

## МОДЕЛЮВАННЯ СЕРЕДОВИЩ ІЗ ЗАДАНИМ КОЕФІЦІЄНТОМ ЗАЛОМЛЕННЯ НА ОСНОВІ ХАРАКТЕРИСТИК РОЗСІЯННЯ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО ПОЛЯ

© Андрійчук М.І., 2010

Для створення середовища із заданим коефіцієнтом заломлення пропонується поєднання асимптотичного підходу до розв’язання відповідної дифракційної задачі та числового розв’язування отриманих інтегральних рівнянь. Близький до заданого коефіцієнт заломлення формується за рахунок зміни електрофізичних і геометричних параметрів малих включень у задане середовище. Початкову дифракційну задачу розв’язано за припущення  $ka \ll 1$ ,  $d \gg a$ , де  $a$  – розмір окремого включення, а  $d$  – відстань між ними. На поверхні малих включень задано граничні умови імпедансного типу. Результати числового моделювання збігаються із теоретичними положеннями, що уможливило числову реалізацію методу створення середовищ із заданим коефіцієнтом заломлення.

**Ключові слова:** асимптотичний підхід, коефіцієнт заломлення, числове моделювання.

Combination of the asymptotical approach for solving the initial diffraction problem and numerical solution of the received integral equations is applied to creating the media with desired refraction coefficient. The obtained refraction coefficient, close to the desired one, is created by change of electrophysical and geometrical parameters of small particles embedded in given media. The initial diffraction problem is considered under the assumptions  $ka \ll 1$ ,  $d \gg a$ , where  $a$  is the size of the particle and  $d$  is the distance between the neighboring particles. Impedance boundary conditions are assumed on the boundaries of small particles. The results of numerical simulation show good agreement with the theory. They open a way to numerical implementation of the method for creating media with a desired refraction coefficient.

**Keywords:** asymptotical approach, refraction coefficient, numerical modeling.

### Вступ

Створення середовищ із заданим коефіцієнтом заломлення є важливою інженерною проблемою у процесі проектування, виготовлення і експлуатації мікроелектромеханічних систем [1, 2]. Таке середовище пропонується створити на основі використання електромагнітного розсіяння певною областю, яка містить велику кількість малих сферичних об’єктів з імпедансними умовами на їхній поверхні. Теорія електромагнітного розсіяння малими включеннями довільної форми розвинена в роботах [3, 4]. Запропонований підхід дає змогу створювати матеріали із заданою просторовою дисперсією, тобто створити коефіцієнт заломлення  $n^2(x, \omega)$  із необхідною залежністю від частоти  $\omega$ . Зокрема, можна створювати матеріали з від’ємним заломленням. Такі матеріали використовують у багатьох технічних застосуваннях [5–7].

Асимптотичний розв’язок задачі розсіяння у випадку багатьох включень отримано у [8] за допущень  $ka \ll 1$ ,  $d = O(a^{1/3})$ ,  $M = O(1/a)$ , де  $a$  – розмір включення,  $k = 2\pi/\lambda$  – хвильове число,  $d$  – відстань між сусідніми включеннями, а  $M$  – загальна кількість включень у деякій обмеженій об-

ласті  $D \subset R^3$ . На границі  $S_m$   $m$ -го включення  $D_m$  задано імпедансні граничні умови. У [9] ці допущення узагальнено так:  $\zeta_m = \frac{h(x_m)}{a^\kappa}$ ,  $d = O(a^{(2-\kappa)/3})$ ,  $M = O(\frac{1}{a^{2-\kappa}})$ ,  $\kappa \in (0,1)$ , де  $\zeta_m$  – поверхневий імпеданс,  $h_m = h(x_m)$ ,  $x_m \in D_m$ , а  $h(x) \in C(D)$  – довільна неперервна у  $\bar{D}$  функція,  $\text{Im } h \leq 0$ .

Однорідне поле  $u_0$  задовольняє рівняння Гельмгольца в  $R^3$ , а розсіяне поле – умови випромінювання. У цій статті припускається, що параметр  $\kappa \in (0,1)$  – мале включення  $D_m$  – куля радіуса  $a$  з центром у точці  $x_m$ ,  $1 \leq m \leq M$ .

### Задача електромагнітного розсіяння одним включенням

Розглянемо спочатку постановку дифракційної задачі та асимптотичний підхід до її розв’язування у разі одного включення. Нехай  $D$  – мале включення і  $a = \frac{1}{2} \text{diam} D$ . З метою використання асимптотичного підходу задамося обмеженням  $ka \ll 1$ , де  $k$  – хвильове число. У разі векторного характеру електромагнітного поля, його компоненти  $E$  і  $H$  задовольняють такі рівняння

$$\nabla \times E = i\omega\mu H, \quad \nabla \times H = -i\omega\varepsilon'(x)E \quad \text{у } R^3, \quad (1)$$

де  $\omega > 0$  – частота електромагнітного поля,  $\mu = \mu_0 = \text{const}$  – магнітна проникність; діелектрична проникність  $\varepsilon$  задається так  $\varepsilon'(x) = \varepsilon_0 = \text{const} > 0$  в  $D' = R^3 \setminus D$ ,  $\varepsilon'(x) = \varepsilon(x) + i\frac{\sigma(x)}{\omega}$ ;  $\sigma(x) \geq 0$ ,  $\varepsilon'(x) \neq 0 \forall x \in R^3$ ,  $\varepsilon'(x) \in C^2(R^3)$  – двічі неперервно-диференційована функція,  $\sigma(x) = 0$  у  $D'$ ,  $\sigma(x)$  – провідність.

