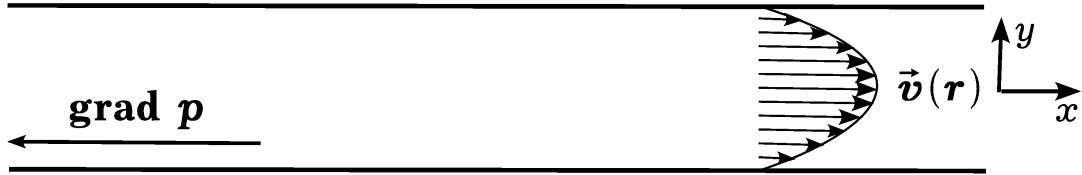


Рис. 1. Розподіл швидкості руху в'язкої рідини між двома паралельними площинами

Тут  $v_0$  — максимальна швидкість,  $d$  — ширина каналу між площинами. Тепер з (6) можна знайти тензор швидкостей деформації  $\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} = \frac{1}{2}(\partial v_i / \partial x_j + \partial v_j / \partial x_i)$ , причому  $x_1 \equiv x$ ,  $x_2 \equiv y$ ,  $x_3 \equiv z$ .

У результаті матимемо

$$\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial y} = -4 \frac{v_0 y}{d^2}, \quad \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial t} = 0. \quad (7)$$

Тепер, враховуючи рівняння (5), з формул (7) знайдемо

$$\left( \text{Div} \frac{\partial \varepsilon^d}{\partial t} \right)_x = \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial y \partial t} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{13}}{\partial z \partial t} - \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial t} \right) = -4 \frac{v_0}{d^2}. \quad (8)$$

Такий розподіл швидкостей буде мати місце для середовищ з дископодібними тріщинами. Знайдемо середній потік рідини  $\bar{q}(\bar{r}, t)$  через одиницю поперечного перерізу  $\Sigma$  пористого середовища

$$\bar{q} = \frac{c}{S} \iint_{\Sigma} \vec{v}(y) d\Sigma = \frac{c}{d} \int_{-d/2}^{+d/2} \vec{v}(y) dy = \frac{2}{3} c v_0, \quad (9)$$

де  $c$  — пористість середовища. Тепер, враховуючи (8) і (9), рівняння (5) можна привести до вигляду

$$\text{grad } p = -\frac{\eta}{k} \bar{q}, \quad (10)$$

де

$$k = \frac{c d^2}{6}. \quad (11)$$

Формула (10) відома як закон Дарсі, який був встановлений експериментально [3]. Коефіцієнт  $k$  — проникливість середовища, він має розмірність площі. Формулою (11) визначається проникливість одного каналу шириною  $d$ , або проникливість середовища з паралельно орієнтованими дископодібними тріщинами. Якщо середовище є статистично ізотропним, то тріщини в ньому хаотично орієнтовані. У такому разі формулу (10) слід усереднити за всіма можливими напрямками. Відомо, що усереднення довільної векторної величини по всіх можливих напрямках з однаковим розподілом модуля вектора зводиться до множення модуля вектора на  $1/3$  [2]. Тоді проникливість середовища з хаотично орієнтованими дископодібними тріщинами дорівнюватиме

$$k = \frac{c d^2}{18}. \quad (12)$$

Для знаходження проникливості середовищ з голкоподібними тріщинами, тобто для зернистих середовищ з міжпоровими каналами, необхідно розглянути рух в'язкої рідини в капілярі. Швидкість розподілена так само, як на рис. 1, за винятком того, що розподіл буде осесиметричним, і замість декартових координат  $(y, z)$  слід взяти циліндричні координати  $(r, \varphi)$ , тоді формула (6) набуде вигляду  $\vec{v}(r) = \vec{v}_0 (1 - r^2/r_0^2)$ , де  $r_0$  — радіус капіляра. За аналогією з випадком для дископодібних тріщин матимемо

$$\text{Div} \frac{\partial \varepsilon^d}{\partial t} = \frac{2v_0}{r_0^2}; \quad q = \frac{c v_0}{2},$$

і проникливість одного капіляра рівна

$$k = \frac{cr_0^2}{4} = \frac{cd^2}{16}. \quad (13)$$

У формулі (13) враховано, що  $d = 2r_0$ . Проникливість середовища з хаотично орієнтованими голкоподібними порами внаслідок усереднення за напрямками дорівнює

$$k = \frac{cd^2}{48}.$$

Далі, якщо підставити закон Дарсі (10) в рівняння нерозривності (4) і врахувати закон Гука у вигляді  $p = K \rho / \rho_0$ , де  $\rho_0$  – густина рідини при нульовому тиску, то отримаємо рівняння фільтрації рідини у пористому середовищі.

$$\Delta p - \frac{1}{M} \frac{\partial p}{\partial t} = 0, \quad (14)$$

де  $M = kK/\eta$ . Це рівняння подібне до добре відомого рівняння теплопровідності.

