

## МЕТОД І АЛГОРИТМИ АНАЛІЗУ ПЛОСКИХ СИМЕТРИЧНИХ ЗОБРАЖЕНЬ У РАСТРОВІЙ ФОРМІ

© Березький О., 2010

**Запропоновано метод і алгоритми аналізу симетричних зображень у растровій формі. Наведено результати аналізу симетричних зображень-орнаментів.**

**Ключові слова:** аналіз, симетричні зображення, алгоритми, метод, зображення-орнамент.

**The method and algorithms analysis of symmetric images in a raster form are suggested in the article. The results of analysis of symmetric image-ornaments are described.**

**Keywords:** analysis, symmetric images, algorithms, method, image-ornaments.

### Вступ

Ідея симетрії виникла ще у Древній Греції при розвиненні філософами і математиками вчення про гармонію світу. Древні живописці, зодчі, скульптори створювали свої твори за канонами гармонії. Ідеологія гармонії змінювалася століттями і набула нинішнього вигляду в понятті симетрії. Вчення про симетрію набуло наукової форми завдяки відкриттю поняття групи (Галуа, 1832), симетрії кристалів (Федоров, Шенфліс, 1891). Теоретико-групові підходи завдяки цим відкриттям поширилися на кристалографію, кристалофізику, а згодом і на всю фізику й інші природничі науки. Проблеми біологічних симетрій на кромолікулярному рівні розглядались навіть на спеціальному Нобелівському симпозіумі. З розвитком біології виникають відкриття нових фактів залежності принципам симетрії різних біологічних об'єктів. Тому сьогодні метод симетрії є одним з важливих методів пізнання в багатьох областях науки.

На сучасному етапі симетрію прийнято вживати як геометричне, так і філософське поняття. Геометричне пов'язане з рівністю предметів, з центральною осью симетрії. З філософського погляду симетрія є методом знаходження і опису інваріантних закономірностей – «законів збереження». «Принципи симетрії вимагають: шукайте в кожному матеріальному процесі незмінну величину, відношення, закон!» [1]. На основі законів симетрії будуються симетричні зображення, які належать до складних (наділених певною структурою) зображень, що широко представлені в комп'ютерному зорі.

Для аналізу складних зображень використовують різні класичні методи з теорії розпізнавання образів: статистичні і структурні [2], алгебраїчні і геометричні, методи, які ґрунтуються на нейронних мережах. На наш погляд, прийнятними методами для аналізу симетричних зображень є структурні, які використовують кристалографічні групи симетрії [3, 4].

Пошуку повторюваних елементів (образів) на зображеннях природних об'єктів присвячені роботи [5, 6]. Можна виділити такі підходи до виявлення повторюваних образів. Перший [5] – знаходження множини ознак елементів зображення і побудова гіпотези про їх зв'язки (переноси), відповідно до специфічної параметричної моделі. Переваги цього методу – здатність виявити малі відносно розміру всього зображення повторювані елементи і здатність групувати елементи, незважаючи на локальні деформації поверхні об'єкта, зображення якого аналізується. Недоліком є можливість застосування тільки для зображень з чіткими контурами об'єктів.

Другий підхід ґрунтується на використанні автокореляційної функції [7] або перетворення Фур'є [8]. Він підходить для будь-якого зображення, проте його недоліком є припущення, що повторюваний образ займає велику частину зображення. У цій статті для аналізу симетричних зображень використано теоретико-груповий підхід [9].

### Постановка задачі

Нехай задане поле зору  $P = \{(x, y) | 1 \leq x \leq r, 1 \leq y \leq s\}$ , де  $r$  і  $s$  – довжина і ширина прямокутної рамки – поля зору. На полі зору  $P$  задане елементарне зображення  $Ime$ . Елементарне зображення  $Ime$  – несиметрична частина поля зору,  $Ime = \{(x, y) | 1 \leq x \leq p, 1 \leq y \leq t\}$ ,  $Ime \subset P$ .

Існують такі геометричні перетворення  $T_1, T_2, \dots, T_n$  (центральна симетрія, осьова симетрія, ковзне відображення, поворот). Позначимо множину цих геометричних перетворень через  $S = \{T_1, T_2, \dots, T_n\}$ .

Виконавши геометричні перетворення над елементарним зображенням  $Ime$ , отримуємо рапорт, тобто  $Rp = S(Ime) = \{s(Ime) | s \in S\}$ ,  $S(Ime) = \{s(x, y) | x, y \in Ime, 1 \leq x \leq m, 1 \leq y \leq n\}$ .

