паперова і деревообробна промисловість. – Львів, 2003. – № 28. – С. 89–94. 6. Боженко М.В., Сліпчук А.М. Вплив поздовжнього руху на нелінійні поперечні коливання пружних одновимірних систем // Вісн. Нац. ун-ту “Львівська політехніка”. – 2005. – № 509: Динаміка, міцність та проектування машин та приладів. – С. 25–30.

УДК 534.1+ 62-5

М.Б. Сокіл, О.І. Хитряк, В.Г. Топільницький*
Національний університет “Львівська політехніка”,
кафедра опору матеріалів,
*кафедра електронного машинобудування

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ВИЗНАЧЕННЯ ОПТИМАЛЬНИХ СИЛОВИХ ЧИННИКІВ, ЩО ЗУМОВЛЮЮТЬ НЕЛІНІЙНІ КОЛИВАННЯ ОДНОВИМІРНИХ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ З ПОЗДОВЖНЬОЮ ШВИДКІСТЮ РУХУ

Викладено методику розв’язування обернених задач нелінійних коливань одновимірних тіл, які характеризуються сталою швидкістю поздовжнього руху. В її основу покладено: основні ідеї методів Бубнова–Гальоркіна та асимптотичного методу нелінійної механіки; принцип одночастотності коливань у нелінійних системах; ідею представлення заданого дискретного закону зміни амплітуди та частоти коливань динамічного процесу систем за допомогою звичайних диференціальних рівнянь.

It is described one approach to solving inverse problems of dynamics for nonlinear vibration of one-dimensional solids, which have the permanent rate of longitudinal movement. It is based on the basic idea of the Bubnov-Galerkin and the asymptotic method of nonlinear mechanics; on the principle of a single frequency of oscillations in nonlinear systems, on the idea of representation a given discrete law of changes the amplitude and frequency of oscillations in the dynamic process using ordinary differential equations.

Актуальність та огляд основних результатів досліджень. У різних галузях промисловості широкого застосування набули коливальні одновимірні нелінійно-пружні механічні системи з розподіленими масами та зосередженими параметрами, рух яких відбувається вздовж деякої недеформівної осі, наприклад, найрізноманітніші підйомно-транспортні механізми, конвеєри тощо. Для створення оптимальних конструкцій та розрахунку даних механічних систем, зокрема засобами автоматизованих систем функціонального, конструкторського та технологічного проектування, актуальною задачею є їх адекватне математичне представлення та моделювання. Дослідження динамічних процесів для випадку нелінійних моделей механічних систем, які характеризуються поздовжнім рухом [1–5], пов’язане із значними труднощами [6], оскільки для їх побудови не вдається застосувати класичні методи інтегрування рівнянь з частинними похідними. В аналітичному описі цього коливного процесу фігурує мішана похідна за координатною та часовою змінними. Не менш важливими, проте набагато складнішими є обернені задачі, тобто визначення відповідно до заданого закону руху об’єкта силових чинників, які виникають в системі або діють на неї ззовні та спричиняють відповідний закон її руху. Відсутність загальних підходів до розв’язання таких задач викликана труднощами побудови і дослідження їх розв’язків [7] для диференціальних рівнянь з частинними похідними, які є математичними моделями опису динамічних процесів в одновимірних нелінійно-пружних механічних системах з розподіленими масами та зосередженими параметрами. Також складність цих обернених задач полягає в тому, що вони не завжди мають єдиний розв'язок. Такі задачі динаміки не набули широкого розвитку і розглядались в основному для найпростіших моделей (коливань систем з одним ступенем вільності [8–10]).

Предметом розгляду цієї статті є результати досліджень з побудови оптимальної апроксимації нелінійних силових чинників розглянутих вище механічних систем за допомогою аналітичних співвідношень так, щоб їх рух відбувався відповідно до заданих (програмних) законів зміни основних параметрів коливань. Дослідження проведено на основі:

а) розвитку методу Бубнова–Гальоркіна на один клас крайових задач для рівняння гіперболічного типу [2, 11], яке містить мішану похідну лінійної і часової змінних;

б) узагальнення асимптотичного методу Крилова–Боголюбова–Митропольського (КБМ) на цей клас нелінійних рівнянь [12, 13];

в) використання принципу одночастотності коливань у нелінійних системах з багатьма ступенями вільності і розподіленими параметрами.

