

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ВУЗЛІВ ГІДРАВЛІЧНИХ КІЛ (на прикладі витяжного трійника)

© Маліновський А.А., Турковський В.Г., Музичак А.З., 2009

Розглянуто моделювання вузлів гідравлічних мереж з використанням коефіцієнтів взаємного впливу віток.

Modelling of nodes of hydraulic networks with use of factors of mutual influence of branches is considered.

Постановка проблеми. Комунальні мережі, зокрема, такі як мережі тепло- чи водопостачання потребують регулярного налагодження, чому передує розрахунок гідравлічних режимів їх роботи.

Зазвичай для гідравлічного розрахунку розгалужених мереж використовують методи теорії гідравлічних кіл (ТГК), яка зародилась на базі теорії електричних кіл [1]. Однак гідравлічні кола істотно відрізняються від електричних кіл. Для з'єднання віток гідравлічних кіл застосовують спеціальні елементи, такі, як трійник чи хрестовина. Ці елементи мають певний гідравлічний опір, який необхідно враховувати під час розрахунків, тоді як в електричних колах опір вузлів відсутній.

Аналіз останніх досліджень. Розглянемо стандартний витяжний трійник з відгалуженням, розташованим під деяким кутом α (рис. 1, а). Параметри трійника ($f_n + f_b = f_z$, $f_n = f_b$), де f_n , f_b , f_z – площа поперечного перерізу прямого проходу, бокового відгалуження та збірного рукава відповідно, x_n , x_b , x_z – витрати теплоносія у прямому проході, боковому відгалуженні та збірному рукаві відповідно.

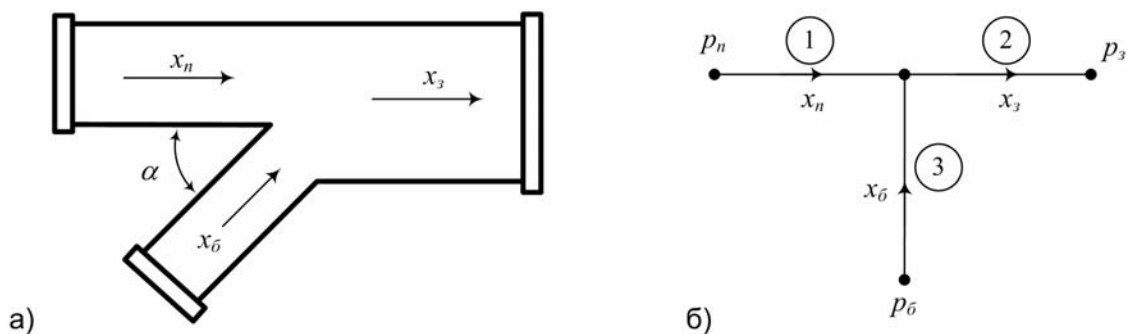


Рис. 1. Конструкційне виконання (а) та трипроменевий граф (б) витяжного трійника

Звичайно у проектній практиці коефіцієнти гідравлічного опору відгалужень трійника приймають постійними незалежно від витрат теплоносія. Наприклад, в [2, 3] для витяжного трійника вони прийняті такими, що дорівнюють $\xi=1,2-1,8$. Іноді, якщо приблизно відомі витрати теплоносія через різні рукави трійника пропонується приймати значення цих коефіцієнтів залежно від співвідношення витрат теплоносія. Причому значення коефіцієнтів гідравлічного опору залежить від співвідношення витрат теплоносія у прямому проході та у відгалуженні [3].

Наведені підходи до визначення коефіцієнтів гідравлічного опору рукавів трійника орієнтовані на ручні розрахунки. Вони прості, але прийнятні лише в певних межах зміни витрат (швидкості протікання) теплоносія у вітках мережі та значень гідравлічних опорів інших елементів мережі.