Система (1) може бути зведена до такої [10]

$$\nabla \times \nabla \times E = K^2(x)E, \quad H = \frac{\nabla \times E}{i\omega\mu}, \quad (2)$$

де  $K^2(x) = \omega^2 \varepsilon'(x) \mu$ .

Розв’язок першого рівняння системи (2)

$$\nabla \times \nabla \times E = K^2(x)E \quad (3)$$

шукатимемо у вигляді

$$E(x) = E_0(x) + v, \quad (4)$$

де  $E_0(x)$  – плоска хвиля, що падає,

$$E_0(x) = \ell e^{ik\alpha \cdot x}, \quad k = \frac{\omega}{c}, \quad (5)$$

$c = \omega \sqrt{\varepsilon\mu}$  – хвильова швидкість в  $D'$ ;  $\alpha \in S^2$  – напрямок плоскої хвилі, що падає;  $S^2$  – одинична сфера в  $R^3$ ;  $\ell \cdot \alpha = 0$ ,  $\ell$  – постійний вектор, а розсіяне поле  $v$  задовольняє умову випромінювання

$$\frac{\partial v}{\partial r} - ikv = o\left(\frac{1}{r}\right), \quad r = |x| \rightarrow \infty, \quad (6)$$

однорідно у напрямках  $\beta = x/r$ . Якщо  $E$  знайдено, то пара  $\{E, H\}$ , де  $H$  визначається другою формулою у (2), є розв’язком задачі розсіяння. У роботі [8] показано, що задача розсіяння для системи (1) еквівалентна задачі розв’язування такого інтегрального рівняння

$$E(x) = E_0(x) + \int_D g(x, y)(p(y)E(y) + \nabla_y(q(y) \cdot E(y)))dy, \quad (7)$$

де  $p(x) = K^2(x) - k^2$ ,  $p(x) = 0$  in  $D'$ ,  $q(y) = \frac{\nabla K^2(x)}{K^2(x)}$ ,  $q(x) = 0$  в  $D'$ , а функція Гріна має форму

$$g(x, y) = \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}.$$

На підставі припущень щодо функцій  $p$  і  $q$  рівняння (7) можна записати у вигляді

$$E(x) = E_0(x) + \int_D g(x, y)(p(y)E(y)dy + \nabla_x \int_D g(x, y)q(y) \cdot E(y)dy). \quad (8)$$

Рівняння (8) – інтегральне рівняння Фредгольма II роду в  $H^1(D)$ , у [8] було доведено, що воно має єдиний розв'язок. Цей теоретичний висновок відіграє істотну роль при зведенні рівняння (8) до відповідної системи лінійних рівнянь під час його числового розв'язування. Істотною перевагою формули (8) є те, що оператор  $\nabla_x$  винесено за межі інтегрування. Слабка особливість (при  $x = y$ ) у ядрі правої частини (8) є абсолютно інтегрованою. Для числового розв'язування рівняння (8) використовується модифікація методу колокацій, запропонована у [11].

#### Асимптотичний розв'язок задачі розсіяння у разі одного включення

В області  $|x - x_m| \geq d \gg a$ , де  $d > 0$  – віддаль, яка характеризує початок дальньої зони, функцію  $E(x)$  можна обчислювати за наближеною формулою (див. [9])

$$E(x) = E_0(x) + g(x, x_m)V_m + \nabla_x g(x, x_m)v_m \quad (9)$$

з похибкою  $O(\frac{a}{d} + ka)$ . Вектор  $V_m$  і скалярна величина  $v_m$  визначаються за формулами

$$V_m = \frac{V_{0m}}{1 - a_m} + \frac{A_m}{1 - a_m}v_m, \quad (10)$$

$$v_m = \frac{(1 - a_m)v_{0m} + B_m \cdot V_{0m}}{(1 - a_m)(1 - b_m) - B_m \cdot A_m}, \quad (11)$$

де

$$V_{0m} = \int_D p(x)E_0(x)dx, \quad v_{0m} = \int_D q(x)E_0(x)dx, \quad (12)$$

$$A_m = \int_D p(x)\nabla_x g(x, x_m)dx, \quad a_m = \int_D p(x)g(x, x_m)dx, \quad (13)$$

$$B_m = \int_D q(x)g(x, x_m)dx, \quad b_m = \int_D q(x)\nabla_x g(x, x_m)dx. \quad (14)$$

Щоб перевірити ефективність запропонованого асимптотичного підходу, необхідно порівняти значення електромагнітного поля, визначені за формулою (9) із значеннями, які отримуються під час розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь, яка відповідає рівнянню (8).

#### Асимптотичний розв'язок задачі розсіяння у разі багатьох включень

Задача розсіяння у разі багатьох включень описується системою рівнянь (1) і може бути зведена до розв'язування системи (2), яка, своєю чергою, приводить до рівняння, аналогічного (8). Асимптотичний розв'язок (9) при цьому узагальнюється так:

$$E(x) = E_0(x) + \sum_{m=1}^M [g(x, x_m)V_m + \nabla_x g(x, x_m)v_m] \quad (15)$$

в області  $\min_{1 \leq m \leq M} |x - x_m| := d \gg a$  з похибкою для (9), де  $M$  – кількість включень (куль радіусом  $a$ ) в області  $D$ . Замість знаходження  $V_m$  і  $v_m$  у (10) і (11) необхідно розв'язувати взаємозалежну систему алгебраїчних рівнянь. Ця система для векторів  $V_j$  має вигляд

$$V_j = V_{0j} + \sum_{m=1}^M (a_{jm}V_m + B_{jm}v_m), 1 \leq j \leq M, \quad (16)$$

де

$$V_{0j} := \int_{D_j} p(x)E_0(x)dx, \quad (17)$$

$$a_{jm} := \int_{D_j} p(x)g(x, x_m)dx, \quad (18)$$

$$B_{jm} := \int_{D_j} p(x)\nabla_x g(x, x_m)dx, \quad (19)$$

а для скалярних величин  $v_j$  така

$$v_j = v_{0j} + \sum_{m=1}^M (C_{jm}V_m + d_{jm}v_m), 1 \leq j \leq M, \quad (20)$$

де

$$v_{0j} := \int_{D_j} q(x) \cdot E_0(x)dx, \quad (21)$$

$$C_{jm} := \int_{D_j} q(x)g(x, x_m)dx, \quad (22)$$

$$d_{jm} := \int_{D_j} q(x) \cdot \nabla_x g(x, x_m)dx. \quad (23)$$

Розв'язавши системи (16), (20), матимемо набори  $V_m$  і  $v_m$ ,  $1 \leq m \leq M$ . Ця система має єдиний розв'язок за умови  $ka \ll 1$  і  $a \ll d$ . Елементи  $B_{jm}$  і  $C_{jm}$  – вектори, а  $a_{jm}$ ,  $d_{jm}$  – скалярні величини. Зрозуміло, що для числового розв'язання систем (16), (20) потрібно використовувати ітераційний метод. Необхідною умовою збіжності цього методу є така:

$$\max_{1 \leq j \leq M} \sum_{m=1}^M (|a_{jm}| + |d_{jm}| + \|B_{jm}\| + \|C_{jm}\|) < 1. \quad (24)$$

У (24)  $\|B_{jm}\|$  і  $\|C_{jm}\|$  – довжини відповідних векторів. Умова (24) виконується, якщо  $a \ll 1$  і  $M$  не сильно зростає при  $a \rightarrow 0$ , не швидше ніж  $O(a^{-3})$ .

У разі багатьох включень необхідно дослідити числово розв'язки систем (16), (20) і перевірити умову (24) для різних значень геометричних параметрів задачі.

### Оцінка меж застосування асимптотичного підходу

Запишемо лінійну систему рівнянь, яка відповідає (8), у вигляді

$$E_j = E_{0j} + \sum_{n=1}^N g(x_j, x_n)p(x_n)E(x_n) + \nabla_x \sum_{n=1}^N g(x_j, x_n)q(x_n) \cdot E(x_n), \quad j=1, 2, \dots, N, \quad x_j, x_n \in D, \quad (25)$$

де  $E_j = E(x_j)$ . Маючи розв'язок системи (25), значення функції  $E(x)$  в  $R^3$  можна обчислити за формулою

$$E(x) = E_0(x) + \int_D g(x, y)(p(y)E(y)dy + \nabla_x \int_D g(x, y)q(y) \cdot E(y)dy). \quad (26)$$

У формулі (26) значення  $E(y)$  відповідають множині  $\{E(y_n), n=1, \dots, N\}$ , визначеній у (25), де  $N$  – кількість точок колокації. Під час числових розрахунків інтегрування по області  $D$  замінюється обчисленням відповідного ріманового інтеграла [12], а похідна  $\nabla_x$  замінюється розділеною різницею. Так можна порівнювати числові розв'язки системи (25) із асимптотичними розв'язками, отриманими за допомогою формул (9) або (15).

Припустимо, що  $\alpha = e_3$ , де  $e_3$  – одиничний вектор вздовж осі  $z$ , тоді із умови  $E \cdot \alpha = 0$  випливає, що вектор  $E$  розміщений у площині  $xOy$ , тобто має лише дві компоненти  $E_x$  і  $E_y$ .

Розглянемо спочатку результати для випадку одного включення, одержані із використанням асимптотичної формули (9) і розв'язуванням системи лінійних рівнянь (25) із подальшим застосуванням подання (26). Числові розрахунки наведено для двох типів початкового поля  $E_0(x)$ : у першому з них амплітудний розподіл поля має синусоподібну форму вздовж осей  $x$  та  $y$  з максимумом посередині віддаленої зони (рис. 1, а); у другому випадку амплітуда  $E_{0x}$  – постійна, а  $E_{0y}$  має синусоподібну форму (рис. 1, б).

Значення відхилення для компонент  $E_x$  і  $E_y$  залежить як від значення параметра  $ka$ , так і від віддалі  $d$  між центром області  $D$  і точкою в дальній зоні. Розв'язок системи рівнянь (25) з  $N = 100$  точками колокації можна розглядати як “точний”, оскільки відносна похибка  $N$  при цьому не перевищує 1% [13].