### Свердловина в пористому пласті. Постановка задачі і крайові умови

Для знаходження пластового тиску і потоків рідини в пористому пласті необхідно розв'язати рівняння (14) при заданих крайових і початкових умовах. Розглянемо циліндричну свердловину в безмежному статистично-однорідному пористому пласті. Будемо розглядати пласт як двовимірний простір, тобто всі величини є усередненими по товщині пласта. На контурі свердловини  $\Gamma$  задано потік, який визначає дебіт свердловини.

$$\oint_{\Gamma} \bar{q}(\bar{r}, t) \bar{n} d\Gamma = Q(t). \quad (15)$$

Тут  $\bar{n}$  – зовнішня нормаль на контурі  $\Gamma$ . Задачу розв'язуватимемо за допомогою фундаментального розв'язку. Для цього розширимо область визначення функції  $p(\bar{r}, t)$  на весь простір, а на границі свердловини задамо фіктивні сили  $f(\bar{r}, t)$ , які забезпечать нам заданий дебіт. Використовуючи розв'язок рівняння (14) в інтегральному вигляді, матимемо

$$p(\bar{r}, t) = \int_0^t d\tau \oint_{\Gamma} \frac{f(\bar{r}')}{4\pi(t-\tau)} e^{-\frac{(\bar{r}-\bar{r}')^2}{4M(t-\tau)}} d\Gamma'. \quad (16)$$

Тут і надалі штрихом позначатимуться просторові змінні, за якими проводиться згортка. Якщо середовище буде статистично ізотропним, і свердловина матиме круглу форму, то задача стає осесиметричною. Тоді для потоку рідини, враховуючи (10), отримаємо:

$$\bar{q}(\bar{r}, t) = \frac{k}{2\pi\eta} \int_0^{2\pi} \frac{f(R, \varphi)(\bar{r} - \bar{r}')}{(\bar{r} - \bar{r}')^2} e^{-\frac{(\bar{r}-\bar{r}')^2}{4Mt}} R d\varphi, \quad (17)$$

де  $(\bar{r} - \bar{r}')^2 = r^2 + R^2 - 2rR \cos \varphi$ ,  $(\bar{r} - \bar{r}')_x = x - R \cos \varphi$ ,  $(\bar{r} - \bar{r}')_y = y - R \sin \varphi$ ,  $R$  – радіус свердловини. Формулу (17) можна використати для знаходження  $\bar{q}(\bar{r}, t)$ . Параметр  $h = \eta/K$  має розмірність часу, його можна прийняти за умовну “годину”. На рис. 2 показано залежність  $q(\bar{r}, t)$  при різних значеннях  $t$  та за умови, що  $f(R, \varphi) = const$ . Як бачимо, розв'язок дуже сильно локалізований в просторі, але область локалізації розширюється з часом. З формули (17) знайдемо ще дивергенцію потоку.

$$\text{div } \bar{q} = -\frac{kf(R)R}{4\pi\eta Mt} \int_0^{2\pi} e^{-\frac{(\bar{r}-\bar{r}')^2}{4Mt}} d\varphi. \quad (18)$$

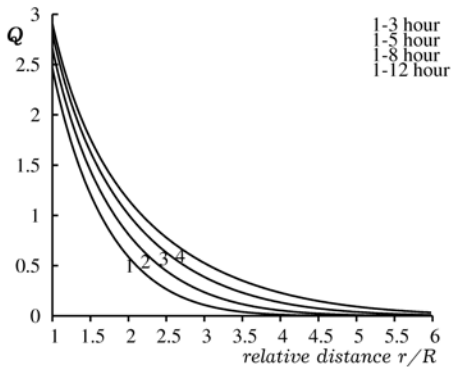


Рис. 2. Залежність потоку рідини від віддалі до свердловини в різні моменти часу

У природних умовах пористий пласт рідко буває статистично однорідним, тому для практичного використання цієї теорії необхідно розробити метод знаходження пластового тиску і потоку рідини для неоднорідних середовищ. Рівняння фільтрації (14) у цьому випадку матиме вигляд

$$\Delta \tilde{p} - \frac{\eta}{k_{pl}(\vec{r})K} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} = 0. \quad (19)$$