Постановка задачі. Відомо [3, 14–16], що поздовжні коливання одновимірних нелінійно пружних механічних систем, що характеризуються поздовжньою швидкістю руху, описуються диференціальним рівнянням

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+2V\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}-\left(\alpha^2-V^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\varepsilon f(u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial t})\,. \tag{1}$$

Для (1) розглядаємо найпростіші крайові умови

$$u(x,t)\big|_{x=0}=u(x,t)\big|_{x=l}=0 \tag{2}$$

Математичною моделлю поперечних коливань пружних тіл, які рухаються із сталою швидкістю, є диференціальне рівняння:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+2V\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}-\left(\alpha^2-V^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\beta^2\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}=\varepsilon F\left(u,\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right), \tag{3}$$

До рівняння (3) долучаємо крайові умови:

$$\begin{aligned} u(x,t)\big|_{x=0}&=\left.\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right|_{x=0}=0;\\ u(x,t)\big|_{x=l}&=\left.\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right|_{x=l}=0 \end{aligned}\quad , \tag{4}$$

що відповідають випадку шарнірно опертих кінців гнучкого елемента.

У (1), (3) $u(x,t)$ – переміщення перерізу рухомої частини нелінійної механічної системи з координатою x у довільний момент часу t; V – швидкість поперечного руху (вважаємо, що вона постійна); α, β – сталі, яка визначаються через фізико-механічні характеристики досліджуваної системи; $f(u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial t})$ та $F\left(u,\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)$ – характеризують відхилення пружних властивостей матеріалу рухомої частини системи від лінійного закону, сили опору, дисипативні сили в системі, а малий параметр $\varepsilon>0$ вказує на незначну величину максимального значення цих сил порівняно із відновлювальною силою. Задача полягає у визначенні вказаних зовнішніх та внутрішніх силових чинників тіла за законом коливань. Останній вважається заданим множиною послідовних значень амплітуди і періоду коливань, тобто $a_1, a_2,\ldots a_N$ та $T_1, T_2,\ldots T_N$.

Методика розв'язування. Застосувати безпосередньо для побудови розв'язку вказаних крайових задач основну ідею методів збурень [12, 17] чи їх модифікації [7, 8] не вдається, адже при розв'язуванні незбурених лінійних крайових задачі (ε=0) виникають значні труднощі: неможливо застосувати відомі методи інтегрування рівнянь з частинними похідними. Пропонуємо спосіб знаходження невідомих правих частин (1),(2) та (3),(4), що ґрунтується на побудові асимптотичного розв'язку з використанням методу Бубнова–Гальоркіна [11, 18]. Функцію *u(x,t)* шукатимемо у вигляді:

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{s} X_k(x)T_k(t)\,, \tag{5}$$

де $X_k(x)$ – функції, що для відповідних крайових задач справджують крайові умови, які випливають із (2): $X_k(0)=X_k(l)$ та (3): $X_k(0)=X''_k(0)=X_k(l)=X''_k(l)$. Такими функціями буде повна ортонормована система: $\{X_k(x)\}=\left\{\sin(\frac{k\pi}{l}x)\right\}$.

Отже, для наближеного визначення одночастотного розв'язку поставлених задач зробимо формальну підстановку

$$u(x,t)=T(t)\sin(\frac{k\pi}{l}x),\quad k=1,2... \tag{6}$$

у рівняння (1) та (3).

Враховуючи повноту і ортонормованість системи функцій $\{X_k\ (x)\}$, із (1) та (3) після нескладних перетворень для знаходження невідомих функцій *T(t)* отримуємо звичайне нелінійне диференціальне рівняння

$$\ddot{T}+\omega^2 T=\varepsilon\bar{f}\left(T,\dot{T}\right), \tag{7}$$

де для крайової задачі (1),(2):

$$\omega^2=\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2\left[\alpha^2-V^2\right],\ \bar{f}\left(T,\dot{T}\right)=\frac{2}{l}\int_0^l f\left(u,\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial u}{\partial x}\right)\sin\frac{k\pi}{l}xdx; \tag{7.а}$$

для задачі (3),(4):

$$\omega^2=\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2\left[\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2\beta^2+\left(\alpha^2-V^2\right)\right],.\ \bar{f}\left(T,\dot{T}\right)=\frac{2}{l}\int_0^l F\left(u,\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)\sin\frac{k\pi}{l}xdx \tag{7.б}$$

Використовуючи загальну ідею методу КБМ [12,13], у першому наближенні одночастотний розв'язок рівняння (7) запишемо у вигляді:

$$T(t)=a\cos(\psi)+\varepsilon T_1(a,\psi)\,, \tag{8}$$

де параметри a та $\psi=\omega t+\varphi$ є функції часу, а закони їх зміни задаються програмним рухом, ω – власна частота незбурених ($\varepsilon=0$) коливань системи, φ – початкова фаза; a – амплітудний параметр динамічного процесу; $T_1(a,\psi)$ – 2π- періодична за ψ функція, що не містять першої гармоніки ψ.

