

oscillations. // J. Geophysical research. 2006. v. 111, N B11, B 11307, pp. 4-17. 5. Larson K.M., Bodin P., Gombert J. Using 1-Hz GPS data to measure Deformations caused by the Denali fault Earthquake. // Science 300, 30 V, 2003, pp 1421- 1424. 6. Park J., Song T., Kanamory H., Berger J., Braitenberg C. et al. Earth's free Oscillations excited by the 26 December 2004 Sumatra-Andaman Earthquake. // Science, 2005, v. 308, pp. 1139- 1144. 7. Pietrzak J., Socquet A., Ham D., Simons W., Vigny C., Labeur R. J., Schrama E., Stelling G., Vatvani D. Defining the source region of the Indian Ocean Tsunami from GPS, altimeters, tide gauges, and tsunami models. // ScienceDirect. 2007, Earth and Planetary Science Letter, 261, pp. 49-64.

УДК 528.33:551.24

М. Фис, В. Нікулішин
 Національний університет "Львівська політехніка"

ПРО ЄДИНИЙ АЛГОРИТМ ВИЗНАЧЕННЯ ЗНАЧЕНЬ ГУСТИНИ, ПОТЕНЦІАЛУ ТА ЕНЕРГІЇ ОДНОВИМІРНОГО РОЗПОДІЛУ МАС ЕЛІПСОЇДАЛЬНОЇ ПЛАНЕТИ

© Фис М., Нікулішин В., 2009

Приведен алгоритм аппроксимации одномерных распределений масс планеты по полиномам Лежандра и на его основе поданы формулы определения потенциала и энергии для эллипсоидальной планеты, апробированные на конкретном примере.

The algorithm of 1D density distribution approximation by Legendre polynomials is presented. Based on this approximation the internal gravity potential and potential gravity energy of ellipsoid was estimated.

Постановка проблеми

Основою для досліджень внутрішньої будови планет τ є функція розподілу мас δ , яка визначає інтегральні характеристики (потенціал, прискорення сили ваги, гравітаційна енергія). На сучасному етапі створені одновимірні моделі розподілу мас $\delta(\rho)$, які достатньо добре описують структуру в середині тіла τ . Наприклад, для сферичної поверхні Землі побудовані моделі PREM[6], PREM[7], в яких густина подається поліномами за змінною ρ . Для інших небесних тіл існують гіпотетичні сферично-симетричні моделі мас, в яких враховано їхню практику побудови моделі Землі. Отже, є можливість за даним розподілом δ знайти потенціал U і гравітаційну енергію E .

Зв'язок із важливими науковими і практичними завданнями

Обчислення значень внутрішнього потенціалу U і сили ваги g всередині планети дозволяє встановити їх особливості не тільки за глибиною, а і в довготно-широтних напрямках, наприклад, знаходити поверхні, так званих, максимальних значень g . Інтерпретація виміряних похідних функції U в середині планети (в глибоких шахтах або на океанічному дні) неможливе без урахування їх поведінки в тілі τ , а визначення гравітаційної (потенціальної) енергії навіть для модельних розподілів є інструментом для дослідження геодинамічних процесів, що дозволяє розглядати планету як цілісний динамічний об'єкт.

Аналіз останніх досліджень та публікацій присвячених вирішенню цієї проблеми

Побудові алгоритмів визначення потенціалу в середині еліпсоїдальної планети присвячено ряд робіт, зокрема в монографії [1] розроблено методика знаходження внутрішнього потенціалу і нормальної сили ваги еліпсоїдальних планет, яка враховує структуру Землі. В роботах [1, 3, 5] отримані формули, в яких потенціали U і E подано для одновимірних і трьохвимірних розподілів

мас тіла. Крім того, оцінка внутрішнього потенціалу та його максимальне значення в центрі планети розглядались в роботах [1,6].