Найточніша методика визначення коефіцієнтів гідравлічного опору рукавів трійників різноманітних форм запропонована в [4]. Але наведені там залежності є громіздкими, наприклад, у

випадку $\alpha=15^\circ$, коефіцієнти гідравлічного опору прямого проходу та бокового відгалуження визначають за такими формулами:

$$\xi_{z,\bar{o}} = 1 + \left(\frac{x_{\bar{o}}}{x_3} \cdot \frac{f_3}{f_{\bar{o}}} \right)^2 - 2 \frac{f_3}{f_n} \left(1 - \frac{x_{\bar{o}}}{x_3} \right)^2 - 1.94 \frac{f_3}{f_{\bar{o}}} \left(\frac{x_{\bar{o}}}{x_3} \right)^2,$$

$$\xi_{\bar{o}} = \frac{\xi_{z,\bar{o}}}{\left(\frac{x_{\bar{o}}}{x_3} \cdot \frac{f_3}{f_{\bar{o}}} \right)^2},$$

$$\xi_{z,n} = 1 + \left(\frac{f_3}{f_n} \right)^2 \left(1 - \frac{x_{\bar{o}}}{x_3} \right)^2 - 2 \frac{f_3}{f_n} \left(1 - \frac{x_{\bar{o}}}{x_3} \right)^2 - 1.94 \frac{f_3}{f_{\bar{o}}} \left(\frac{x_{\bar{o}}}{x_3} \right)^2 + k_n,$$

$$\xi_n = \frac{\xi_{z,n}}{\left(1 - \frac{x_{\bar{o}}}{x_3} \right)^2 \left(\frac{f_3}{f_n} \right)^2},$$

де $\xi_{z,n}, \xi_{z,\bar{o}}$ – коефіцієнти гідравлічного опору прямого проходу та бокового відгалуження, зведені до середньої швидкості у збірному рукаві, $\xi_n, \xi_{\bar{o}}$ – ті самі коефіцієнти, але зведені до середньої швидкості у власній вітці відповідно.

З формул добре зрозуміло недоліки наведеної в [4] методики. По-перше, коефіцієнти гідравлічного опору залежать від витрат теплоносія у рукавах трійника. Пасивний елемент, яким є трійник, набуває властивостей активних елементів, таких, як регулятор тиску чи регулятор витрат. А це істотно ускладнює розрахункові процедури й вимагає спеціалізованого підходу [5]. По-друге, коефіцієнти гідравлічного опору залежать не лише від витрат теплоносія власної вітки, а й від витрат теплоносія у суміжних вітках. Тому такі формули неможливо застосовувати в межах теорії гідравлічних кіл (ТГК).

Задача досліджень. Розробити модель витяжного трійника, яка б органічно враховувала мережний характер задачі гідравлічного розрахунку з можливістю використання формалізованих методів аналізу гідравлічних кіл.

Виклад основного матеріалу. Складність побудови математичної моделі трійника полягає в тому, що тут необхідно розглядати щонайменше два процеси – стискання середовища під час зіткнення двох потоків (рис. 2, а) та вирівнювання швидкостей у збірному рукаві (рис. 2, б) [4].

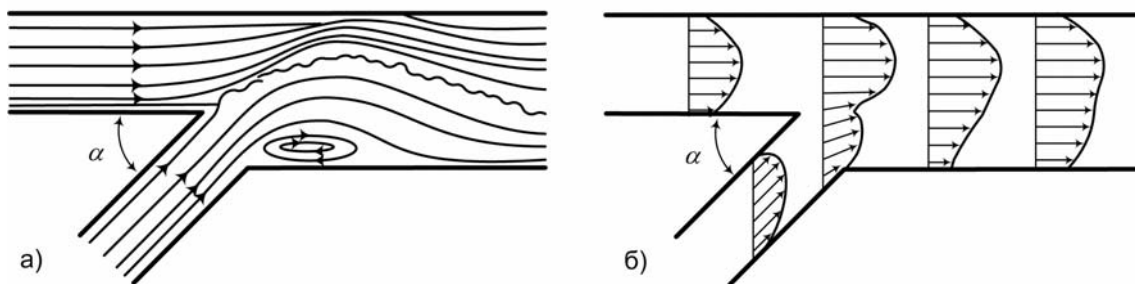


Рис. 2. Графічне відображення злиття двох потоків:
а – стискання потоків; б – вирівнювання швидкостей