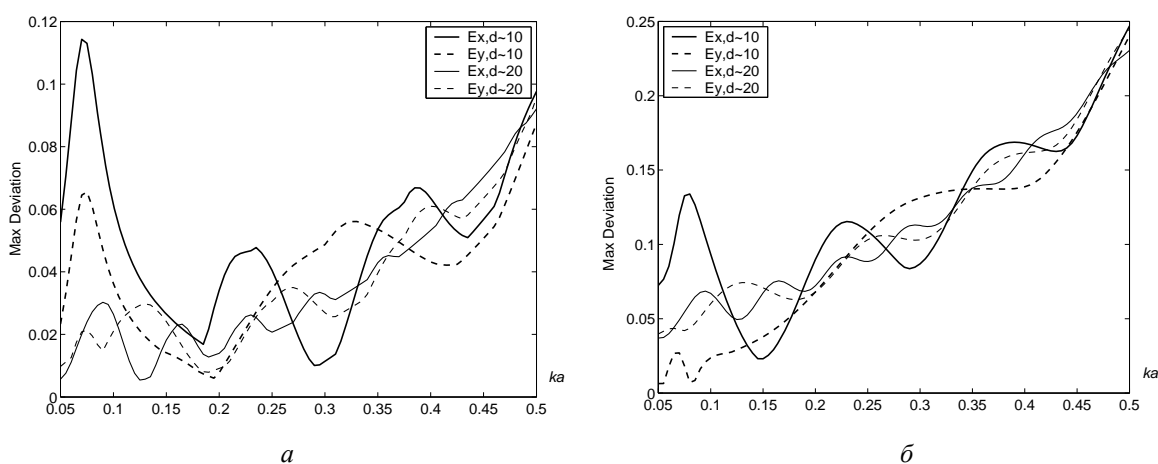


Рис. 1. Залежність максимального відхилення амплітуди компонент поля від значення  $ka$

На рис. 2 показано залежність максимального відхилення амплітуд поля за малих значень  $ka$ . Порівнюючи ці значення з даними рис. 1, можна бачити, що за малих  $ka$  відхилення значно менше, що цілком узгоджується з теоретичними положеннями. На рис. 3 зображено залежність амплітуди компоненти  $E_x$  від значень  $ka$ . Видно, що при зменшенні  $ka$  зменшується відхилення амплітуд і покращується наближення до “точного” значення за формою.

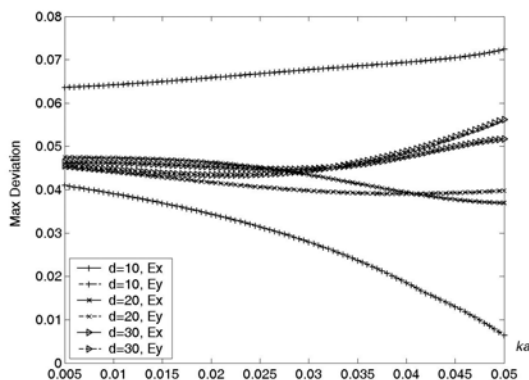


Рис. 2. Максимальне відхилення амплітуд компонент поля за малих  $ka$

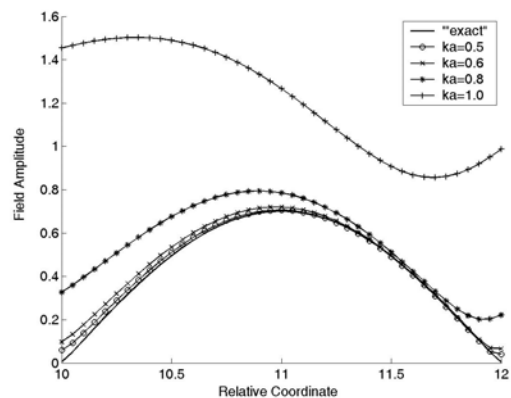


Рис. 3. Залежність амплітуди компоненти  $E_x$  від  $ka$

Для випадку багатьох включень досліджено збіжність ітераційного процесу розв'язування системи лінійних рівнянь (16), (20). Перевірка виконання умови (24) вимагає додаткових обчислень, тому простіше дослідити область збіжності ітераційного процесу, змінюючи геометричні параметри задачі (такі як кількість включень  $M$ , їхній радіус  $a$  і віддаль  $d$  між ними) і встановити межі застосування асимптотичної формули (15). Числові розрахунки наведено для двох значень  $a$ :  $a = 0.01$  (рис. 4, а) і  $a = 0.005$  (рис. 4, б), віддаль  $d$  задавалась так  $d = 0.2, d = 0.3, d = 0.4$  (суцільна, штрихова і штрихпунктирна лінії відповідно),  $M = 4$ . Система (16), (20) розв'язувалась так: на першому кроці задавалося початкове наближення  $v_m^{(0)}$ , на другому кроці визначались величини  $V_j^{(0)}$  розв'язанням системи (20), третій крок полягав у знаходженні  $v_m^{(1)}$  за відомих  $V_j^{(0)}$ , і т. д. З рисунків видно, що збіжність ітераційного процесу істотно залежить від величини  $a$ . Точність на 20-й ітерації дорівнює 0.212, 0.0327, і 0.0022 для  $d = 0.2, d = 0.3, d = 0.4$  відповідно і становить  $5.117 \cdot 10^{-4}$ ,  $3.274 \cdot 10^{-4}$ , і  $3.271 \cdot 10^{-4}$  для тих самих значень  $d$  за  $a = 0.005$ . Ці значення наведено для величин  $v_m^{(s)}$ , де  $s$  – номер ітерації. Досягнута точність для величин  $V_m^{(s)}$  має такий самий порядок.