Постановка завдання

За даним радіальним кусково-неперервним розподілом δ (для кулі К – сферично-симетричним) мас всередині еліпсоїдальної планети $\tau\left\{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right\} \leq 1$

$$\delta(\rho) = \begin{cases} \delta_0(\rho), & 0 \leq \rho < \rho_0 \\ \delta_1(\rho), & \rho_0 \leq \rho < \rho_1 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \delta_m(\rho), & \rho_{m-1} \leq \rho \leq 1 \end{cases}, \tag{1}$$

визначити внутрішній потенціал U і гравітаційну енергію E , для функцій δ_i ($i = \overline{1, m}$), що мають вигляд

$$\delta_i(\rho) = \sum_{j=0}^k a_{ij} \rho^j \quad i \tag{2}$$

$$\delta_i(\rho_l) \neq \delta_i(\rho_{l+1}), \quad 0 \leq l \leq m \tag{3}$$

Виклад основного матеріалу

Зовнішній потенціал V однорідної кульової планети К визначається формулою

$$V = \frac{f \cdot M}{r}, \tag{4}$$

де M – маса тіла К, r – радіус – вектор біжучої точки P (Рис.1).

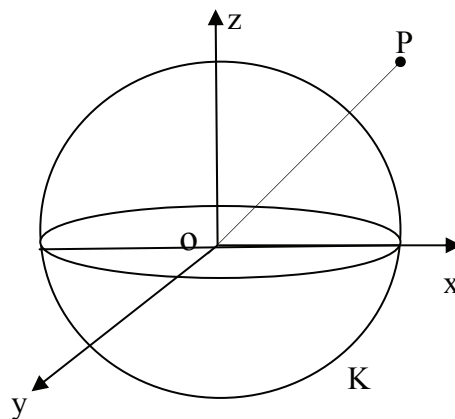


Рис. 1. Геометрична інтерпретація задачі

Зосередимось на побудові алгоритмів знаходження U і E в середині тіла, оскільки навіть для однорідної еліпсоїдальної планети τ значення V подається складним співвідношенням у вигляді квадратичної функції декартових координат x, y, z і величин, залежних від еліпсоїдальних координат ζ [2].

Вважаючи, що функція $\delta(\rho)$ визначена для $|\rho| \leq 1$ (Рис.2), представимо її у вигляді ряду за поліномами Лежандра парних степенів

$$\delta(\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cdot P_{2n}(\rho) \quad (5)$$

Коефіцієнти C_n визначаються через лінійні комбінації степеневих моментів у вигляді

$$M_l = \int_0^1 \delta(\rho) \cdot \rho^{2l} d\rho \quad (6)$$

$$C_n = \frac{(4n+1)}{2} \int_{-1}^1 \delta(\rho) \cdot P_{2n}(\rho) d\rho = (4n+1) \int_0^1 \delta(\rho) P_{2n}(\rho) d\rho = (4n+1) \cdot \sum_{l=0}^n d_l \int_0^1 \delta(\rho) \rho^{2l} d\rho, \quad (7)$$

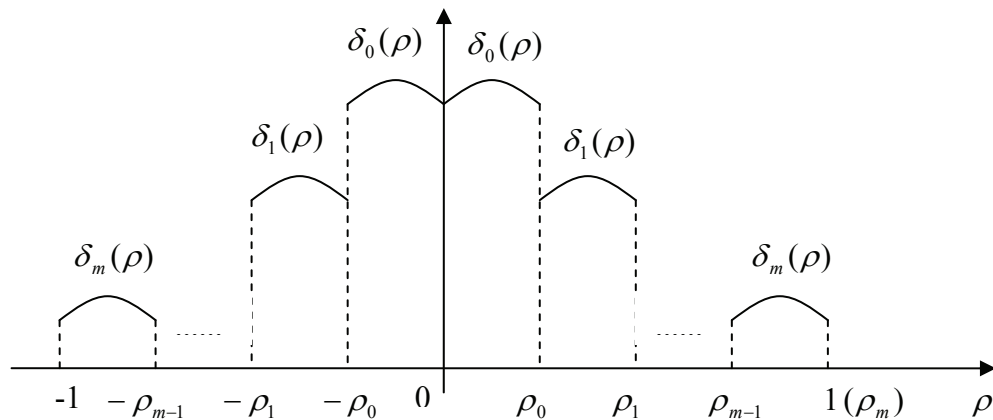


Рис.2 Схематичний графік функції $\delta(\rho)$, ($|\rho| < 1$)

Ряд (5) збігається в середньому, тобто

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \left\{ \delta(\rho) - \sum_{m=0}^n C_m P_{2m}(\rho) \right\}^2 d\rho = 0,$$

звідки випливає рівність Парсеваля

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n^2 (4n+1) = \int_0^1 \delta^2(\rho) d\rho, \quad (8)$$

яка є критерієм оптимального вибору кількості членів ряду і збіжності співвідношення (1).