Отже, рапорт  $Rp$  – це складне зображення, отримане в результаті виконання геометричних перетворень над елементарним зображенням. При цьому виконується умова  $S(Ime) \cap Ime = \emptyset$ , тобто при перетвореннях в утворенні рапорту відсутнє накладання елементарних зображень.

Якщо здійснити паралельні переноси  $L$  вздовж однієї або двох осей, то отримуємо відповідно симетричне зображення  $Im_s$  на смузі або площині, тобто

$$Im_s = L(Rp) = \{l(Rp) | l \in L\}$$

$$L(Rp) = \{l(x, y) | x, y \in Rp, 1 \leq x \leq r, 1 \leq y \leq s\}$$

На площині існує 17 груп симетрії, а на смузі відповідно існує 7 різних груп симетрії [10].

Позначимо через  $A = \{G_1, G_2, \dots, G_7\}$  – множину груп смуги, а через  $B = \{H_1, H_2, \dots, H_{17}\}$  – множину груп площини.

Задане симетричне зображення  $Im_s$ .

Необхідно знайти:

1. Групи  $H_i, G_i$ , на основі яких побудоване зображення  $Im_s$ .
2. Рапорт і елементарний рисунок  $Rp, Ime$ .

### Метод аналізу симетричних зображень

Метод аналізу симетричних зображень ґрунтується на алгоритмах визначення рапорту за автокореляційною функцією й ідентифікації груп симетрії на основі введеної піксельної алгебри визначеного рапорту.

Нехай задане симетричне зображення  $Im_s$ . Ідентифікуємо рапорт  $Rp$  зображення  $Im_s$  на основі автокореляційної функції [11]. Автокореляційна функція для вікна розміром  $(2W + 1) \times (2W + 1)$ :

$$A(x, y) = \frac{\sum_{x=j-W}^{j+W} \sum_{y=k-W}^{k+W} Im_s(x, y) Im_s(x - \varepsilon, y - \eta)}{\sum_{x=j-W}^{j+W} \sum_{y=k-W}^{k+W} Im_s^2(x, y)}$$

обчислюється для кожної точки зображення  $Im_s(x, y)$  і при зміщеннях  $\varepsilon, \eta = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm T$ .

Визначаємо локальні максимуми на автокореляційній поверхні [6] і сортуємо їх за спаданням значень, у результаті чого отримуємо список  $Q_1, Q_2, \dots, Q_N$ . Потім для кожного максимуму  $Q_j$ , розраховуємо відстань  $d(Q_j, Q_i)$  до елемента  $Q_i$ ,  $1 \leq i < j$ , який розміщується перед поточним у списку. Наступним кроком знаходимо мінімальну відстань  $d_i$  між локальними максимумами. На основі мінімальної відстані знаходимо вектори перенесення  $t_1$  і  $t_2$ , що утворюють сітку, в якій знаходиться рапорт  $Rp$ .

Введемо дві бінарні логічні операції «+» і «×» («додавання» і «множення»). Використаємо дані операції до цифрових зображень з метою визначення відповідної групи перетворення.

Логічні операції виконуватимуться поелементно над відповідними пікселями  $u$  та  $v$  зображення  $Im_s$   $u \in Z, v \in Z$ . Нехай задана множина  $M = \{0, 1, \dots, 2^{n-1}\}$ , елементами якої є коди пікселів,  $n$  – глибина кольору,  $0$  – колір фону,  $a$  та  $b$  – значення кольорів пікселів, відмінних від фону,  $a \in M, b \in M$ . Задамо дві бінарні операції на множині  $M$ : «+» і « $\times$ » («додавання» і «множення»). Результати цих операцій для заданих двох елементів  $u, v \in M$  наведено в табл. 1. Як бачимо, в результаті виконання бінарних операцій отримується множина  $L = \{0, 1\}$ ,  $L \subset M$ , яка містить два елементи ( $0$  – фон,  $1$  – об’єкт), тобто отримується бінарне зображення.

