

К. Кужидловський<sup>1</sup>, М.М. Лобур<sup>2</sup>, І.В. Фармага<sup>2</sup>, О.М. Матвійків<sup>2</sup><sup>1</sup>Варшавський технологічний університет,  
факультет матеріалознавства;<sup>2</sup>Національний університет “Львівська політехніка”,  
кафедра систем автоматизованого проектування

## ІНФОРМАЦІЙНО-РОЗРАХУНКОВИЙ МЕТОД ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ ТЕПЛОФІЗИЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК КОМПОЗИТНИХ МАТЕРІАЛІВ

© Кужидловський К., Лобур М.М., Фармага І.В., Матвійків О.М., 2010

**Розроблено методику визначення теплофізичних характеристик, зокрема коефіцієнта теплопровідності, питомої теплоємності та густини на основі моделювання розподілу температурного поля в неоднорідних матеріалах.**

**Ключові слова:** термофізичні параметри, композитні матеріали, теплопередача, математична модель.

**The work is devoted to the development of applied methodology for determination of thermophysical parameters of composite materials.**

**Keywords:** thermophysical parameter, composite material, heat transfer, mathematical model.

### Вступ

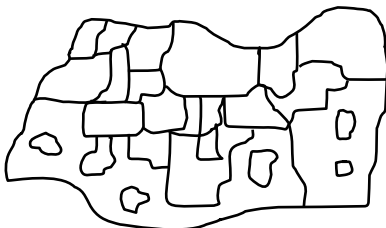
Вимоги до сучасних матеріалів – низька вартість і водночас унікальні фізико-хімічні властивості. Ефективними матеріалами є композити, які дають змогу забезпечити необхідні механічні та теплофізичні властивості. Отримують необхідні характеристики на основі вибору складників-комполітів та певних технологічних процесів виготовлення та формування матеріалів. Значення фізико-хімічних і, зокрема, теплофізичних характеристик забезпечують за допомогою подальшого дослідження отриманих матеріалів, змінюючи концентрації та геометричні розміри їхніх складників. Теплофізичні характеристики композитів отримують експериментально. Однак важливе місце тут займають і модельні експерименти з використанням аналітичних, числових та числово-аналітичних методів. Над цією проблемою здавна працює ціла низка наукових шкіл.

### Теплові моделі

Розглянемо варіанти вибору теплових моделей, які можна використовувати для моделювання температурного поля в неоднорідних матеріалах.

Структурно композитний матеріал можна подати як набір об'ємних фігур різних розмірів, що ідеально або неідеально контактують між собою (рис. 1) і обмежені поверхнями відповідної геометричної форми.

На практиці використовують геометричну інтерпретацію у виді системи тривимірних елементів – прямокутних паралелепіпедів або пірамід (рис. 2). Теплофізичні характеристики елемента – ізопараметричні.



*Рис. 1. Структурна модель композитного матеріалу*



Рис. 2. Теплова модель у вигляді системи прямокутних паралелепіпедів (а) або пірамід (б)

Для побудови математичної моделі приймаємо цілий ряд допущень про закони перенесення тепла в середовищі та умови теплообміну на межі тіла.

Вибір теплової моделі пов'язаний з методом розв'язання задачі теплообміну. Серед них – метод скінченних різниць (МСР), метод скінченних елементів (МСЕ), метод граничних елементів (МГЕ), метод електротеплових аналогій (теплових схем) (МТС), аналітичні розв'язки (метод Фур'є, метод інтегральних перетворень). Аналітичні методи прості в застосуванні для тіл правильної геометричної форми. Найчастіше використовують модель у виді багат шарового прямокутного паралелепіпеда (рис. 3).

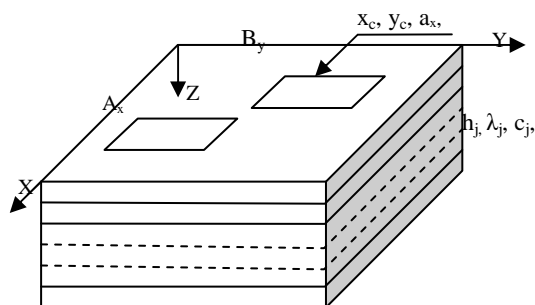


Рис. 3. Базова теплова модель у вигляді багат шарового паралелепіпеда з плоскими джерелами тепла на поверхні

$A_x$  – розмір по осі X;  $B_y$  – розмір по осі Y;  $x_c$  – координата центра елемента тепловиділення по осі X;  $y_c$  – координата центра елемента тепловиділення по осі Y;  $a_x$  – розмір елемента тепловиділення по осі X;  $b_y$  – розмір елемента тепловиділення по осі Y;  $h_j$  – товщина j-го шару;  $\lambda_j$  – коефіцієнт теплопровідності j-го шару;  $c_j$  – питома теплоємність j-го шару;  $\rho_j$  – питома густина j-го шару.

Для опису повної структури матеріалу можна застосувати комбінацію таких моделей і об'єднати їх відповідним наближеним методом, наприклад, поетапного моделювання чи методом теплових схем.

### Математичні моделі та методи

Побудова математичної моделі здійснюється за допомогою формального опису процесів перенесення тепла. Приймаємо допущення про перенесення тепла в твердому тілі *кондукцією* із заданням теплових потоків та температур на межі тіла. У такому разі процес перенесення тепла описують рівнянням теплопровідності

$$c\rho \frac{\partial T_i}{\partial t} = \text{div}(\lambda(T_i) \text{grad}T_i) + Q, \quad i=1, \dots, I \quad (1)$$

та рівнянь енергії для теплообмінних потоків

$$c_j\rho_j \left( \frac{\partial U_j}{\partial t} + \bar{v} \nabla U_j \right) = \nabla(\lambda_j \nabla U_j), \quad j=1, \dots, J \quad (2)$$

з граничними умовами 1,2, 3-го родів або умовами спряження на межі розділу елементів.

Для отримання рішення (1), (2) прив'язуємо формальний опис до вибраної геометричної інтерпретації, задаємо умови однозначності по координатах на межі моделі, умови спряження на межі розділу елементів, початкову умову за часом, вибираємо метод отримання числових значень температурного поля. Серед методів найпоширеніші МСЕ та аналітичні. На їх основі розроблено велику кількість програмного забезпечення. Співавтором розроблено числово-аналітичний метод моделювання нестационарних теплових режимів мікроелектронних пристроїв [4], в основі якого лежить теплова модель (рис. 3).

Викладемо короту характеристику методів розв'язання задачі нестационарної теплопровідності для тривимірних тіл.

Найпоширенішим та універсальним є МСЕ. Перевага – можливість розроблення універсального програмного забезпечення, яке дає змогу розв'язувати комплекс механічних, дифузійних та інших задач [2]. Недолік – складність підготування вхідних даних. Використовуючи ж комерційні програми типу ANSYS, потрібно уважно аналізувати економічну доцільність.

**МСП** найефективніший у двовимірних задачах. Одночасно є обмеження для застосування нерівномірних сіток.

**МГЕ** дає змогу зменшити розмірність систем рівнянь, однак результуюча матриця не є рядковою чи розрідженою, а повністю заповненою. Одночасно в результаті розв'язування задач цим методом ми отримуємо значення функції на поверхні тіла (моделі). Одержання їх всередині тіла приводить до збільшення кількості обчислювальних операцій. Метод вимагає пошуку фундаментального розв'язку вихідного рівняння.

**МТС** дає змогу використовувати універсальні моделі та програмне забезпечення аналізу електричних схем, однак часто виникають проблеми з пошуком вектора нев'язки електричних і теплових параметрів. Програмне забезпечення для аналізу електричних схем має істотне обмеження за кількістю вузлів порівняно з **МСЕ**.

**Аналітичні** методи дають змогу уникнути надлишкової кількості обчислювальних операцій порівняно з **МСЕ** чи **МСП**. Вони дають змогу знаходити значення температурного поля у вказаних точках за координатами і часом без виконання надлишкових обчислень. Результуючі формули дають змогу здійснювати над ними подальші математичні перетворення. Отримані розв'язки не вимагають складних зусиль у програмній реалізації. Часто застосовуються для розв'язування обернених задач (ідентифікація, параметрична оптимізація). Недоліком цих методів є обмеження в знаходженні розв'язків у структурах складної геометричної форми, нерівномірності, анізотропності та нелінійності теплофізичних характеристик елементів (модель рис. 2).

На основі вищенаведеного можна стверджувати, що визначальним у виборі математичного методу є вид розв'язуваної задачі і цілі, які досягаються в результаті її розв'язання. Наші цілі – це:

- 1) отримати розподіл температурного поля в заданих точках для подальшого аналізу;
- 2) побудувати методику визначення теплофізичних характеристик неоднорідних матеріалів.

#### **Розподіл температурного поля отримуємо за такою процедурою (ПРОЦ\_1):**

Операція 1. Розробляємо *інформаційну модель* температурного поля та теплофізичних характеристик у вигляді *структури даних*, яка містить: назву; геометричні розміри; вектори теплофізичних характеристик; значення координат, часу і відповідні масиви значень температур, отриманих різними методами; вектори похибок теплофізичних характеристик та значень температури; вектори апріорних оцінок точності; вектор коефіцієнтів впливу.

Операція 2. Одержуємо результати *вимірювання* розподілу температурного поля в *тестовій структурі* відповідного матеріалу. Заносимо дані вимірювань в інформаційну модель.

Операція 3. Виконуємо розрахунок температурного поля за допомогою складного числового методу (*МСЕ*), наприклад, із застосуванням ANSYS. Заносимо результати в інформаційну модель.

Операція 4. Здійснюємо розрахунок температурного поля за допомогою *числово-аналітичного методу* [1]. Заносимо результати в інформаційну модель.

Операція 5. Здійснюємо *порівняльний аналіз* отриманих результатів розрахунків та вимірювань з використанням апріорних оцінок точності, заповнюємо вектори похибок значень температур для кожного з методів. У разі можливої недостовірності вхідних даних моделювання (теплофізичні та геометричні параметри) підбираємо їх так, щоби результати вимірювання, розрахунку “Операція 3”, розрахунку “Операція 4” максимально збігались для визначеної *тестової структури* (налаштування моделей).

Операція 6. Виконуємо розрахунки температурного поля “Операція 3” реальних об'єктів дослідження з урахуванням корегувань “Операція 5”.

Подібний підхід використовувався для моделювання теплових режимів складних конструкцій мікроелектронних пристроїв. Однак не застосовувалась інформаційно модель “Операція 1” і комп'ютерні методи її супроводження.

Для досягнення наступної цілі попередньо розробляємо **процедуру усереднення теплофізичних характеристик**.

#### **Процедура усереднення теплофізичних характеристик**

Згідно з [3] усереднені теплофізичні характеристики назвемо – *ефективні*  $\lambda_e$ ,  $c_e$ ,  $\rho_e$ . У цій праці наведено спосіб знаходження ефективних теплофізичних характеристик твердих тіл в аналітичному виді. Недоліком такого підходу є обмеженість класу геометричних моделей та діапазону розмірів компонентів композитних матеріалів.

### **Пропонуємо процедуру знаходження ефективних теплофізичних характеристик (ПРОЦ\_2).**

Операція 1. Використовуючи числово-аналітичний метод (у цьому випадку можна використати одновимірну математичну модель у багатошаровій структурі), знаходимо коефіцієнти впливу теплофізичних характеристик та розмірів компонентів на розподіл температурного поля. Заносимо вектор коефіцієнтів впливу до інформаційної моделі.

Операція 2. Використовуючи коефіцієнти впливу, спрощуємо кількість елементів геометричної моделі. Узагальнену інформаційну модель перезаписуємо в спрощеному варіанті (ефективні параметри, наближення 1) зі збереженням її індексів.

Операція 3. Приводимо математичну модель, що враховує нерівномірність теплофізичних характеристик, до однокомпонентної моделі з ефективними теплофізичними характеристиками. Визначаємо ефективні теплофізичні характеристики, використовуючи алгоритми методу Монте-Карло (класичні підходи наведено в [4]). Цей підхід дає змогу врахувати імовірнісний характер теплофізичних характеристик.

Операція 4. Перевіряємо діапазон адекватності ефективних параметрів, використовуючи результати ПРОЦ\_1. Операції 2,3.

Отримавши ефективні теплофізичні характеристики та повну й ефективну інформаційні моделі, можемо переходити до визначення теплофізичних характеристик.

### **Визначення теплофізичних характеристик**

Розв'язуємо обернену задачу теплопровідності. Маючи задані значення температури за координатами і зміну в часі, визначаємо теплофізичні характеристики матеріалу. Відомо, що такі задачі належать до класу некоректних задач математичної фізики і часто не мають однозначного розв'язку. Тому знову використовуємо поопераційний підхід, тільки в зворотній послідовності. Спочатку застосовуємо модель з ефективними характеристиками. Далі поступово наближаємось до узагальненої моделі.

Пошук теплофізичних характеристик за заданим розподілом температурного поля здійснюємо з використанням алгоритмів числової оптимізації [5].

### **Висновки**

На основі аналізу особливостей структури композитних матеріалів розроблено геометричну інтерпретацію, що дає можливість вибрати теплову модель відповідної складності.

На основі багаторічного практичного досвіду авторів охарактеризовано методи знаходження температурних полів у твердих тілах неоднорідної структури. Вибір необхідного методу здійснюється для досягнення таких цілей:

- 1) отримати розподіл температурного поля в заданих точках для подальшого аналізу;
- 2) побудувати методика визначення теплофізичних характеристик неоднорідних матеріалів.

Поєднання вимірювань з числовими та аналітичними методами моделювання можливе на основі застосування інформаційно-обчислювальної моделі температурного поля та теплофізичних характеристик.

Розроблені процедури “Розподіл температурного поля (ПРОЦ\_1)”, Знаходження ефективних теплофізичних характеристик (ПРОЦ\_2) та методика визначення теплофізичних характеристик в сукупності і є інформаційно-розрахунковим методом для визначення теплофізичних характеристик композитних матеріалів.

1. Koval V.A., Farmaga I.W., Strojwas A.J., Director S.W. “MONSTR”: A complete thermal simulation of electronics systems // *Proceedings of the 31<sup>st</sup> Design Automation Conference, San Diego, CA, June 6-10, 1994*, pp. 570–575. 2. Макар В.М., Матвійків О.М. Н-адаптивне моделювання на основі методу скінчених елементів. Частина 2. // *Вісник Нац. ун-ту “Львівська політехніка”*: “Комп'ютерні системи проектування. Теорія і практика”, № 471, 2004. – С. 102–109. 3. Дульнев Г.Н., Парфенов В.Г., Сигалов А.В. *Методы расчета теплового режима приборов*. – М.: Радио и связь, 1990. 4. Соболев И.М. *Метод Монте-Карло*. – М.: Наука, 1968. – 64 с. 5. Лобур М.В. Теслюк В.М., Керницький А.Б. *Математические модели оптимизации ТП производства ИС и микровстроенных систем* // *Сб. науч. тр. V МНПК “Вузовская наука, промышленность, международное сотрудничество” (13 – 15 окт. 2004 г.)*, Минск, Белорусь. – С. 314–317.