Сумування в середньо-квадратичному гарантує рівномірну збіжність ряду

$$U(P) = f \int_{\tau} \frac{\delta}{r} d\tau = f \sum_{n=0}^{\infty} C_n U_n(P), \quad (9)$$

де

$$U_n(P) = f \int_{\tau} \frac{P_{2n}(\rho)}{r(Q, P)} d\tau_Q = \sum_{l=0}^n d_l f \int_{\tau} \frac{\rho^{2l}}{r(Q, P)} d\tau = \sum_{l=0}^n d_l W_{2l}(P). \quad (10)$$

Користуючись методикою, наведеною в монографії [4], запишемо потенціали

$$W_e = \frac{3fV_{\tau}}{4(l+1)} \int_0^{\infty} \left[1 - \left(\frac{x^2}{a^2+u} + \frac{y^2}{b^2+u} + \frac{z^2}{c^2+u} \right)^{l+1} \right] \frac{dU}{Q(U)}, \quad (11)$$

де $Q(U) = \sqrt{(a^2+u) \cdot (b^2+u) \cdot (c^2+u)}$, V_{τ} – об'єм тіла τ .

Використовуючи формули (2) і (9) визначаємо значення потенціальної енергії

$$E = -\frac{1}{2} \int_{\tau} \delta U d\tau = -\frac{f}{2} \sum_{n=0}^{\infty} C_n \int_{\tau} P_{2n}(\rho) d\tau \sum_{m=0}^{\infty} C_m U_m d\tau = -\frac{f}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\tau} C_n C_m \int_{\tau} P_{2n}(\rho) U_m(\rho) d\tau. \quad (12)$$

Таким чином, обчисливши один раз коефіцієнти C_n , здійснюємо апроксимацію густини δ , і за відповідними формулами (5) і (7) обчислюємо U та E .

Перевіримо даний алгоритм на прикладі кулі K , для якого можна знайти точні значення U і E і порівняти їх з обчисленими.

Введемо наступні позначення: τ_i – куля радіуса $\alpha_i R$,

G_i – шар обмежений сферами радіусів: $\rho_i = \alpha_i \cdot R$, $\rho_{i-1} = \alpha_{i-1} \cdot R$.

Еліпсоїдальна координата визначатиметься

$$\xi = \begin{cases} r^2 - R^2, & r > R \\ 0, & r \leq R \end{cases}.$$

Для функції $\delta = \rho^l = (\rho^2)^{\frac{l}{2}}$ запишемо [4]

$$f(x^2) = \int_0^{x^2} (\rho^2)^{\frac{l}{2}} d(\rho^2) = \frac{2}{l+2} (x^2)^{\frac{l+2}{2}},$$

звідки отримаємо

$$W_l = \begin{cases} \frac{3V_{\tau_i} f}{R \cdot (l+2) \cdot \rho^2}, & \rho > 1 \\ \frac{3V_{\tau_i} f}{\alpha_i R} \left(1 - \frac{\rho^{l+2}}{(l+3)\alpha_i^{l+2}} \right), & \rho \leq 1, \end{cases}$$

де $\rho = \frac{r}{R}$ – відносний радіус, V_{τ} – об'єм тіла τ_i .