Таблиця 1

**Бінарні операції та їх результати**

| $u$ | $v$ | $u + v$ | $u \times v$ |
|-----|-----|---------|--------------|
| 0   | 0   | 0       | 0            |
| $a$ | 0   | 1       | 0            |
| 0   | $a$ | 1       | 0            |
| $a$ | $a$ | 0       | 1            |
| $a$ | $b$ | 0       | 1            |

Для введених операцій на множині  $M$  характерні властивості:

1. Комутативність:

$$u + v = v + u;$$

$$u \times v = v \times u;$$

2. Асоціативність:

$$u + (v + w) = (u + v) + w;$$

$$u \times (v \times w) = (u \times v) \times w;$$

3. Дистрибутивність:

$$u \times (v + w) = u \times v + u \times w.$$

### Алгоритми визначення груп симетрії

Припустимо, що знайдений рапорт  $R_p$  розміром  $m \times n$ . Тобто маємо вихідну матрицю  $A$

розміром  $m \times n$ : 
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

1. Ділимо матрицю  $A$  на дві розміру  $m \times k$  матриці  $A_1$  та  $A_2$ :

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mk} \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} a_{1k+1} & a_{1k+2} & \dots & a_{1n} \\ a_{2k+1} & a_{2k+2} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{mk+1} & a_{mk+2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ при } n - \text{ парному, } k = \frac{n}{2} \text{ та}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mk} \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} a_{1k} & a_{1k+2} & \dots & a_{1n} \\ a_{2k} & a_{2k+2} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{mk} & a_{mk+2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ при } n - \text{ непарному, } k = \frac{n+1}{2}.$$

2. „Додаємо”  $A_1$  та  $A_2$ , а також „множимо” їх за законами, наведеними в таблиці.

Результатом будуть бінарні матриці розміру  $m \times k$ , які позначимо  $A^+$  та  $A^*$ .

3. В отриманих матрицях визначаємо вид симетрії. Кожній групі симетрії відповідатимуть матриці з характерною симетрією (табл. 2 для груп смуги, табл. 3 – для груп площини).

4. Якщо табл. 2, 3 не дають однозначної відповіді, тобто для деяких груп вид симетрії буде однаковий, тоді необхідно додатково перевірити рапорт за наступними кроками.

5. Ділимо матрицю  $A$  на дві розміру  $l \times n$  матриці  $A_3$  та  $A_4$ :

$$A_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{l1} & a_{l2} & \dots & a_{ln} \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} a_{l+1,1} & a_{l+1,2} & \dots & a_{l+1,n} \\ a_{l+2,1} & a_{l+2,2} & \dots & a_{l+2,n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ при } m - \text{ парному, } l = \frac{m}{2} \text{ та}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{l1} & a_{l2} & \dots & a_{ln} \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} a_{l1} & a_{l2} & \dots & a_{ln} \\ a_{l+1,1} & a_{l+1,2} & \dots & a_{l+1,n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ при } m - \text{ непарному, } l = \frac{m+1}{2}.$$

6. „Додаємо” і „множимо”  $A_3$  та  $A_4$ . Результатом будуть бінарні матриці розміру  $l \times n$ , які позначимо  $B^+$  та  $B^*$ . Висновки для груп смуги робимо згідно з табл. 2, для груп площини – згідно з табл. 3.

7. Для груп смуги алгоритм припиняє роботу. Якщо табл. 3 не дає однозначної відповіді для груп площини, тобто для деяких груп вид симетрії однаковий, тоді необхідно додатково перевірити рапорт за наступними кроками.

8. Ділимо матрицю  $A$  на чотири розміру  $l \times k$  матриці  $A_{11}$ ,  $A_{12}$ ,  $A_{21}$  та  $A_{22}$ :

$$A_{11} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{l1} & a_{l2} & \dots & a_{lk} \end{bmatrix}, A_{12} = \begin{bmatrix} a_{1k+1} & a_{1k+2} & \dots & a_{1n} \\ a_{2k+1} & a_{2k+2} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{lk+1} & a_{lk+2} & \dots & a_{ln} \end{bmatrix},$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} a_{l+1,1} & a_{l+1,2} & \dots & a_{l+1,k} \\ a_{l+2,1} & a_{l+2,2} & \dots & a_{l+2,k} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mk} \end{bmatrix}, A_{22} = \begin{bmatrix} a_{l+1,k+1} & a_{l+1,k+2} & \dots & a_{l+1,n} \\ a_{l+2,k+1} & a_{l+2,k+2} & \dots & a_{l+2,n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m,k+1} & a_{m,k+2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ при } n \text{ та } m - \text{ парних};$$