Тому трійник не можна розглядати як один вузол гідравлічного кола подібно до вузла електричного кола. Його необхідно розглядати як схему із шести елементів (рис. 3, а). Тут елементи віток 1-2-3 відтворюють втрати енергії у рукавах трійника, а елементи віток 4-5-6 – втрати, якими супроводжується перемішування потоків.

Подібний підхід застосовано в системі математичного програмування Matlab R2008a, в склад якої входить пакет для моделювання гідравлічних кіл – SimHydraulics [6]. У цьому пакеті трійник

(блок "T-junction") змодельовано системою з трьох локальних гідравлічних опорів, з'єднаних не у трипроменеву зірку, а у трикутник (рис. 3, б).

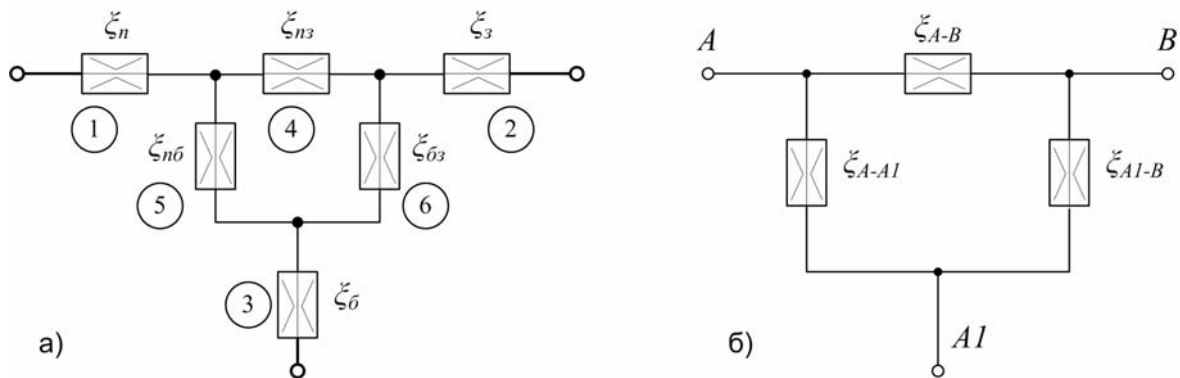


Рис. 3. Математичні моделі трійника: а – шестиланкова; б – у блоці "T-junction"

Для кожної ланки трикутника необхідно задати коефіцієнти гідравлічного опору (ξ) для додатного напрямку потоку і для протилежного. Коефіцієнти гідравлічного опору допускається задавати як постійні величини, чи як таблично визначені функції від числа Рейнольдса.

Перший недолік такого підходу – це істотне ускладнення математичного графа вихідної схеми – адже кожен трійник утворить додатковий контур і два додаткових вузли. Інший недолік пов'язаний із труднощами визначення самих гідравлічних опорів ребер трикутника.

Щоб повернутися до звичайного трипроменевого математичного графа (рис. 1, а), процеси віток 4-5-6 (рис. 3, а) необхідно рознести у вітки 1-2-3. Це можна зробити введенням у модель трійника коефіцієнтів взаємного впливу віток, аналогічно до того, як це зроблено у випадку з елеваторним вузлом [7].