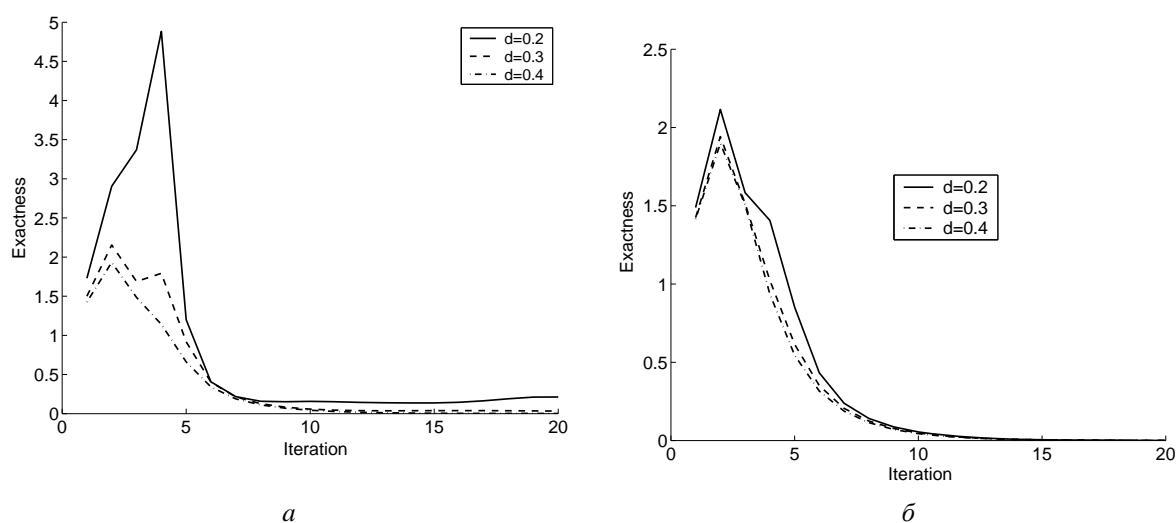


Рис. 4. Характер збіжності ітераційного процесу для системи (16), (20) за величинами  $v_m^{(s)}$

Компоненти загального поля  $E(x)$  в дальній зоні можна легко розрахувати за формулою (15). Прирости  $x$ - та  $y$ -компонент (другий доданок у (15)) зображено на рис. 5. Значення  $a = 0.005$ ,  $d = 0.4$ ,  $M = 4$ . Включення розміщені рівномірно в площині  $xOy$ , розмір  $kl$  області  $D$  вздовж осей  $x$  та  $y$  дорівнює 1.21.

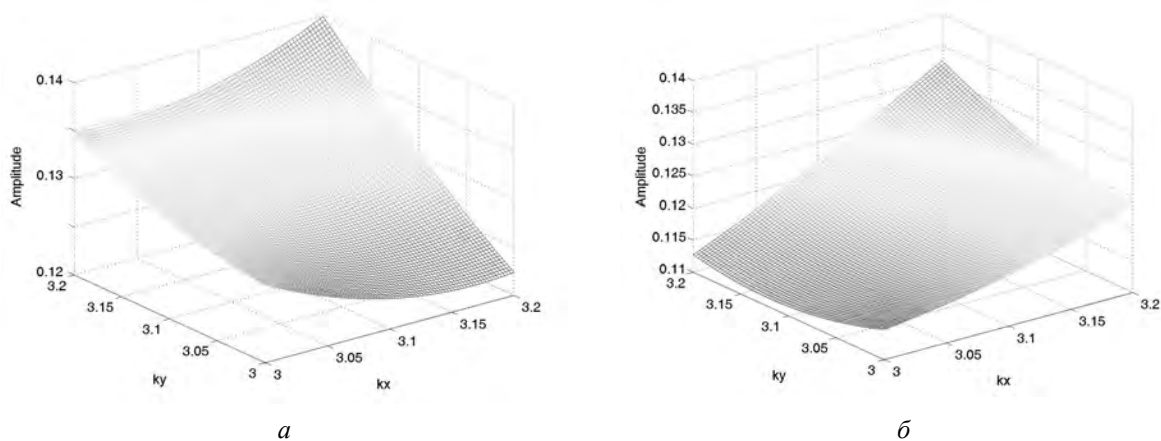


Рис. 5. Прирости амплітуд для  $E_x$  - (а) і  $E_y$  -компонент (б)

Результуючі компоненти  $E_x$  і  $E_y$  зображено на рис. 6. Обидві компоненти доволі близькі (початкові компоненти  $E_{0x}$  і  $E_{0y}$  однакові). Максимальний приріст амплітуди не перевищує 14 % і досягається для компоненти  $E_x$  поля. Числові результати показують, що цей приріст зменшується зі зменшенням характерного розміру  $kl$  області  $D$  або зі збільшенням віддалі до дальньої зони за одного і того самого значення  $kl$ .

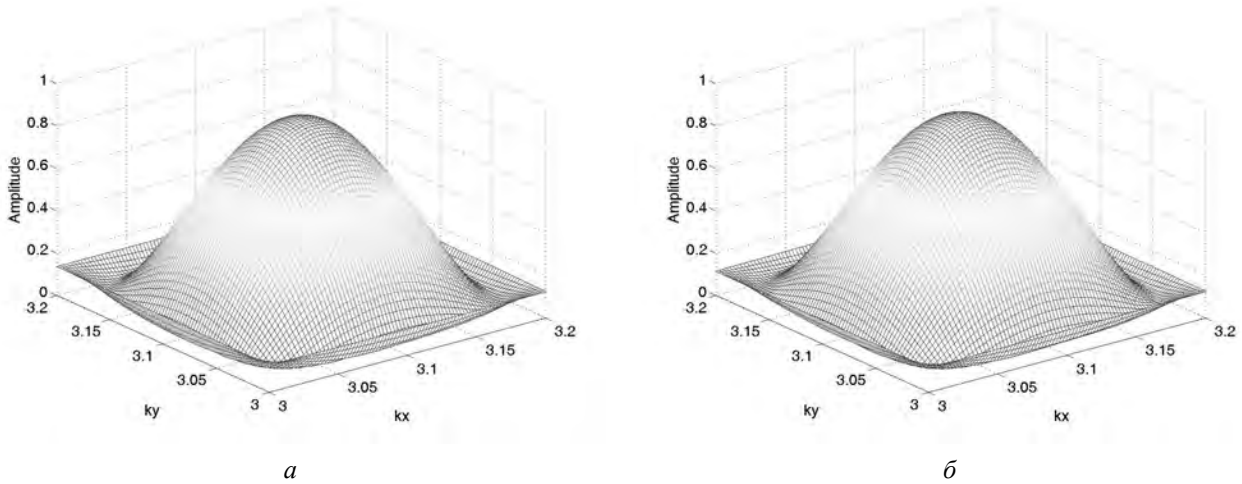


Рис. 6.  $E_x$  - (а) і  $E_y$  - (б) компоненти загального поля

### Створення коефіцієнта заломлення, близького до заданого

Метод формування коефіцієнта відбиття  $n^2(x)$  на основі теоретичних результатів запропоновано у [9], але ці результати є не дуже корисними з практичного погляду, оскільки вони не оперували геометричними параметрами задачі, а потребували лише інформації про кількість включень  $M$  у заданій області  $D$ . Числова реалізація цього методу запропонована у [14]. Покажемо, як можна сформувати коефіцієнт заломлення, близький до заданого, і на основі яких параметрів задачі можна здійснити його оптимізацію. Нехай  $n^2(x)$  – шуканий коефіцієнт відбиття, а  $n_0^2(x)$  коефіцієнт відбиття вільного простору, в якому міститься область  $D$ . На підставі цих величин можна визначити функцію

$$\bar{p}(x) = k^2[n_0^2(x) - n^2(x)] = \bar{p}_1(x) + i\bar{p}_2(x). \quad (27)$$

Використовуючи співвідношення з [9]

$$\bar{p}(x) = 4\pi h(x)N(x), \quad (28)$$

де  $N(x)$  – довільна функція, легко знайти співвідношення для знаходження функції  $h(x)$ :

$$h(x) = h_1(x) + ih_2(x), \quad (29)$$

або, уточнивши,

$$4\pi[h_1(x) + ih_2(x)]N(x) = \bar{p}_1(x) + i\bar{p}_2(x). \quad (30)$$

Остаточно

$$N(x)h_1(x) = \frac{\bar{p}_1(x)}{4\pi}, \quad N(x)h_2(x) = \frac{\bar{p}_2(x)}{4\pi}. \quad (31)$$

Система рівнянь (31) відносно невідомих функцій  $h_1(x)$ ,  $h_2(x)$ , і  $N(x)$  має нескінченну кількість розв'язків. Якщо, наприклад, прийняти, що  $N(x)$  – довільна додатна константа, тоді  $h_1$  і  $h_2$  однозначно визначаються з (31). Отже, розв'язок системи (31) шукатимемо у вигляді

$$N(x) = N = \text{const}, \quad (32a)$$

$$h_1(x) = \frac{\bar{p}_1(x)}{4\pi N}, \quad h_2(x) = \frac{\bar{p}_2(x)}{4\pi N}. \quad (32b)$$

На наступному кроці ми повинні з'ясувати, як розмістити малі включення в області  $D$ , якою повинна бути їхня кількість, і які електромагнітні властивості вони повинні мати. Розглянемо розбиття області  $D$  на сукупність малих кубічних підобластей  $\Delta_p$ , які не мають спільних внутрішніх точок, з центрами в точках  $y^{(p)}$ , і розмістимо в кожному кубі

$$N(\Delta_p) = \left[ \frac{1}{a^{2-\kappa}} \int_{\Delta_p} N(x) dx \right] \quad (33)$$

малих включень (куль)  $D_m$  радіусом  $a$ , центрами яких є точки  $x_m$ . Тут  $[b]$  означає найближче ціле до  $b > 0$ ,  $\kappa \in (0,1)$ . Розмістимо ці кулі на віддалі  $O(a^{\frac{2-\kappa}{3}})$  і забезпечимо на їх поверхні імпеданс  $\frac{h(x_m)}{a^\kappa}$ . В [9] було доведено, що сформоване у такий спосіб середовище матиме коефіцієнт відбиття  $n^2(x)$  з помилкою, яка прямує до нуля при  $a \rightarrow 0$ .

Отже, для створення середовища із заданим коефіцієнтом відбиття необхідно розв'язати дві інженерні задачі:

- як забезпечити на кулях малого радіуса  $a$  заданий імпеданс;
- як помістити ці малі кулі в задану область  $D$ , заповнену матеріалом з відомими електромагнітними властивостями, так, щоб вони задовольняли умову (33).

Звичайно, ці задачі передбачають суто технологічне рішення, але числові розрахунки, наведені нижче, допоможуть нам вирішити частину інженерних проблем.

Числові розрахунки виконаємо для випадку  $N(x) = \text{const}$  і розглянемо для простоти розбиття області  $D$  на однакові підобласті  $\Delta_p$  ( $D = \bigcup_{p=1}^P \Delta_p$ ). Нехай функції  $n_0^2(x)$  і  $n^2(x)$  – задані, порахуємо  $h_1$  і  $h_2$  в (32б). Отже, ми можемо визначити кількість включень  $N(\Delta_p)$  у  $D$ . Значення поверхневого імпедансу  $\frac{h(x_m)}{a^\kappa}$  легко розрахувати. Формула (33) вказує лише на загальну кількість включень, вона не дає відповіді на питання, як розмістити ці включення в  $D$ , щоб отримати коефіцієнт відбиття, найближчий до заданого. У процесі числових розрахунків розглянемо найпростіший спосіб розміщення включень – рівномірний розподіл по всіх трьох координатних осях. Очевидно, що це і визначатиме різницю між заданим  $n^2(x)$  і створеним  $n_c^2(x)$  коефіцієнтами відбиття.

Числові розрахунки виконаємо для випадку  $D = \bigcup_{p=1}^P \Delta_p$ ,  $P = 8000$ , де  $P$  – загальна кількість підобластей;  $D$  – куб зі стороною  $l_D = 0.5$ , включення розміщені рівномірно у  $D$ . (Для такого  $P$  відносна похибка при визначенні “точного” поля не перевищує 0,01 %). Область  $D$  розміщена у вільному просторі, тобто  $n_0^2(x) = 1$ , нехай заданий коефіцієнт відбиття  $n^2(x) = 2 + 0.01i$ . Якщо задано  $N(x)$ , легко розрахувати  $N(\Delta_p)$  за формулою (33). З іншого боку, можна вибрати таку константу  $m$ , що  $M = m^3$  – найближче до  $N(\Delta_p)$ . Відповідний  $n^2(x)$  для такого  $M$  обчислюється за формулою

$$\tilde{n}_1^2(x) = -\frac{4\pi M h_1}{k^2} + n_0^2, \quad \tilde{n}_2^2(x) = -\frac{4\pi M h_1}{k^2} \quad (34)$$

і відрізняється від заданих  $n_1^2(x)$  та  $n_2^2(x)$ . Для того щоб отримати мінімальну похибку, виберемо два числа  $m_1$  і  $m_2$ , які задовольняють умову  $M_1 < N(\Delta_p) < M_2$ , де  $M_1 = m_1^3$  і  $M_2 = m_2^3$ . Отже,



маючи теоретичну оцінку  $N(\Delta_p)$  для фіксованого  $a$ , ми можемо знайти числа  $M_1$  і  $M_2$  та розрахувати найближчі значення до  $n_1^2(x)$  і  $n_2^2(x)$  за формулою (34).

На рис. 7 наведено відносну похибку обчисленого значення  $\tilde{n}^2(x)$  залежно від радіуса  $a$  включення для  $N = 20$  (а) і  $N = 50$  (б). Наведені результати показують, що похибка істотно залежить від співвідношення величин  $M_1$ ,  $M_2$ , і  $N(\Delta_p)$ . Ця похибка найменша, коли одне із значень  $M_1$  чи  $M_2$  досить близьке до  $N(\Delta_p)$ . Похибка має періодичний характер (це впливає із властивостей функції  $N(\Delta_p)$  та значень  $M_1$  і  $M_2$ ). Середня похибка на періоді зростає зі збільшенням  $a$ .

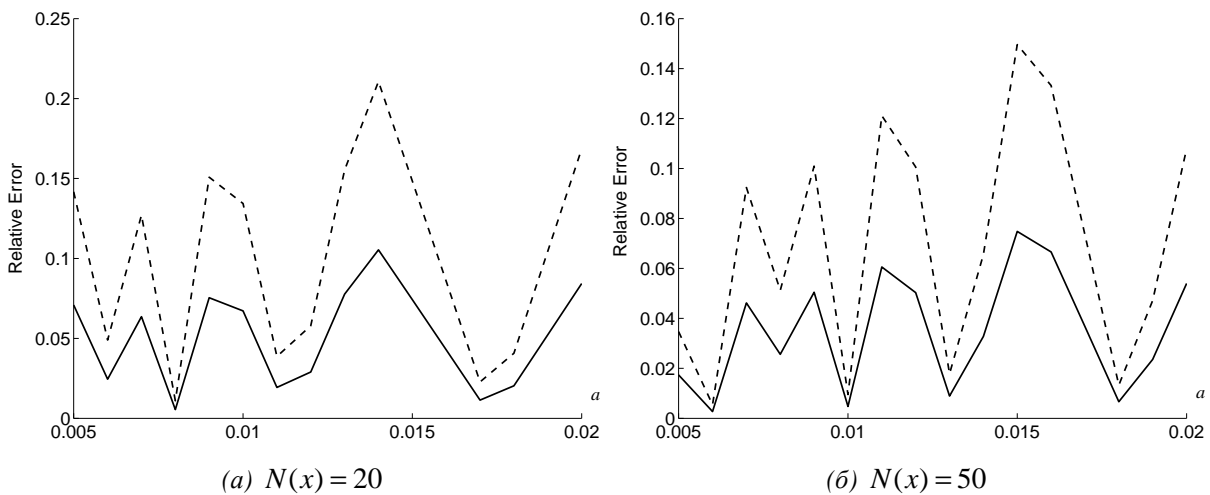


Рис. 7. Мінімальна відносна похибка коефіцієнта відбиття  $\tilde{n}^2(x)$

Мінімальна похибка для  $a = 0.015$  становить 0.49 % , вона дорівнює 0.51 % для  $a = 0.008$ , і 0.26 % для  $a = 0.006$  при  $N(x) = 5, 20, 50$  відповідно.

На підставі попередніх результатів можна оцінити кількість  $M$  включень, необхідних для отримання коефіцієнта відбиття, найближчого до заданого (за заданого діаметра  $l_D$  області  $D$ ). Відповідні результати для випадку  $l_D = 0.5$  наведено на рис. 8. На осі  $y$  відкладено значення  $m = \sqrt[3]{M}$ . Суцільна, штрихова і штрихпунктирна лінії відповідають  $N(x) = 5, 20, 50$ . Знання оптимальної кількості включень в область  $D$  є технологічним кроком до створення заданого коефіцієнта відбиття середовища.

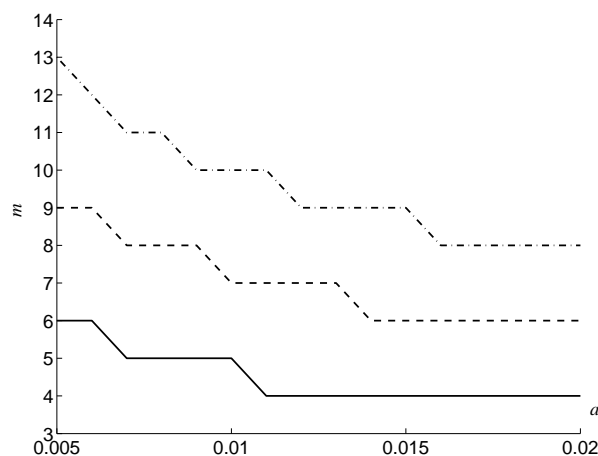


Рис. 8. Залежність оптимальних значень  $m$  від радіуса  $a$  включення за різних  $N(x)$

У таблиці наведено теоретичні значення  $N(\Delta_p)$  й оптимальні  $m$  за різних  $a$  для  $l_D = 0.5$ .

$a$	$N(\Delta_p)$	Оптимальне $m$
0.02	92	$4 \leq m \leq 5$
0.01	198	$5 \leq m \leq 6$
0.008	253	$6 \leq m \leq 7$
0.005	425	$7 \leq m \leq 8$
0.001	2494	$13 \leq m \leq 14$

### Висновки

Числові результати, отримані на основі асимптотичного підходу до розв'язування задачі розсіяння електромагнітного поля сукупністю включень малого радіуса, дали змогу встановити межі застосування такого підходу залежно від геометричних параметрів області включень.

Конструктивна процедура задавання функції  $N(x)$ , обчислення величин  $m$  і визначення радіуса  $a$  включень дає змогу одержати коефіцієнт відбиття середовища, близький до заданого. Технологічні процедури включення тіл малого радіуса у задану область та формування на їхній поверхні заданого імпедансу вимагають окремого інженерного рішення. На основі розробленого програмного забезпечення можна створити прикладний програмний продукт для числового моделювання середовищ із заданими електромагнітними властивостями.

1. Lyshevski S. E. *MEMS and NEMS: Systems, Devices and Structures* CRC Press, Boca Raton, FL, 2002.
2. Rebeiz G. M. *FR MEMS. Theory, Design and Technology*. New York: Wiley, 2003.
3. Ramm A. G. *Wave Scattering by Small Bodies of Arbitrary Shapes*, Singapore, World Sci. Publisher, 2005.
4. Ramm A. G. *Inverse Problems*. Springer, Berlin, 2005.
5. Seo J. T., Yang Q., Creekmore S., Tabibi B., Temple D., Kim S. Y., Yoo K., Mott A., Namkung M., Jung S. S. Large pure refractive nonlinearity of nanostructure silica aerogel // *Applied Physics Letters*. – 2003. Vol. 82, n 6. – P. 4444–4446.
6. Shonbrun E., Tinker M., Park Wounjhang, Jeong-Bong Lee. Negative refraction in a Si-polymer photonic crystal membrane // *IEEE Photonics Technology Letters*. – 2005. – Vol. 17, n 7. – P. 1196–1198.
7. von Rhein A., Pergande D., Greulich-Weber S., Wehrspohn R. B. Experimental verification of apparent negative refraction in low-epsilon material in the microwave regime // *Journal of Applied Physics*. – 2007. – Vol. 101, issue 8, n. 4. – P. 086103–086103-3.
8. Ramm A. G. Many Body Wave Scattering by Small Bodies and Applications // *J. Math. Phys.* – 2007. – Vol. 48, n. 10. – P. 103511.
9. Ramm A. G. Wave Scattering by Many Small Particles Embedded in a Medium // *Physics Letters A*. – 2008. – Vol. 372. – P. 3064–3070.
10. Вайнштейн Л. А. *Электромагнитные волны*. – М.: Радио и связь, 1988. – 440 с.
11. Ramm A. G. A Collocation Method for Solving Integral Equations // *Intern. Journ. of Comput. Sci. and Mathem.* – 2009. – Vol. 3, n. 2. – P. 122–128.
12. Nazarchuk Z. T. *Singular Integral Equations in Diffraction Theory*. – Lviv: PMI, 1994. – 210 p.
13. Andriychuk M. I., Ramm A. G. Numerical Modeling in Wave Scattering Problem for Small Particles // *Proc. of 18<sup>th</sup> International Conference MIKON-2010*. Vilnius, Lithuania: Geozondas, 2010. – Vol. 1. – P. 224–227.
14. Andriychuk M. I. and Ramm A. G. Scattering by many small particles and creating materials with a desired refraction coefficient // *Int. J. Computing Science and Mathematics*. – 2010. – Vol. 3, n. 1/2. – P. 102–121.