$$A_{11} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{l1} & a_{l2} & \dots & a_{lk} \end{bmatrix}, A_{12} = \begin{bmatrix} a_{1k} & a_{1k+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{2k} & a_{2k+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{lk} & a_{lk+1} & \dots & a_{ln} \end{bmatrix}, A_{21} = \begin{bmatrix} a_{l1} & a_{l2} & \dots & a_{lk} \\ a_{l+1,1} & a_{l+1,2} & \dots & a_{l+1,k} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mk} \end{bmatrix},$$

$$A_{22} = \begin{bmatrix} a_{l,k} & a_{l,k+1} & \dots & a_{l,n} \\ a_{l+1,k} & a_{l+1,k+1} & \dots & a_{l+1,n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m,k} & a_{m,k+1} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix} \text{ при } n \text{ та } m - \text{ непарних}$$

(при  $n$  – парному,  $m$  – непарному та навпаки матриці будуються аналогічно).

9. „Додаємо” і „множимо”  $A_{11}$ ,  $A_{12}$ ,  $A_{21}$  та  $A_{22}$  попарно. Результатом будуть бінарні матриці розміру  $l \times k$ :  $A_{11} + A_{12} = B_{12}^+$ ,  $A_{11} \times A_{12} = B_{12}^*$ ,  $A_{11} + A_{22} = B_{13}^+$ ,  $A_{11} \times A_{22} = B_{13}^*$ ,  $A_{11} + A_{21} = B_{14}^+$ ,  $A_{11} \times A_{21} = B_{14}^*$ ,  $A_{12} + A_{22} = B_{23}^+$ ,  $A_{12} \times A_{22} = B_{23}^*$ ,  $A_{12} + A_{21} = B_{24}^+$ ,  $A_{12} \times A_{21} = B_{24}^*$ ,  $A_{22} + A_{21} = B_{34}^+$ ,  $A_{22} \times A_{21} = B_{34}^*$ . Висновки для груп площини робимо згідно з табл. 4.

## Види симетрії в бінарних матрицях рапортів груп смуги

| група | Види симетрії в матрицях, отриманих в результаті «додавання» і «множення» матриць $A_1$ і $A_2$ та $A_3$ і $A_4$ |  |
|-------|--|--|
|       | $A^+$ та $A^*$   | $B^+$ та $B^*$                                   |
| $p1m$ | вертикальна симетрія   | вертикальна симетрія                             |
| $pg$  | горизонтальна симетрія   | симетрії не існує                                |
| $pt$  | горизонтальна симетрія   | горизонтальна симетрія                           |
| $p2$  | центральна симетрія  | центральна симетрія                              |
| $ptg$ | центральна, вертикальна і горизонтальна симетрії   | вертикальна симетрія                             |
| $ptm$ | центральна, вертикальна і горизонтальна симетрії   | центральна, вертикальна і горизонтальна симетрії |
| $p1$  | симетрії не існує  | симетрії не існує                                |

Центральна симетрія –  $a_{ij} = a_{m-i+1, n-j+1}$ ,  $i = \overline{1, m}$ ,  $j = \overline{1, n}$ .

Горизонтальна симетрія –  $a_{ij} = a_{m-i+1, j}$ ,  $i = \overline{1, m}$ ,  $j = \overline{1, n}$ .

Вертикальна симетрія –  $a_{ij} = a_{i, n-j+1}$ ,  $i = \overline{1, m}$ ,  $j = \overline{1, n}$ .

Симетрія відносно головної діагоналі –  $a_{ij} = a_{ji}$ ,  $i = \overline{1, m}$ ,  $j = \overline{1, m}$ .

Симетрія відносно допоміжної діагоналі –  $a_{ij} = a_{m-j+1, m-i+1}$ ,  $i = \overline{1, m}$ ,  $j = \overline{1, m}$ .

Обернено транспоновані матриці –  $\{a_{ij}\}_{i=\overline{1, m}; j=\overline{1, n}}$  та  $\{b_{ij}\}_{i=\overline{1, n}; j=\overline{1, m}}$  –  $a_{ij} = b_{n-j+1, m-i+1}$ ,  $i = \overline{1, m}$ ,  $j = \overline{1, n}$ .