Тут  $\tilde{p}(\vec{r}, t)$  – тиск у неоднорідному пласті. Фундаментальний розв’язок в цьому випадку не буде справедливим. Розв’язання такого рівняння у випадку довільної функції  $k_{pl}(\vec{r})$  є складною задачею, але в випадку слабконеоднорідного пласта можна використати теорію збурень. Для цього представимо проникливість  $k_{pl}(\vec{r})$  у вигляді

$$k_{pl}(\vec{r}) = \begin{cases} k + k' & \vec{r} \in S \\ k & \vec{r} \notin S \end{cases},$$

де  $S$  – область з підвищеною проникливістю. У такому разі рівняння (19) набуде вигляду

$$\Delta \tilde{p} - \frac{1}{M} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} = -\frac{k'}{k} \Delta \tilde{p}. \quad (20)$$

Для знаходження  $\tilde{p}$  використаємо метод ітерацій, представивши (20) у вигляді

$$\Delta \tilde{p} - \frac{1}{M} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} = -\frac{k'}{k} \Delta p, \quad (21)$$

де  $p(\vec{r}, t)$  задано формулою (16). Розв’язок рівняння (21) можна представити у вигляді

$$\tilde{p}(\vec{r}, t) = p(\vec{r}, t) + \frac{k'}{4\pi k} \int_0^t \frac{d\tau}{t-\tau} \int \Delta p(\vec{r}', \tau) e^{-\frac{(\vec{r}-\vec{r}')^2}{4M(t-\tau)}} dV'. \quad (22)$$

Так як і для однорідного пласта, нас буде цікавити не тиск, а потік рідини. Враховуючи (10), отримаємо

$$\vec{q}(\vec{r}, t) = \vec{q}(\vec{r}, t) - \frac{k'}{2\pi k} \int_S \text{div} \vec{q}(\vec{r}', t) \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{(\vec{r} - \vec{r}')^2} e^{-\frac{(\vec{r}-\vec{r}')^2}{4Mt}} dS'. \quad (21)$$

де  $\text{div} \vec{q}$  визначається формулою (18).

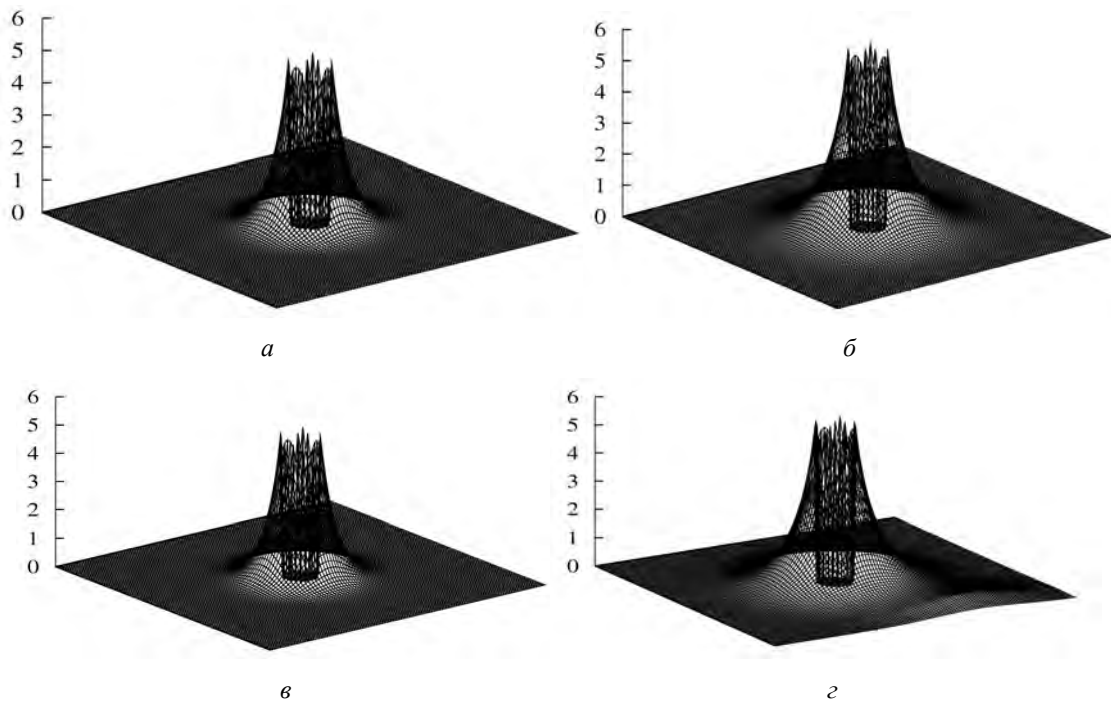


Рис. 3. Залежність потоку рідини від координат для однорідного (а,б) та неоднорідного (в,г) пластів

На рис. 3, *a* та 3, *б* показано залежність потоку рідини у пористому однорідному пласті, розрахованого за формулою (16) залежно від координат поблизу свердловини у різні моменти часу, *a* – 3 умовні години, *б* – 10 умовних годин. На рис. 3, *в* та 3, *г* – те саме для неоднорідного пласта, розрахованого за формулою (22). Як бачимо, наявність об'єкта з підвищеною проникливістю впливає на потоки рідини не одразу, а через деякий час, коли область локалізації розв'язку «дійде» до цього об'єкта.

### Сейсмoeлектричний ефект і аномальне магнітне поле у проникливому пористому пласті

В пористих середовищах на поверхні розділу між твердою і рідкою фазами завжди виникають електричні заряди. Рідина, рухаючись в порах, може захоплювати ці заряди, утворюючи таким чином електричний струм. Якщо позначити густину зарядів на поверхні  $\rho_0$ , то густина електричного струму дорівнюватиме  $\vec{j} = \rho_0 \vec{v}$ . Магнітне поле, викликане цим струмом, буде визначатися за законом Біо-Савара–Лапласа

$$d\vec{B} = \frac{1}{c_l r^3} [\vec{j} \vec{r}] dV,$$

де  $c_l$  – швидкість світла. Інтегруючи це рівняння по всьому пласту, знайдемо напруженість магнітного поля, викликаного фільтрацією рідини

$$\vec{B}(r, \varphi, t) = \int \frac{\rho_e [\vec{q}(\vec{r}', t)(\vec{r} - \vec{r}')] dV'}{c_l (\vec{r} - \vec{r}')^3} = \frac{\rho_e}{c_l} H \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^\infty \frac{\vec{q}(r', \varphi') \sin(\varphi - \varphi') r' dr'}{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\varphi - \varphi')}. \quad (23)$$

Тут  $H$  – товщина пласта. Таке магнітне поле існує поблизу працюючих свердловин. Дана математична модель може пояснити цей ефект.

На рис. 4 показано розподіл модуля вектора аномального магнітного поля у деякий момент часу навколо діючої свердловини, розрахованого за формулою (23). Рис. 4, *a* – для однорідного пласта, рис. 4, *б* – для пласта з неоднорідністю. Ми бачимо високу чутливість аномального магнітного поля до неоднорідності середовища. Якщо проаналізувати лише вертикальну компоненту аномального магнітного поля, то чутливість виявляється ще більшою. На рис. 4, *в* показано розподіл вертикальної компоненти аномального магнітного поля навколо свердловини в неоднорідному пласті. В однорідному пласті вертикальна компонента відсутня.

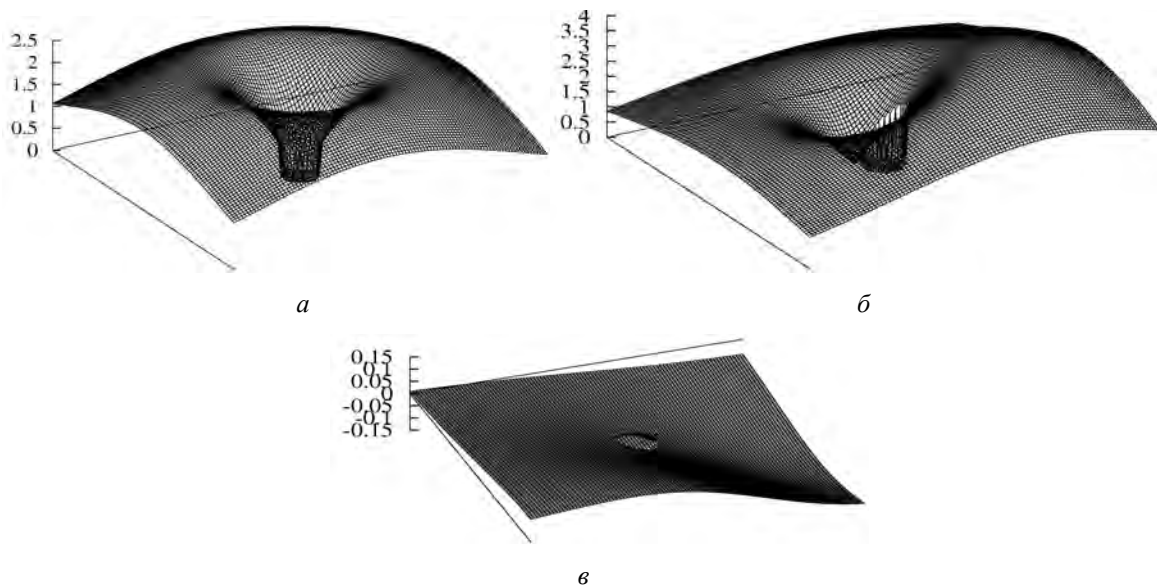


Рис. 4. Залежність модуля вектора індукції аномального магнітного поля, викликаного фільтрацією рідини

## Висновки

Математичне моделювання фільтрації рідини в пористих середовищах на основі механіки мікронеоднорідних середовищ дає можливість розв'язувати багато важливих задач. Зокрема отримані формули для знаходження проникливості тріщинувато-пористих середовищ, на основі яких можна розробити методику оцінювання проникливості, враховуючи геометричні параметри порового простору. Рівняння фільтрації отримано шляхом усереднення рівнянь руху в класичній теорії пружності. Такий підхід дає можливість розглядати сумісно процес фільтрації рідини та зміну напруженого стану в пласті внаслідок фільтрації. Крім цього, врахування електрокінетичного ефекту дає можливість пояснити появу аномального магнітного поля поблизу свердловин у процесі їх експлуатації.

1. Седов Л.И. *Механика сплошной среды*. – М.: Наука, 1976. – 536 с. 2. Шермергор Т.Д. *Теория упругости микронеоднородных сред*. – М.: Наука, 1977. – 400 с. 3. Барренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжык В.М. *Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа*. – М.: Недра, 1972. – 288 с.

УДК 536.24

В. Гавриш

Національний університет “Львівська політехніка”,  
кафедра програмного забезпечення

## МОДЕЛЮВАННЯ ТЕМПЕРАТУРНИХ РЕЖИМІВ У ТЕРМОЧУТЛИВОМУ ШАРІ З ТЕПЛОВИДІЛЯЮЧИМ ВКЛЮЧЕННЯМ ПАРАЛЕЛЕПЕДНОЇ ФОРМИ МАЛИХ РОЗМІРІВ

© Гавриш В., 2010

Розглядається стаціонарна нелінійна задача теплопровідності для ізотропного шару з чужорідним тепловиділяючим паралелепедним включенням малих розмірів із тепловіддачею. Запропонована методика розв'язування цієї задачі та її застосування для конкретної залежності коефіцієнта теплопровідності матеріалу шару від температури.

**Ключові слова:** температура, теплопровідність, стаціонарна, ізотропний, включення, тепловіддача.

The steady state nonlinear problem of thermal conduction for isotropic layer with foreign heat dissipating parallelepipedic inclusion of a small size with heat dissipation has been considered. The methodology of this problem solution and its application for the substance thermal-conductivity coefficients of the layer on temperature has been offered.

**Keywords:** temperature, thermal conduction, steady state, isotropic, inclusion, heat dissipation.

## Вступ

Побудова розв'язків – як аналітичних, так і числових – для задач теплоперенесення має наукове, практичне та економічне значення. Теплові режими конструкцій значною мірою визначають їхні якісні та кількісні характеристики і характеризуються температурними полями або величинами, які визначаються із цих полів, а саме – значеннями абсолютних температур, перепадами температур у просторі та часі, поведінкою температури та її градієнтів на граничних поверхнях конструкцій з різними заданими граничними умовами і на поверхнях спряження різнорідних елементів конструкцій, часом встановлення заданого розподілу температури або перепадів