Тоді зовнішній і внутрішній потенціали кулі τ_i з розподілом $\delta_i(\rho)$ подаються відповідно

$$V_{\tau_i}^3 = \frac{3f}{R \cdot \rho} \sum_{l=0}^k \frac{a_{il}}{l+2} = \frac{fM_{\tau_i}}{\rho \cdot R}, \quad (M_{\tau_i} - \text{маса тіла } \tau_i), \quad (13)$$

$$U_{\tau_i}^6 = \frac{3V_{\tau_i}}{R} \sum_{l=0}^k \frac{a_{ik}}{l+2} \left(1 - \frac{\rho^{l+2}}{\alpha_i^{l+2}(l+3)} \right). \quad (14)$$

Всередині тіла G_i для $i > 0$ маємо

$$U_{G_i} = U_{\tau_i} - U_{\tau_{i-1}} = \frac{3V_k}{R} \left[\sum_{l=0}^{i-1} \frac{a_{il}}{l+2} \left(\alpha_i^3 - \alpha_{i-1}^3 - \frac{\rho^{l+2}}{l+3} \left(\frac{1}{\alpha_i^{l-1}} - \frac{1}{\alpha_{i-1}^{l-1}} \right) \right) \right],$$

і $U_{G_0} = U_{\tau_0}$.

Згідно теореми Айворі [4] значення потенціалу в порожнині G_i є постійним і його найпростіше знайти в центрі кулі τ_i , тобто

$$U_{G_i}(0) = \int_{G_i} \frac{\delta_i(\rho)}{r} d\tau = \sum_{l=0}^k a_{il} \int_0^{\rho_i} \rho^l \rho d\rho \cdot \frac{3V_k}{R} = \frac{3V_k}{R} \sum_{l=0}^k \frac{a_{il} \cdot \rho_i^{l+2}}{l+2}.$$

Для $i > 0$ сукупність формул можна записати у вигляді

$$U_{G_i}(P) = \begin{cases} \sum_{j=0}^{i-1} \frac{f \cdot M_{G_j}}{R \cdot \rho} + \frac{3V_k}{R} f \sum_{l=0}^k \frac{a_{il}}{l+2} \left(\alpha_i^3 - \alpha_{i-1}^3 - \frac{\rho^{l+2}}{l+3} \left(\frac{1}{\alpha_i^{l-1}} - \frac{1}{\alpha_{i-1}^{l-1}} \right) \right), & P \in G_i, \\ \frac{fV_k}{R} \sum_{l=0}^k \sum_{j=i+1}^k \frac{a_{jl}}{l+2} (\rho_i^{l+2} - \rho_{i-1}^{l+2}), & P \in \bigcup_{j=1}^{i-1} G_j, \\ \sum_{j=0}^{i-1} \frac{f \cdot M_{G_j}}{R \cdot \rho} & P \notin \bigcup_{j=1}^i G_j, \end{cases} \quad (15)$$

а коли $i=0$ то матимемо

$$U_{G_0}(P) = \frac{V_k}{R} \left\{ 3 \sum_{l=0}^k \frac{a_{0l}}{l+2} \left(\alpha_0^3 - \frac{\rho^{l+3}}{l+3} \cdot \frac{1}{\alpha_0^{l-1}} \right) + \sum_{j=1}^k \sum_{l=0}^k \frac{a_{jl}}{l+2} \cdot \rho_i^{l+2} \right\}. \quad (16)$$

Підставляючи вирази (15), (16) в співвідношення (12) для енергії E отримаємо остаточну формулу, яку не приводимо (у зв'язку з громіздкістю).

Розглянемо конкретний приклад.

Знайти внутрішній потенціал U та енергію в середині одиничної кулі з $\delta_m = \sqrt{\rho}$.

За визначеними степеневими моментами $M_{2k} = \frac{2}{4k+3}$ апроксимуємо функцію δ_m рядом (5), із оптимальною кількістю членів, що дорівнює 50, для $S_a = 0.499995$ (теоретичне значення

$$S_m = \int_0^1 \delta^2(\rho) d\rho = 0,5).$$

Далі визначаємо значення внутрішнього потенціалу U_a за формулами (5), (7), (15) та відповідні теоретичні значення

$$U_m = \frac{6}{5} \left(1 - \frac{2}{7} \rho^{\frac{5}{2}} \right), \quad 0 \leq \rho \leq 1.$$

Результати занесено в таблицю.