## Види симетрії в бінарних матрицях рапортів груп площини

| група | Види симетрії в матрицях, отриманих в результаті «додавання» і «множення» матриць $A_1$ і $A_2$ та $A_3$ і $A_4$    |   |
|-------|---|---|
|       | $A^+$ та $A^*$  | $B^+$ та $B^*$  |
| $p2$  | центральна симетрія   | центральна симетрія   |
| $pt$  | вертикальна симетрія  | вертикальна симетрія  |
| $pg$  | $A^+$ є зворотно транспонованою до $B^+$ , підматриці однакові і симетричні відносно допоміжних діагоналей          | $A^*$ є зворотно транспонованою до $B^*$ , підматриці однакові і симетричні відносно допоміжних діагоналей          |
| $ct$  | $A^+$ є зворотно транспонованою до $B^+$ , підматриці різні, але симетричні відносно допоміжних діагоналей          | $A^*$ є зворотно транспонованою до $B^*$ , підматриці різні, але симетричні відносно допоміжних діагоналей          |
| $ptm$ | центральна, вертикальна і горизонтальна симетрії  | центральна, вертикальна і горизонтальна симетрії  |
| $ptg$ | центральна симетрія<br>$A^+$ є транспонованою до $B^+$<br>підматриці однакові і симетричні відносно обох діагоналей | центральна симетрія<br>$A^*$ є транспонованою до $B^*$<br>підматриці однакові і симетричні відносно обох діагоналей |
| $pgg$ | центральна симетрія, підматриці мають горизонтальну симетрію  | центральна симетрія, підматриці мають вертикальну симетрію  |
| $ctm$ | центральна симетрія   | центральна симетрія   |
| $p4$  | центральна симетрія   | центральна симетрія   |
| $p4m$ | центральна, вертикальна і горизонтальна симетрії  | центральна, вертикальна і горизонтальна симетрії  |
| $p4g$ | центральна симетрія, підматриці мають горизонтальну симетрію  | центральна симетрія, підматриці мають вертикальну симетрію  |
| $p1$  | симетрії не існує   | симетрії не існує   |

## Додаткова перевірка симетрії в бінарних матрицях рапортів груп площини

| група | Види симетрії в результаті попарного «додавання» і «множення» матриць $A_{11}$ , $A_{12}$ , $A_{21}$ та $A_{22}$ |  |                         |                         |  |                         |
|-------|--|--|-------------------------|-------------------------|--|-------------------------|
|       | $B_{12}^+$ , $B_{12}^*$  | $B_{13}^+$ , $B_{13}^*$                                | $B_{14}^+$ , $B_{14}^*$ | $B_{23}^+$ , $B_{23}^*$ | $B_{24}^+$ , $B_{24}^*$                                | $B_{34}^+$ , $B_{34}^*$ |
| p4m   | вертикальна симетрія   | центральна симетрія, симетрія відносно обох діагоналей | горизонтальна симетрія  | горизонтальна симетрія  | центральна симетрія, симетрія відносно обох діагоналей | вертикальна симетрія    |
| сmm   | симетрії не існує  | центральна симетрія, симетрія відносно обох діагоналей | симетрії не існує       | симетрії не існує       | центральна симетрія, симетрія відносно обох діагоналей | симетрії не існує       |
| p4    | симетрії не існує  | центральна симетрія                                    | симетрії не існує       | симетрії не існує       | центральна симетрія                                    | симетрії не існує       |
| p2    | симетрії не існує  | центральна симетрія                                    | симетрії не існує       | симетрії не існує       | центральна симетрія                                    | симетрії не існує       |
| p4g   | горизонтальна симетрія   | центральна симетрія, симетрія відносно обох діагоналей | вертикальна симетрія    | вертикальна симетрія    | центральна симетрія, симетрія відносно обох діагоналей | горизонтальна симетрія  |
| pgg   | горизонтальна симетрія   | центральна симетрія                                    | вертикальна симетрія    | вертикальна симетрія    | центральна симетрія                                    | горизонтальна симетрія  |
| pmm   | вертикальна симетрія   | центральна симетрія                                    | горизонтальна симетрія  | горизонтальна симетрія  | центральна симетрія                                    | вертикальна симетрія    |

Якщо групу визначено, то можна швидко знайти елементарний рисунок. Він дорівнюватиме або рапорту, або 1/2 рапорту, або 1/4 рапорту. Розміри елементарного рисунку для кожної групи вказано у табл. 5.

Таблиця 5

## Розміри елементарного рисунку

| Розміри елементарного рисунку | Групи смуги       | Групи площини                     |
|-------------------------------|-------------------|-----------------------------------|
| рапорт                        | $p1$              | $p1$                              |
| 1/2 рапорту                   | $pg, p1m, p2, pm$ | $p2, pm, cm, cmm$                 |
| 1/4 рапорту                   | $pmg, pmm$        | $pg, pmm, pmg, pgg, p4, p4m, p4g$ |

## Експериментальні дослідження

Нехай задане складне зображення-орнамент (рис. 1).

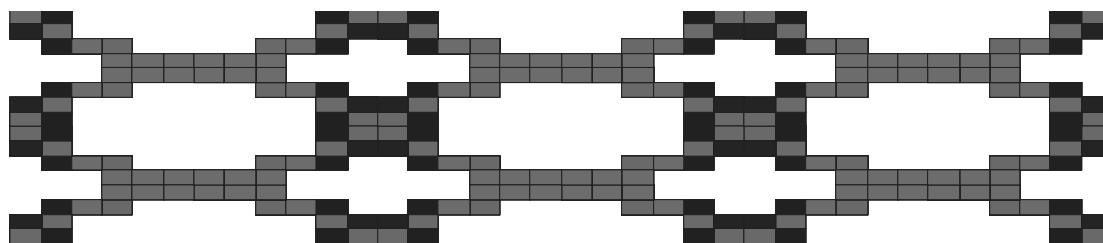


Рис. 1. Приклад зображення

На основі алгоритму визначення рапорту знаходимо автокореляційну функцію (рис. 2).

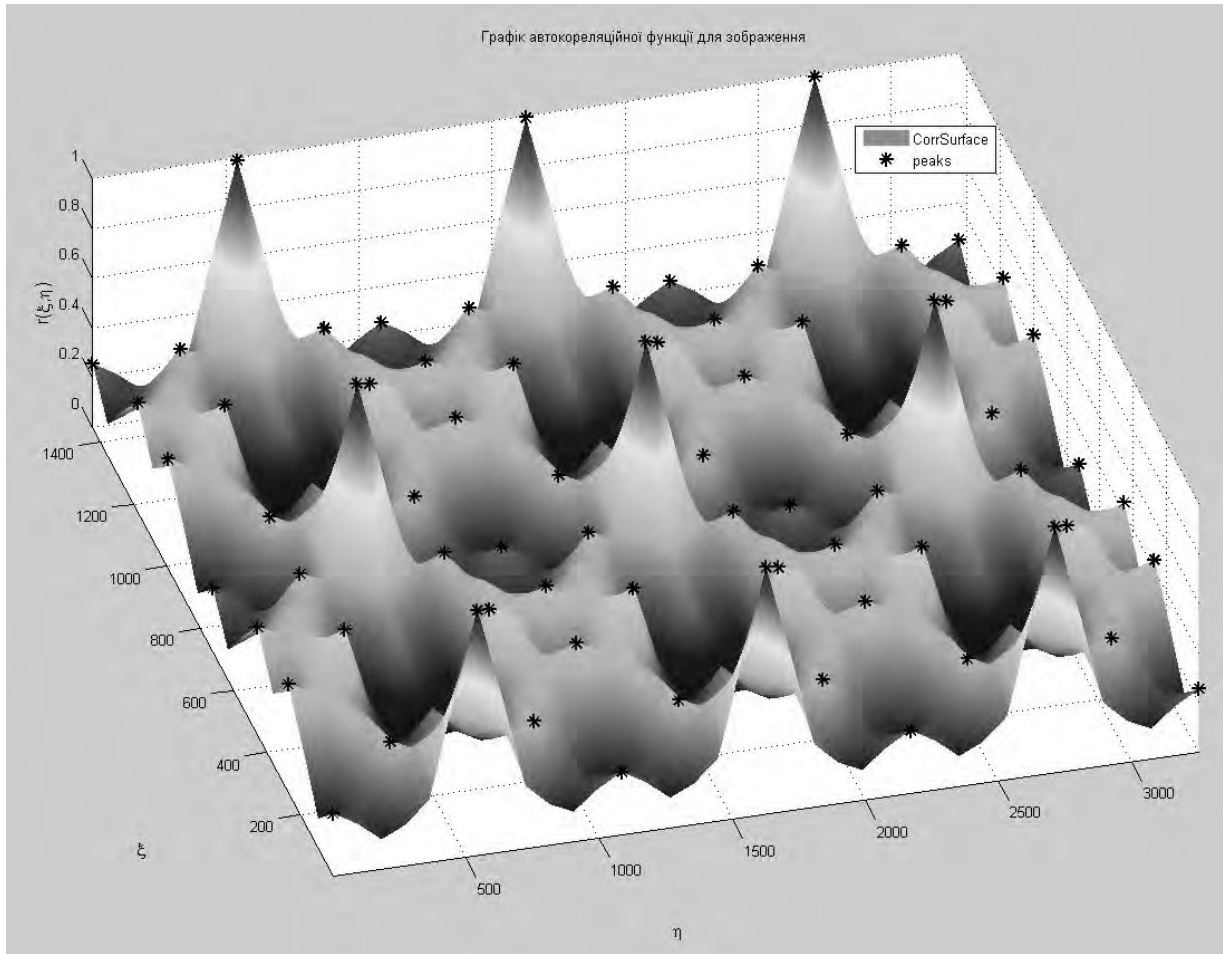


Рис. 2. Графік автокореляційної функції для зображення з рис. 1

Виділений рапорт наведено на рис. 3.

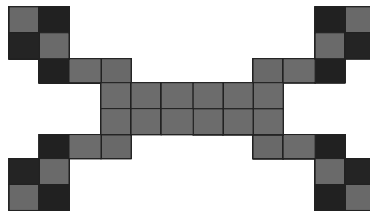


Рис. 3. Рапорт

Для знайденого рапорту вихідна матриця  $A$ , отримані матриці  $A_1, A_2, A_3, A_4$  є наступні:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

В результаті додавання і множення вище приведених матриць отримуємо бінарні матриці:

$$A^+ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, A^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B^+ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Всі матриці наділені горизонтальною, вертикальною і центальною симетрією, що є ознакою того (табл. 3), що рапорт належить групі *ртт*. Розділимо рапорт на чотири частини і отримаємо елементарний рисунок (рис. 4).

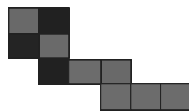


Рис. 4. Елементарний рисунок

### Висновки

Запропоновані метод і алгоритми дають змогу автоматично визначати структурні складові симетричного зображення: рапорт і елементарний рисунок. Це дає змогу визначити закони побудови симетричного зображення (групу симетрії), що допомагає економно зберігати складні зображення симетричної структури.

1. Шубников А.В. Симметрия в науке и искусстве. Издание третье, дополненное / А.В. Шубников, В.А. Копчик – М.: Институт компьютерных исследований, 2004. – 560 с.
2. Шлезингер М. Десять лекций по статистическому и структурному распознаванию / М. Шлезингер, В. Главач – К.: Наукова думка, 2004. – 545 с.
3. Грицик В.В. Моделирование та синтез складних зображень симетричної структури. / В.В. Грицик, К.М. Березька, О.М. Березький. – Львів.: Вид-во “Українська академія друкарства; Державний науково-дослідний інститут інформаційної інфраструктури”, 2005. – 140 с.
4. Файн В.С. Опознавание изображений (основы непрерывной теории и ее приложения) / В.С. Файн – М.: Наука, 1970. – 299 с.
5. Leung T., Malik J. Detecting, localizing and grouping repeated scene elements / T. Leung, J. Malik // 4th European Conference on Computer Vision Cambridge, UK, April 15–18, 1996 Proceedings – 1996. – С. 546–55.
6. Liu Y. Computational Model for Periodic Pattern Perception Based on Frieze and Wallpaper Groups / Yanxi Liu, Robert T. Collins, Yanghai Tsin // IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence (TPAMI) – 2004. – Т. 1, № 26. – С. 354 – 371.
7. Lin H.C. Extracting periodicity of a regular texture based on autocorrelation functions / Hsin-Chih Lin, Ling-Ling Wang, Shi-Nine Yang // Pattern Recognition Letters – 1997. – Т. 5, № 18. – С. 433-443.
8. Russ J. The Image Processing Handbook, second Edition. / J. Russ – US: CRC Press, 1995. – 688 с.
9. Грицик В.В. Методи і алгоритми аналізу та синтезу складних зображень на основі теоретико-групового підходу / Грицик В.В., Березький О.М. // Доповіді Національної академії наук України. – 2009. №11. – С. 64–69.
10. Polya G. Uber die Analogie der Kristallsymmetrie in der Ebene / G. Polya – 1924 – P. 278–282.