Спочатку необхідно розділити процеси стискання середовищ та вирівнювання швидкостей. Для цього скористаємося аналогією зіштовхування двох пружних тіл однакової маси, що рухаються зустрічно з однаковою швидкістю. На короткий момент вони дотикаються та стискаються. У момент найбільшого стиснення тіла зупиняються і їхня кінетична енергія повністю переходить в енергію пружного стиснення. В наступний момент тіла розтискаються та відштовхуються одне від одного і розлітаються. "Той факт, що швидкості до і після зіткнення рівні ... заслуга закону збереження енергії, а те, що швидкості розлітання після симетричного зіткнення рівні одна одній – закону збереження імпульсу" [8, с.186].

У трійнику перетворення енергії під час зіткнення потоків прямого та бокового рукавів відбувається згідно зі законом збереження енергії, а вирівнювання швидкостей під час перемішування у збірному потоці – згідно зі законом збереження імпульсу. Однак на відміну від наведеного вище прикладу зіткнення потоків є непружним, тому наявні певні втрати енергії. Окрім цього на втрати енергії впливають процеси відриву бокового потоку від стінки трійника (рис. 2,а). Математично ці втрати можна рознести по вітках трійника та змоделювати через відповідні коефіцієнти місцевого опору.

$$\Delta p_n = \xi_n \frac{\omega_n^2 \rho}{2} = \frac{\xi_n}{2\rho f_n^2} x_n^2, \quad \Delta p_{\bar{o}} = \xi_{\bar{o}} \frac{\omega_{\bar{o}}^2 \rho}{2} = \frac{\xi_{\bar{o}}}{2\rho f_{\bar{o}}^2} x_{\bar{o}}^2, \quad (1)$$

$$\Delta p_3 = \xi_3 \frac{\omega_3^2 \rho}{2} = \frac{\xi_3}{2\rho f_3^2} x_3^2.$$

де $\Delta p_n, \Delta p_{\bar{o}}, \Delta p_3$ – втрати тиску відповідно у прямому проході, боковому відгалуженні та у збірній вітці.

Вирівнювання швидкостей у збірному потоці можна описати законом збереження імпульсів, рівняння якого для витяжного трійника у загальному випадку має вигляд

$$I_n + I_{\bar{o}} = I_3$$

У розгорненому вигляді, згідно з [9] це рівняння можна записати як

$$(x_n \omega_n + p_n f_n) + (x_{\bar{o}} \omega_{\bar{o}} + p_{\bar{o}} f_{\bar{o}} - R_{\bar{o}} \Phi_{\bar{o}}) \cos \alpha = x_3 \omega_3 + p_3 f_3 \quad (2)$$

де $R_{\bar{o}}, \Phi_{\bar{o}}$ – середній реактивний тиск потоку на стінку та площа поверхні цієї стінки.

Однак наведені рівняння (1) і (2) характеризують лише сутність явищ у трійнику. Адже додавання згаданих втрат не може дати дійсного значення опору трійника, оскільки причини, що викликають ці втрати, діють сумісно, й отже, впливають одна на одну.

Для врахування цього взаємного впливу у рівняння імпульсів необхідно ввести поправкові коефіцієнти, які назвемо коефіцієнтами швидкості. Відзначимо, що $R_{\bar{o}} \sim \omega_{\bar{o}}^2$, тому її можна об'єднати зі складовою $x_{\bar{o}}\omega_{\bar{o}}$. У результаті отримаємо

$$(\varphi_n x_n \omega_n + p_n f_n) + (\varphi_{\bar{o}} x_{\bar{o}} \omega_{\bar{o}} + p_{\bar{o}} f_{\bar{o}}) \cos \alpha = \varphi_3 x_3 \omega_3 + p_3 f_3$$

де $\varphi_n, \varphi_{\bar{o}}$ – коефіцієнти швидкості прямої, бокової та збірної віток трійника відповідно.

Перетворимо отримане рівняння

$$x_3 \omega_3 - \varphi_n x_n \omega_n - \varphi_{\bar{o}} x_{\bar{o}} \omega_{\bar{o}} \cos \alpha = p_n f_n + p_{\bar{o}} f_{\bar{o}} \cos \alpha - p_3 f_3$$

З врахуванням того, що $f_3 = f_n + f_{\bar{o}}$ отримуємо

$$\begin{aligned} x_3 \omega_3 - \varphi_n x_n \omega_n - \varphi_{\bar{o}} x_{\bar{o}} \omega_{\bar{o}} \cos \alpha &= p_n f_n + p_{\bar{o}} f_{\bar{o}} \cos \alpha - p_3 (f_n + f_{\bar{o}}) = \\ &= (p_n - p_3) f_n + (p_{\bar{o}} \cos \alpha - p_3) f_{\bar{o}} \end{aligned}$$

Змішування двох однаково спрямованих потоків, що рухаються з різними швидкостями, супроводжується незворотними втратами повного тиску, яке ще називають втратами на удар. Тому можна записати, що

$$x_3 \omega_3 - \varphi_n x_n \omega_n - \varphi_{\bar{o}} x_{\bar{o}} \omega_{\bar{o}} \cos \alpha = \Delta I_{\text{удар}} = \Delta p_{\text{удар}} f_3$$

звідки

$$\Delta p_{\text{удар}} = \frac{x_3 \omega_3 - \varphi_n x_n \omega_n - \varphi_{\bar{o}} x_{\bar{o}} \omega_{\bar{o}} \cos \alpha}{f_3}$$

Перейдемо від швидкостей потоків до витрат, у результаті отримаємо

$$\Delta p_{\text{удар}} = \frac{1}{\rho f_3^2} x_3^2 - \frac{\varphi_n}{\rho f_n f_3} x_n^2 - \frac{\varphi_{\bar{o}} \cos \alpha}{\rho f_{\bar{o}} f_3} x_{\bar{o}}^2 \quad (3)$$

Стосовно ТГК [5] складові отриманих рівнянь (1) і (3) необхідно внести в матрицю S_2

$$S_2 = \begin{vmatrix} \frac{\xi_n}{2\rho f_n^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\xi_{\bar{o}}}{2\rho f_{\bar{o}}^2} & 0 \\ -\frac{\varphi_n}{\rho f_n f_3} & -\frac{\varphi_{\bar{o}} \cos \alpha}{\rho f_{\bar{o}} f_3} & \frac{\xi_3}{2\rho f_3^2} + \frac{1}{\rho f_3^2} \end{vmatrix} \quad (4)$$

Власний гідравлічний опір збірного рукава можна еквівалентувати

$$\frac{\xi_3}{2\rho f_3^2} + \frac{1}{\rho f_3^2} = \frac{\xi_3 + 2}{2\rho f_3^2} = \frac{\xi'_3}{2\rho f_3^2}$$

У результаті отримаємо

$$S_2 = \begin{vmatrix} \frac{\xi_n}{2\rho f_n^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\xi_{\bar{o}}}{2\rho f_{\bar{o}}^2} & 0 \\ -\frac{\varphi_n}{\rho f_n f_3} & -\frac{\varphi_{\bar{o}} \cos \alpha}{\rho f_{\bar{o}} f_3} & \frac{\xi'_3}{2\rho f_3^2} \end{vmatrix} \quad (5)$$

Коефіцієнт ξ'_3 є постійною величиною й числово дорівнює 1,2. Для решти наявних в матриці S_2 коефіцієнтів одержані такі аналітичні залежності від кута α :

$$\begin{aligned} \xi_n(\alpha) &= 1,17 - 0,17 \sin^2 \alpha, & \xi_{\bar{o}}(\alpha) &= 0,83 + 0,17 \sin^2 \alpha, \\ \varphi_n(\alpha) &= 1 + 0,07 \cos \alpha, & \varphi_{\bar{o}}(\alpha) &= 1,05 - 0,08 \cos \alpha. \end{aligned} \quad (6)$$

Для верифікації розробленої моделі розглянемо ділянку гідравлічної мережі, що складається з двох джерел (діючих напорів зі значеннями H_1 і H_2) та з одного абонента з напірно-витратною характеристикою $h_3(x)$ (рис. 4). Для того, щоб краще відчувати зміни гідравлічних витрат у трійнику гідравлічний опір віток джерел та навантаження прийнемо значно меншим від гідравлічного опору трійника.

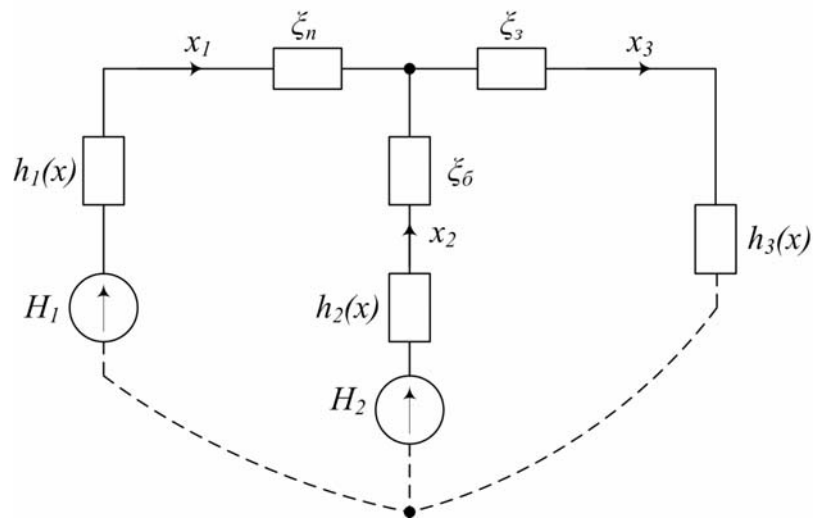


Рис. 4. Схема ділянки гідравлічної мережі

Для прикладу наведені результати отримані за наведеними вище формулами для трійника з кутом $\alpha=30^\circ$. Оскільки в [4] параметри трійника подано залежно від співвідношення витрат теплоносія у його вітках $x_б/x_з$, результати розрахунку витрат теплоносія у вітках мереж також подамо залежно від цього співвідношення (рис. 5).

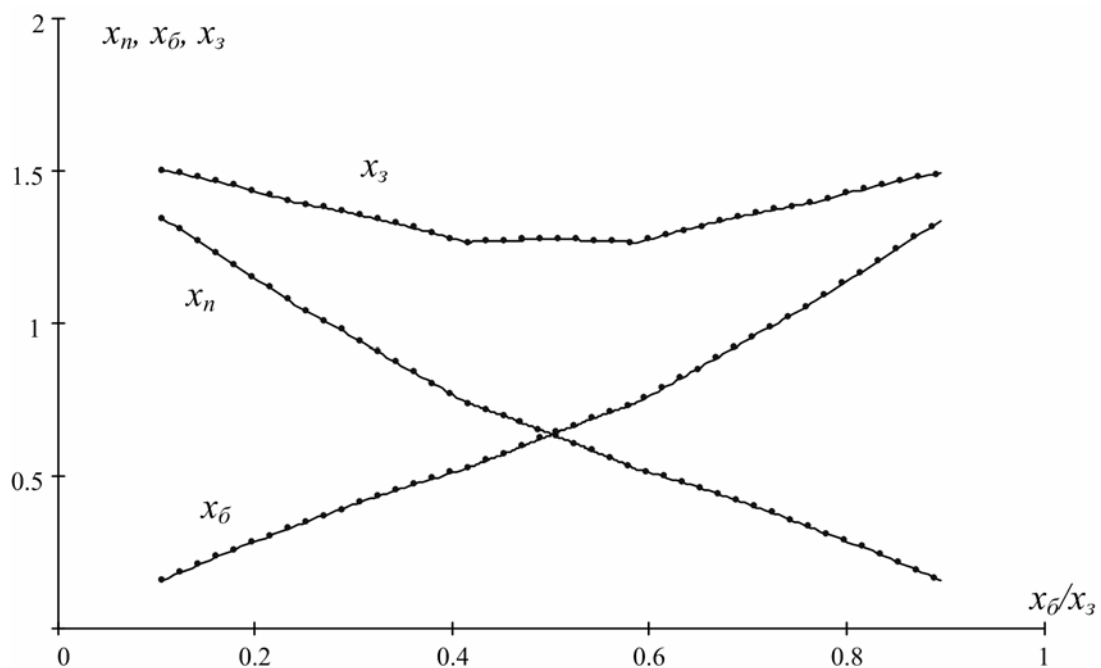


Рис. 5. Порівняння результатів розрахунку вузла
 — розрахунок за запропонованою методикою,
 ••••• розрахунок за формулами, наведеними в [4]

Як очевидно результати розрахунку за математичною моделлю із коефіцієнтами взаємного впливу віток та за формулами [4] практично збігаються. Для трійників із іншими значеннями кута α похибка також є незначною і не перевищує 0,3–0,5%

Відзначимо, що формули для визначення коефіцієнтів гідравлічного опору витяжного трійника подібні до тих, за якими визначають гідравлічний опір рукавів притічного трійника [4]

$$\xi_{3,6} = 1 + \left(\frac{x_6 \cdot f_3}{x_3 \cdot f_6} \right)^2 - 2 \frac{x_6 \cdot f_3}{x_3 \cdot f_6} \cos \alpha - k_6 \left(\frac{x_6 \cdot f_3}{x_3 \cdot f_6} \right)^2, \quad (7)$$

$$\xi_{3,n} = 0.$$

Можна зробити висновок, що запропонована математична модель із коефіцієнтами взаємного впливу віток справедлива для трійників будь-якого типу.

Висновки

1. Запропонована модель вузлів гідравлічних кіл адаптована для розрахунку гідравлічного режиму теплової мережі за допомогою формалізованих методів.

2. Запропонований підхід придатний для моделювання трійників в різних режимах (витяжному та притічному) їх роботи.

1. Меренков А.П., Хасилев В.Я. *Теория гидравлических цепей*. – М.: Наука, 1985. – 280 с.
2. *Водяные тепловые сети: Справочное пособие по проектированию* / И.В. Беляйкина, В.П. Витальев, Н.К. Громов и др., Под ред. Н.К. Громова, Е.П.Шубина. – М.: Энергоатомиздат, 1988. – 376 с.
3. *Справочник по гидравлике* / Под ред. В.А. Большакова, – 2-е изд., перераб. и доп. – К.: Вища школа, 1984. – 343 с.
4. Идельчик И.Е. *Справочник по гидравлическим сопротивлениям* // Под ред. М.О. Штейнберга. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Машиностроение, 1992. – 672 с.
5. Сеннова Е.В., Сидлер В.Г. *Математическое моделирование и оптимизация развивающихся теплоснабжающих систем*. – Новосибирск: Наука, 1987. – 219 с.
6. *Matlab & Simulink. SimHydraulics 1. Reference – The MathWorks. Accelerating the pace of engineering and science, 2008* – 374 с.
7. Маліновський А.А., Турковський В.Г., Музичак А.З. *Математична модель елеваторного вузла з коефіцієнтами взаємного впливу віток* // Вісник Нац-го ун-ту "Львівська політехніка" Теплоенергетика, Інженерія довкілля. Автоматизація. – 2008. – № 617. – С. 80–85.
8. Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс. *Фейнмановские лекции по физике. Вып. 1. Современная наука о природе. Законы механики*. – М.: Мир, 1967. – 268 с.
9. Идельчик И.Е. *Гидравлические сопротивления (физико-механические основы)*. – М.: Государственное энергетическое издательство, 1954. – 317 с.