Порівняння теоретичних значень δ_m, U_m і апроксимаційних δ_a, U_a

ρ	Значення густини		Значення потенціалу	
	δ_a	δ_m	U_a	U_m
0.0	0.0250072	0.0000000	1.2000000	1.2000000
0.1	0.3165041	0.3162278	1.1989159	1.1989158
0.2	0.4474749	0.4472136	1.1938671	1.1938668
0.3	0.5477847	0.5477226	1.1830990	1.1830988
0.4	0.6322026	0.6324555	1.1653050	1.1653053
0.5	0.7142857	0.7071068	1.1393911	1.1393908
0.6	0.7744211	0.7745967	1.1043927	1.1043926
0.7	0.8365385	0.8366600	1.0594409	1.0594411
0.8	0.8944955	0.8944272	1.0037372	1.0037371
0.9	0.9488155	0.9486833	0.9365372	0.9365371
1.0	1.0006086	1.0000000	0.8571429	0.8571429

Значення енергії за отриманою наближеною формулою буде $E_a = 0,428568$, а теоретичне – $E_m = 0,428571$.

Висновки: Отже, в неперервному випадку для кулі апроксимаційні формули добре відображають істинні значення, а тому можуть бути використані для обчислення величин U та E . Оскільки для еліпсоїдальної планети обчислення потенціалу U та енергії E за точними формулами

можливе, але надзвичайно громіздке і фактично нездійсненне, тому отримані наближені співвідношення є практично єдиним апаратом визначення значень потенціалу U та енергії E .

1. Картвелишвили К.М. Планетарная плотностная модель и нормальное поле Земли.:М. Наука,1983,93с. 2. Мецераков Г.А. О среднем значении внутреннего гравитационного потенциала Земли. // Геодезия, картография и аерофотосъемка. – Львов, 1974. Вып. 19. – С.61-62. 3. Мецераков Г.А. Задачи теории потенциала и обобщенная Земля. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы. -1991,216 с. 4. Муратов Р.З. “Потенциалы эллипсоида”, Москва, Атомиздат, 1976, 144с. 5. Фис М., Заяць О. , Фоца Р. , Волос В. . Про один метод визначення потенціалу неоднорідної еліпсоїдальної планети. “Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва ”, 2005 ст. 41-42. 6. Dziewonski A.M., Halls A.L., Lapwuyd E.R. Parametrically Simple Earth models, consistent geophysical data .-Phys. Planet .Inter.,10,1975,p.12-48. 7. Dziewonski A.M., Anderson D.L. Preliminary reference Earth model. – Physics of the Earth and Planet. Inter., 25, 1981, p.297-356.

B. Jankowicz

University of Agriculture in Krakow

RESEARCH OF THE ATTITUDE DATA CORRECTION METHOD FOR THE UAV REMOTE SENSING IMAGES OF INACCESSIBLE AREAS IN LANDSCAPE ARCHITECTURE

© Jankowicz B.,2009

Получение изображений высокого разрешения с применением малой авиации играет все более значительную роль в области применения фотограмметрии и дистанционного зондирования. Для коррекции данных дистанционного зондирования без опорных точек необходимы точные данные внешнего ориентирования. Начальные данные ориентирования могут быть получены с помощью GPS/INS. В данной статье проводится анализ ошибок данных ориентирования и предлагается метод высокоточной коррекции без использования опорных точек.

As an important way to obtain the high-resolution remote sensing images, the unmanned aerial vehicle (UAV) aviation remote sensing plays a more and more important role in the area of photogrammetry and remote sensing application. The correction of the UAV remote sensing images without the ground control points needs high-resolution attitude data. The original attitude data can be obtained from the UAV airborne GPS/INS.

The attitude data error analysis and correction method is proposed, and the corresponding error calibration mode is established in this paper to realize high-precision correction without the ground control points.

Introduction.

With the rapid development of civil remote sensing recently, the demand for remote sensing image is increasing, especially large-scale and high-resolution remote sensing images.

At present, the main information acquisition platforms of the world are still satellite and manned plane. The shortcomings of the satellite remote sensing platform are high price and long return cycle, so when high-resolution images are got, the update speed of the images is slow. While the manned-plane remote sensing system is mainly limited by rising-landing and safety condition, it is unable to satisfy the users' requests about safety.

As a new and effective type of earth observation system, the UAV remote sensing information platform is proposed to obtain remote sensing images at present. Its main characteristics are as follows: