УДК 004.421.2:517.443

І.О. Процько
Національний університет “Львівська політехніка”,
кафедра систем автоматизованого проектування

ВЗАЄМОЗВ’ЯЗОК ЕФЕКТИВНИХ ДИСКРЕТНИХ ГАРМОНІЧНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ НА ОСНОВІ ЦИКЛІЧНИХ ЗГОРТОК ДЛЯ ОБСЯГІВ 2^n

Розглянуто узагальнений підхід ефективного обчислення дискретних гармонічних перетворень для обсягів цілого степеня два на основі циклічних згорток. Проаналізовано твірний масив дискретної базисної матриці для гармонічних перетворень. Визначено взаємозв’язок твірних масивів та структур базисних матриць між дискретними гармонічними перетвореннями.

Ключові слова – дискретні гармонічні перетворення, твірний масив, циклічна згортка.

The general method of efficient computation discrete harmonic transforms for size the integer power of two on base of circular convolutions is considered. Hash array discrete basis matrixes of harmonic transforms are analysed. Interconnection hash arrays and structures of basis matrix between harmonic transforms are determined.

Keywords – discrete harmonic transform, hash array, cyclic convolution.

Вступ

Спеціалізовані засоби для обчислення дискретних гармонічних перетворень класу Фур’є інтенсивно узагальнюються та досліджуються з подальшим імплементуванням у програмні та апаратні продукти, що використовуються в кодуванні інформації, розпізнаванні образів, стискуванні даних та інших різноманітних інформаційних технологіях.

Дискретні гармонічні перетворення в матричній формі задаються у вигляді

$$X = W^* x , \qquad (1)$$

де W(kxn) – базисна квадратна матриця: (n,k=0,(1),...,N-1); x(N) та X(N) – матриці-стовпці вхідних та вихідних даних.

Базисна квадратна матриця дискретного гармонічного перетворення може набувати вигляду:

дискретного перетворення Фур’є (ДПФ) $W(k,n)=\exp(-j2\pi kn/NT)$,

дискретного косинусного перетворення (ДКП) $W(k,n)=c(n)x(n)\cos[\pi(2k+1)n/2NT]$,

$$c(n) = \begin{cases} 2^{-1/2}, & \text{якщо } n=0 ; \\ 1, & \text{в інших випадках;} \end{cases}$$

дискретне перетворення Хартлі (ДПХ)

$$W(k,n)=cas(2\pi kr/NT)=(\cos(2\pi kn/NT)+\sin(2\pi kn/NT)),$$

де T – інтервал дискретизації; N – обсяг перетворення.

Існують різні підходи до синтезу ефективних алгоритмів дискретних гармонічних перетворень, пов’язаних з обсягом перетворень. Найбільше застосування знайшли засоби перетворення класу Фур’є для обсягів, що дорівнюють цілому степеню два. В основу цих алгоритмів покладені базові операції з основою два (метелика), розщепленої змішаної основи тощо [1, 6].

Сучасними обчислювальними засобами актуальне виконання мікрооперацій великозернистого паралелізму, що застосовується в ефективних алгоритмах обчислення дискретних гармонічних перетворень класу Фур’є на основі циклічних згорток.

Постановка проблеми

Для подання даних в їх спектральний гармонічний образ застосовуються перетворення класу Фур’є з використанням ефективних гнучких алгоритмічних підходів. Найбільшого поширення здобули швидкі алгоритми гармонічних перетворень для значення обсягу сигналів, що дорівнюють $N=2^n$ (n=2,3,…,k).

Запропоновано узагальнені схеми ефективного обчислення дискретних гармонічних перетворень на основі циклічних згорток для довільного обсягу [2, 3]. Особливо ефективний в обчислювальному аспекті цей підхід для обсягів, що дорівнють цілому степеню два.

Тому актуальним є аналіз визначення основних особливостей та взаємозв’язку між структурами базисних матриць, твірних масивів, за якими вони формуються, для косинусної, синусної частин ДПФ і дискретного косинусного перетворення обсягу, що дорівнює цілому степеню два.

Твірний масив базисної матриці перетворення

Підхід ефективного обчислення дискретних гармонічних перетворень на основі циклічних згорток запропоновано у [4, 5]. В основу обчислення покладено опис W дискретної базисної матриці перетворення через значення індексів у вигляді твірного масиву:

$$P(n)=P(n_1)\,P(n_2)\,\dots\,P(n_k) \tag{2}$$

або

$$P(n)=(n_{11},n_{12,\dots,}n_{1L1})(n_{21},n_{22,\dots,}n_{2L2})\,\dots,\,(n_{kL1,}\,n_{kL2,}\,\dots,\,n_{kLk}), \tag{3}$$

де n – обсяг твірного масиву; k – кількість твірних підмасивів; n_{ij} – елемент підмасиву; Li – кількість елементів в підмасиві $P(n_i)$.

Обсяг твірного масиву може дорівнювати:

n={N/2}-1 для косинусної частини ДПФ; n=N-1 для синусної частини ДПФ; n=2N-1 для ДКП.

Кількість твірних підмасивів k у твірному масиві P(n) визначається конкретним значенням обсягу перетворення у разі $N=2^n$, k=n-1.

На основі властивості симетрії базису гармонічних перетворень твірний масив P(n) можна ефективно подати масивом P’(n) з меншими значеннями елементів n_{ij}, доповнюючи відповідним масивом знаків Z(n). Масив знаків Z(n) містить елементи із значеннями +1,-1,0.

Приклади твірного масиву P(n) та масиву P’(n) з відповідним масивом знаків Z(n) (замість +1,-1 подаються позначення +,-) для обсягів перетворення $N=2^n$.

Для косинусної частини ДПФ при N=32, 64 твірні масиви:

P(15)=(1,3,9,5,15,13,7,11)(2,6,14,10)(4,12)(8);
P’(15)=(1,3,7,5, 1,3,7, 5) (2, 6, 2, 6) (4, 4) (8),
Zc(15)= (+ + – + – - + -) (+ + – -)(+ –) (0) при N=32, k=4,
P(31)=(1,3,9,27,17,13,25,11,31,29,23,5,15,19,7,21)(2,6,18,10,30,26,14,22)(4,12,28,20)(8,24)(16);
P’(31)=(1,3,9,5,15,13, 7,11,1,3,9,5,15,13,7,11)(2,6,14,10,2,6,14,10)(4,12,4,12)(8,8)(0),
Zc(31)=(+ + + – – + – + – – – + + – + –) (+ + – + – – + -) (+ + – -)(+ -) (0)
при N=64, k=5.

Для синусної частини ДПФ при N=32, 64 твірні масиви:

P(31)= (1,3,9,27,17,19,25,11)¦(15,13,7,21,31,29,23,5)(2,6,18,22)¦(30,26,14,10)(4,12)¦(20,28)(8,24)(16).

Внаслідок асиметрії синуса твірний масив можна спростити, враховуючи знаки:

P(31)= (1,3,9,5,15,13,7,11) (15,13,7,11,1,3,9,5) (2,6,14,10)(2,6,14,10) (4,12) (12,4) (8,8) (0);
P’(15)= (1,3,9,5,15, 13,7,11) (2,6,14,10) (4,12) (8) ,
Zs(15)= (+ + + – – – – +) (+ + – –) (+ +) (+) при N=32, k=4;
P(63)=(1,3,9,27,17,51,25,11,33,35,41,59,49,19,57,43)¦(31,29,23,5,15,45,7,21,63,61,55,37,47,13,39,53)(2,6, 18,54,34,38,50,22)¦(30,26,14,42,62,58,46,10)(4,12,36,44)¦(60,52,28,20)(8,24)¦(40,56)(16,48)(32);
P’(31)= (1,3,9,27,17,13,25,11,31,29,23,5,15,19,7,21)(2,6,18,10,30,26,14,22)(4,12,28,20)(8,24)(16);
Zs(31)= (+ + + + + – + + – – – – – – + – -)(+ + + – – – – +)(+ + – -) (+ +)(+)
при N=64, k=5.

Твірні масиви ДКП при N=8, 16

P(15)=(1,3,9,5,15,13,7,11)(2,6,14,10)(4,12)(0) ;
P’(15)=(1,3,7,5, 1, 3, 7, 5) (2, 6, 2, 6)(4, 4)(0),
Z(15)= (+ + – + – – + -)(+ + – -)(+ -)(0) при N=8, k=4;
P(31)= (1,3,9,27,17,13,25,11,31,29,23,5,15,19,7,21) (2,6,18,10,30,26,14,22)(4,12,28,20)(8,24)(0).

P’(31)= (1,3,9,5,15,13,7,11,1,3,9,5,15,13,7,11) (2,6,14,10,2,6,14,10)(4,12,4,12)(8,8)(0),
Z(31)= (+ + + – – + – + – – – + + – + –) (+ + – + – – + –) (+ + – -) (+ –) (0)
при N=16 k=5.

Обчислюючи дискретні гармонічні перетворення, твірний масив P(n) визначає порядок групування вхідних даних x(i). Для прикладу, в алгоритмі обчислення ДКП [ ] при N=8 за P(15)=(1,3,9,5,15,13,7,11)(2,6,14,10)(4,12)(0) відповідно до елементів твірного масиву вхідні дані перегрупуються у послідовність:

x(1), x(3), -x(7), x(5), -x(1), -x(3), x(7), -x(5), x(2), x(6), -x(2), -x(6), x(4), -x(4), x(0).

Спрощений твірний масив P’(n) визначає особливість структури базисної квадратної матриці W((N-1)x(N-1)) у кожному конкретному випадку перетворення обсягу N. Підмасиви, сформовані за допомогою твірного масиву P’(n), є ганкелевими циклічними підматрицями в структурі базисної квадратної матриці W(kxn). Це визначає ефективність алгоритму обчислення дискретних гармонічних перетворень класу Фур’є на основі циклічних згорток між [Z(i)P’(i)] та згрупованими вхідними даними x(i).

Аналіз структур базисних матриць

Запропонований підхід обчислення дискретних гармонічних перетворень на основі циклічних згорток для обсягів перетворення, що дорівнюють цілому степеню два $N=2^n$ (n=2,3,…), має загальні особливості структур базисної квадратної матриці W(kxn), сформованої на основі твірного масиву. Тому характерною ознакою таких алгоритмів є визначення загального структурного розміщення підматриць базисної матриці перетворення.

Приклад базисної матричної структури (рис. 1) Vp (n/2 x n/4) ДКП, що містить циклічні підматриці A,B,c,d для обсягу N=8 (n=2N), сформованої відповідними твірними підмасивами:

$$P(n) = P(n_1)\,P(n_2)\,P(n_3)\,P(n_4) = (1,3,9,5,15,13,7,11)\ (2,6,14,10)\ (4,12)(0)\,;$$

P’(15) = (1,3,7,5, 1, 3, 7, 5) (2, 6, 2, 6) (4, 4) (0).

$$Vp' = \left(\begin{array}{cccc} & & & d \\ & & c & d \\ & B & & d \\ A & & c & d \\ & & & d \\ & B & c & d \\ & & & d \\ & & c & d \end{array}\right)$$

Рис. 1. Матрична структура ДКП для обсягу ***N=8***

Приклад базисної матричної структури індексів Vp(N/2xN/2) (рис. 2) косинусної частини ДПФ для обсягу N=32 сформованої відповідними твірними підмасивами:
P(15)=(A, B, c, d) = (1,3,9,5,15,13,7,11)(2,6,14,10)(4,12)(8); P’(15)=(1,3,7,5, 1,3,7, 5)(2, 6, 2, 6) (4, 4) (8).

$$Vp' = \left(\begin{array}{cccccccc} & & & & & & c & 0 \\ & & & & b & -b & c & 0 \\ a & -a & & & -b & b & c & 0 \\ & & & & & & c & 0 \\ & & & & & & c & 0 \\ -a & a & & & b & -b & c & 0 \\ & & & & -b & b & c & 0 \\ & & & & & & c & 0 \\ b & -b & b & -b & c & c & 0 & -1 \\ -b & b & -b & b & c & c & 0 & -1 \\ c & c & c & c & c & c & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Рис. 2. Матрична структура косинусної частини ДПФ для обсягу ***N=32***

Відповідно, використовуючи менші значення елементів n_{ij} з твірного масиву P’(15)= (a,a)(b,b)(c)(d) = (1,3,7,5, 1,3,7,5)(2,6,2,6)(4,4)(8), формується структура матриці індексів Vp’(N/2xN/2), показана на рис. 3, з врахуванням доповнення відповідної матриці Zc(n) знаків:

$$
Vp' = \left(\begin{array}{ccccccccccccccc}
1 & 3 & 7 & 5 & 1 & 3 & 7 & 5 & 2 & 6 & 2 & 6 & 4 & 4 & 8 \\
3 & 7 & 5 & 1 & 3 & 7 & 6 & 1 & 6 & 2 & 6 & 2 & 4 & 4 & 8 \\
7 & 5 & 1 & 3 & 7 & 5 & 1 & 3 & 2 & 6 & 2 & 6 & 4 & 4 & 8 \\
5 & 1 & 3 & 7 & 5 & 1 & 3 & 7 & 6 & 2 & 6 & 2 & 4 & 4 & 8 \\
1 & 3 & 7 & 5 & 1 & 3 & 7 & 5 & 2 & 6 & 2 & 6 & 4 & 4 & 8 \\
3 & 7 & 5 & 1 & 3 & 7 & 5 & 1 & 6 & 2 & 6 & 2 & 4 & 4 & 8 \\
7 & 5 & 1 & 3 & 7 & 5 & 1 & 3 & 2 & 6 & 2 & 6 & 4 & 4 & 8 \\
5 & 1 & 3 & 7 & 5 & 1 & 3 & 7 & 6 & 2 & 6 & 2 & 4 & 4 & 8 \\
\hdashline
2 & 6 & 2 & 6 & 2 & 6 & 2 & 6 & 4 & 4 & 4 & 4 & 8 & 8 & 16 \\
6 & 2 & 6 & 2 & 6 & 2 & 6 & 2 & 4 & 4 & 4 & 4 & 8 & 8 & 16 \\
2 & 6 & 2 & 6 & 2 & 6 & 2 & 6 & 4 & 4 & 4 & 4 & 8 & 8 & 16 \\
6 & 2 & 6 & 2 & 6 & 2 & 6 & 2 & 4 & 4 & 4 & 4 & 8 & 8 & 16 \\
4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 8 & 8 & 8 & 8 & 16 & 16 & 0 \\
4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 8 & 8 & 8 & 8 & 16 & 16 & 0 \\
8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 16 & 16 & 0 & 0 & 16 & 16 & 0
\end{array}\right)
$$

Рис. 3. Матрична структура індексів косинусної частини ДПФ для обсягу N=32

У результаті декомпозиції та аналізу структури базисної матриці косинусної частини ДПФ отримали узагальнену таблицю кількості необхідних циклічних згорток в обчислювальному алгоритмі, де $N=2^n$ – обсяг перетворення, k – кількість видів циклічних згорток, t – розмірності циклічних згорток (табл. 1).

Таблиця 1

Кількість циклічних згорток в обчислювальному алгоритмі

N	8	16	32	64	128	...	2^n
S	1	2	3	4	5	...	n-2
t	1	4,1 1	8,4,1 4,1 1	16,8,4,1 8,4,1 4,1 1	32,16,8,4,1 16,8,4,1 8,4,1 4,1 1	...	$2^{n-2},2^{n-3},\ldots, 2^0$ $2^{n-3},\ldots 2^2,2^0$ $2^{n-4},\ldots,2^2,2^0$ … 2^2 , 2^0 2^0

Аналогічну для обсягів $N=2^{n-2}$ кількість необхідних циклічних згорток в обчислювальному алгоритмі ДКП подано у табл. 2

Таблиця 2

Кількість циклічних згорток в обчислювальному алгоритмі ДКП

N	1	4	8	16	32	…	2^n
k	1	2	3	4	5	…	n-2
t	1	4,1	8,4,1	16,8,4,1	32,16,6,4,1	…	$2^{n-2},2^{n-3},\ldots,1$

Аналізуючи матричні структури на рис. 1, 2, 3 у щоразу детальнішому представленні, доходимо висновку, що для обсягів $N=2^n$ структура матриці індексів Vp(N/2xN/4) косинусної частини ДПФ Vp(N/2xN/4) аналогічна для обсягів $N=2^{n-2}$ у частині структури матриці індексів Vp (n/2 x n/4) ДКП. Це саме стосується відповідних твірних матриць індексів P’(n)) та знаків Z(n). Тобто аналіз структури базисної квадратної матриці W((N-1)x(N-1)) дискретних гармонічних перетворень еквівалентний до аналізу структури матриці індексів k,n з W(kxn), сформованої за твірним масивом P'(n) (n,k=0,(1),...,N-1). Значення параметрів твірного масиву характеризує структуру базисної матриці W і відповідно обчислювальний алгоритм.

Аналізуючи твірні масиви P'(n) синусної частини та P(n) косинусної частини ДПФ для обсягів $N=2^n$, доходимо висновку, що матриці індексів ідентичні, за винятком матриць знаків Z(n).

Наприклад, для обсягу N=32 матимуть вигляд:

P(31) = (1,3,9,27,17,19,25,11)(15,13,7,21,31,29,23,5) (2,6,18,22)(30,26,14,10) (4,12)(20,28) (8,24) (16);
P'(15) = (1,3,9,5,15,13,7,11)(2,6,14,10)(4,12)(8), Zs(15)=(+++- – – – +)(+ + – -)(++)(+)
P'(15) = (1,3,7,5,1,3,7,5) (2,6,2,6) (4,4) (8), Zs(15)=(+++- – – – +)(+ + – -)(++)(+) –
синусна частина;

P(15) = (1,3,9,5,15,13,7,11)(2,6,14,10)(4,12)(8), Zc(15)=(++ – + – - + -)(++ – -)(+ -)(0)
P'(15) = (1,3,7,5, 1,3,7,5) (2,6, 2,6) (4, 4) (8) Zc(15)=(++ – + – - + -)(++ – -)(+ -)(0) –
косинусна частина.

Отже, щоб отримати циклічні підмасиви у базисній матриці, твірні масиви для синусної частини починають формуватись з обсягу (N-1), потім об'єднуються та спрощуються до обсягу (N/2-1), а твірні масиви косинусної частини починають формуватись і спрощуватись з обсягу (N/2-1).

```
 Vp'                                 Zs
                                     1 3  9 27 17 19 25 11   2 6 18 22   4 12  8
 1 3 7 5 1 3 7 5  2 6 2 6 4 4 8      + + + – - – - +         + + – -     + +   +
 3 7 5 1 3 7 5 1  6 2 6 2 4 4 8      + + – - – - + +         + – - +     + +   –
 7 5 1 3 7 5 1 3  2 6 2 6 4 4 8      + – - – - + + +         – - + +     + +   +
 5 1 3 7 5 1 3 7  6 2 6 2 4 4 8      – - – - + + + +         – + + –     + +   –
 1 3 7 5 1 3 7 5  2 6 2 6 4 4 8      – - – + + + + –         + + – -     + +   +
 3 7 5 1 3 7 5 1  6 2 6 2 4 4 8      – - + + + + – -         + – - +     + +   –
 7 5 1 3 7 5 1 3  2 6 2 6 4 4 8      – + + + + – - –         – - + +     + +   +
 5 1 3 7 5 1 3 7  6 2 6 2 4 4 8      + + + + – - – -         – + + –     + +   –
```

Рис. 4. Фрагмент матриць індексів та знаків синусної частини ДПФ для обсягу N=32

```
Zc                                              Vp'
   1 3 9 515 13711  2 61410  4 12 8
1  + + – + – - + –  + + – -  + –  0    1 3 7 5 1 3 7 5  2 6 2 6  4 4  8
3  + – + – - + – +  + – - +  – +  0    3 7 5 1 3 7 6 1  6 2 6 2  4 4  8
9  – + – - + – + +  – - + +  + –  0    7 5 1 3 7 5 1 3  2 6 2 6  4 4  8
5  + – - + – + + –  – + + –  – +  0    5 1 3 7 5 1 3 7  6 2 6 2  4 4  8
15 – - + – + + – +  + + – -  + –  0    1 3 7 5 1 3 7 5  2 6 2 6  4 4  8
13 – + – + + – + –  + – - +  – +  0    3 7 5 1 3 7 5 1  6 2 6 2  4 4  8
7  + – + + – + – -  – - + +  + –  0    7 5 1 3 7 5 1 3  2 6 2 6  4 4  8
11 – + + – + – - +  – + + –  – +  0    5 1 3 7 5 1 3 7  6 2 6 2  4 4  8
```

Рис. 5. Фрагмент матриць індексів та знаків косинусної частини ДПФ для обсягу N=32

Отже, структури W базисної квадратної матриці для обсягів $N=2^n$ та обсягів кратних 4 є ідентичними для косинусної частини ДПФ та відповідної синусної частини ДПФ і потребують однакової кількості циклічних згорток з відповідними розмірами. Тому для синусної частини ДПФ узагальнена кількість необхідних циклічних згорток в обчислювальному алгоритмі відповідатиме табл. 1.

Тобто спрощений твірний масив P'(n) з косинусної частини еквівалентний до твірного масиву P'(n) синусної частини і відповідно структури матриці індексів Vp'. Але в доповнення до сформованого твірного масиву P(n), P'(n) використовуємо твірний масив знаків Zs(N) синусної частини ДПФ.

Аналіз циклічних підматриць в структурі базисних матриць

В основу алгоритмів обчислення дискретних гармонічних перетворень покладено використання твірного масиву P(n), що описує структуру W дискретної базисної матриці перетворення. Аналіз елементів n_{ij} (3) у спрощенних твірних масивах P'(n) показує, що підмасиви мають індексні елементи, що повторюються (4):

$$P'(n_k) = (n_{kL1}, n_{kL2}, \ldots, n_{kLj}, n_{kL1}, n_{kL2}, \ldots, n_{kLj}), \quad (4)$$

де $n_{kL1} = n_{kL1}$, $n_{kL2} = n_{kL2}, \ldots, n_{kLj} = n_{kLj}$.

Для косинусної частини ДПФ для ДКП характерна наявність циклічних підматриць, що описуються за формулою (4) та відповідним доповненням під матриць знаків $Z(n_k)$. Наприклад, для обсягу N=32 косинусна частина ДПФ має твірні підмасиви з елементами, шо поторюються:

P'(8) = (1,3,7,5, 1,3,7, 5), Z(8) = (+ + – + – - + -); P'(4) = (2, 6, 2, 6), Z(4)= (+ + – -);

Аналогічно за алгоритмом ДКП описується твірними підмасивами з елементами, шо поторюються, наприклад, для N=16 матимемо:

P'(16) = (1,3,9,5,15,13,7,11,1,3,9,5,15,13,7,11), Z(16)= (+ + + – – + – + – – – + + – + –);

P'(8) = (2,6,14,10,2,6,14,10), Z(8)= (+ + – + – – + –);

P'(4) = (4,12,4,12), Z(4)= (+ + – -).

Для синусної частини ДПФ характерна наявність циклічних підматриць, що описуються за формулою (5) та відповідним доповненням підматриць знаків $Zs(n_k)$. Наприклад, для обсягу N=32 синусна частина ДПФ має твірні підмасиви з елементами без повторення:

P'(8) = (1,3,9,5,15,13,7,11) = (1,3,7,5,1,3,7,5), Z(8)= (+ + + – – – – +) ;

P'(4) = (2,6,14.10) = (2, 6, 2, 6), Z(4)= (+ + – –) .

Для синусної частини ДПФ також існують твірні масиви P(n), що містять підматриці з елементами, шо поторюються. Наприклад, для обсягу N=32:

P'(16) = (1,3,9,5,15,13,7,11) =(1,3,7,5, 1,3,7,5), Z(16) = (+ + + – – – – +);

P'(8) = (2,6,14,10) = (2, 6, 2, 6), Z(8) = (+ + – –).

Для цього випадку, порівнюючи індексні твірні підмасиви синусної частини ДПФ обсягу $N=2^n$ та ДКП обсягу $N=2^{n-1}$, маємо ідентичність $P'(n_k)$.

За сформованим твірним масивом P'(n), доповненим відповідним масивом знаків Z(n), визначаються особливості структури базисної матриці. Повторюваність ідентичних підматриць задає особливості та порядок об'єднання для обчислення циклічних згорток, що визначає складність та ефективність обчислення дискретних гармонічних перетворень. На основі твірних підмасивів P(n) задаються підматриці, які є ганкелеві циклічні та мають структуру (5). Тому обчислення дискретних гармонічних перетворень зводиться до обчислення циклічних згорток, що ґрунтується на ефективних алгоритмах Винограда, Агарвала-Кулі, гніздових тощо [6; 7].

$$\begin{pmatrix} A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -a \\ -a & a \end{pmatrix} \quad .(5)$$

Особливість, наведена у формулі (4), приводить до зменшення кількості арифметичних операцій, необхідних для обчислення вихідних значень циклічної згортки. Наприклад, при 8 точкового ДКП на основі запропонованого підходу для виконання 8-точкової згортки необхідно 8 добутків та 22 суми, що менше (14 добутків та 46 сум) стосовно алгоритму згортки з мінімальним числом добутків, наведеним в [4]. Це підвищує обчислювальну ефективність дискретних гармонічних перетворень.

Висновки

В основу ефективного обчислення дискретних гармонічних перетворень покладено опис дискретної базисної матриці перетворення через використання твірного масиву. Аналіз твірних масивів для обсягів цілого степеня два показав, що існує ідентичний взаємоєв'язок між ними для певних обсягів дискретних гармонічних перетворень. Так, спрощений твірний масив $P'(2^{n-1}-1)$, покладений в основу синтезу алгоритмів, ідентичний для косинусної та синусної частин ДПФ обсягів $N=2^n$ та спрощеного твірного масиву P'(2N-1) дискретного косинусного перетворення обсягів $N=2^{n-2}$. Особливість підмасивів твірного масиву визначає структуру базисної квадратної матриці, яка визначає алгоритм обчислення дискретних гармонічних перетворень класу Фур'є на основі циклічних згорток. Циклічні підматриці можуть містити повторення елементів, що приводить до зменшення кількості арифметичних операцій, необхідних для обчислення вихідних значень циклічної згортки.

Іншими перевагами цього обчислення є можливість розпаралелювання та гнучкість в послідовності виконання циклічних згорток. Запропонований підхід актуальний в своєму подальшому розвитку для розподілених паралельних систем з виконанням мікрооперацій великозернистого паралелізму.

1. Оппенгейм Э. Применение цифровой обработки сигналов. – М.: Мир, 1980. 2. Процько І.О. Підхід ефективного обчислення дискретних гармонічних перетворень через циклічні згортки // Вісник НУ "ЛП" "Комп'ютерні системи проектування. Теорія і практика". – 2008. – №626. 3. Prots'ko I., The generalized technique of computation the discrete harmonic transforms // Proceeding of the IVth International Conference of Young Scientists MEMSTECH 2008, Poljana, may, 2008. 4. Процько І.О. Ефективне обчислення дискретних косинусних перетворень / Вісник НУ "ЛП" "Комп'ютерні системи проектування. Теорія і практика". – 2007. – №591. 5. Процько І.О. Підхід ефективного обчислення дискретного перетворення Хартлі / Вісник НУ "ЛП" "Комп'ютерні системи проектування. Теорія і практика". – 2005. – №502. 6. Нуссбаумер Г. Быстрое преобразование Фурье и алгоритмы вычисления сверток. – М.: Радио и связь, 1985. 7. Макклеллан Дж.Х., Рейдер Ч.М. Применение теории чисел в цифровой обработке сигналов: пер. с англ. – М.: Радио и связь, 1983.

УДК 681.322

Ю.В. Стех, Файсал М.Е. Сардіх, А.Б. Керницький, М.С. Домброва
Національний університет "Львівська політехніка",
кафедра систем автоматизованого проектування

АЛГОРИТМІЧНА ОЦІНКА ОПТИМАЛЬНОСТІ РЕЗУЛЬТАТІВ КЛАСТЕРИЗАЦІЇ ЗА КРИТЕРІЄМ ВІДСТАНІ

Заропононовано алгоритмічний підхід до оцінки оптимальності результатів кластеризації за критерієм відстані. Підхід ґрунтується на розв'язанні двокритеріальної оптимізації за допомогою побудови та оцінювання критеріїв оптимальності у вигляді індексних функцій.

Ключові слова – кластер, образ, індексна функція.

The algorithmic approach to the evaluation optimality of clustering results by distance criterion is proposed. The approach is based on solving two-criterion optimization by building and evaluating the optimality criteria in the form of index functions.

Keywords – cluster, pattern, index function.

Вступ

Кластеризація – об'єднання в групи подібних об'єктів – є однією із фундаментальних задач в області аналізу даних, Data Mining, Web Mining, Text Mining, машинного навчання. Кластеризація часто виступає першим кроком під час аналізу даних. Після виділення кластерів застосовуються інші методи, для кожного кластера будується окрема модель [1; 2; 4].

Задача кластеризації полягає у розбитті загальної множини образів на кластери-класи так, щоб кожен кластер складався з подібних об'єктів, а об'єкти різних кластерів істотно відрізнялися. Сьогодні існує кілька десятків алгоритмів кластеризації і ще більше їх модифікацій.

Результат роботи кожного із алгоритмів кластеризації залежить від багатьох початкових параметрів. Тому знаходження оптимального розбиття множини образів на кластери вимагає побудови і дослідження критеріальних функцій, які дають змогу оцінити результати процесу кластеризації.