Перейдемо до знаходження правої частини рівнянь (1), (3). У [9, 10] показано, що програма руху системи (множина значень $\{a_i\}$ і $\{T_i\}$) визначає закони зміни в часі параметрів a і T у вигляді диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned}\frac{da}{dt}&=\varepsilon A(a);\\ \frac{d\psi}{dt}&=\omega+\varepsilon B(a),\end{aligned} \tag{9}$$

в яких $A(a), B(a)$ – відомі функції (вважатимемо їх поліномами).

Отже, необхідно визначити таку функцію $f(u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial t})$ для диференціального рівняння (1) та $F(u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\frac{\partial^3 u}{\partial x^3})$ для (3), за якої коливний процес досліджуваної механічної системи

узгоджується з (9). Із умов, накладених на праві частини вказаних вище залежностей, випливає, що невідомі функції можна шукати у вигляді аналітичної апроксимації [19]
для рівнянь (1):

$$f(u,\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial u}{\partial x})=\sum_{k=1}^{N}c_k f_k(u,\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial u}{\partial x})\,; \qquad (10а)$$

для рівняння (3):

$$F(u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\frac{\partial^3 u}{\partial x^3})=\sum_{k=1}^{N}c_k F_k(u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\frac{\partial^3 u}{\partial x^3})\,, \qquad (10б)$$

де $f_k(u,\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial u}{\partial x})$ та $F_k(u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\frac{\partial^3 u}{\partial x^3})$ – лінійно незалежні многочлени; c_k – невідомі коефіцієнти, котрі знаходяться так, щоб коливний процес системи проходив відповідно до законів зміни амплітуди і частоти, які визначені співвідношеннями (9).

Для невідомої правої частини рівняння (7), за (7.а) та (7.б), маємо таку апроксимацію

$$\bar{f}\left(T,\dot{T}\right)=\frac{2}{l}\sum_{k=1}^{N}c_k\bar{f}_k(T,\dot{T})\,, \qquad (11)$$

де для задачі про поздовжні коливання:

$$\bar{f}_k\left(T,\dot{T}\right)=\int_0^l f_k\left(u,u_t,u_x\right)\sin\frac{k\pi}{l}xdx \qquad (11.а)$$

та для задачі про поперечні коливання:

$$\bar{f}_k\left(T,\dot{T}\right)=\int_0^l F_k\left(u,u_t,u_x,u_{xx},u_{xxx},u_{xxxx}\right)\sin\frac{k\pi}{l}xdx \qquad (11.б)$$

Після підстановки (8) у (7), із врахуванням (9) маємо диференціальне рівняння, яке зв’язує невідомі функції

$$\omega^2\frac{\partial^2 T_1}{\partial^2\psi}+\omega^2 T_1=\bar{f}(a\cos\psi,-a\omega\sin\psi)+2\omega A(a)\sin(\psi)+2\omega aB(a)\cos(\psi)\,. \qquad (12)$$

Беручи до уваги умови, накладені на невідому функцію $T_1(a,\psi)$, із (12) знаходимо співвідношення, яке зв’язує невідому функцію $\bar{f}(a,\psi)$ та відомі поліноми $A(a)$, $B(a)$

$$A(a)=\frac{-1}{2\pi\omega}\int_0^{2\pi}\bar{f}(a\cos\psi,-a\omega\sin\psi)\sin\psi d\psi\,,$$

$$B(a)=\frac{-1}{2\pi\omega a}\int_0^{2\pi}\bar{f}(a\cos\psi,-a\omega\sin\psi)\cos\psi d\psi\,. \qquad (13)$$

Вищенаведене, а також залежність (11) дають змогу отримати співвідношення, які є основою для визначення невідомих параметрів $c_1,\dots c_N$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N}c_k P_k(a)&=A(a),\\ \sum_{k=1}^{N}c_k R_k(a)&=B(a)\end{aligned}\,, \qquad (14)$$

де $P_k(a)=\frac{-1}{\pi l\omega}\int_0^{2\pi}\bar{f}_k(T,\dot{T})\Big|_{\substack{T=\ a\cos\psi;\\ \dot{T}=-a\omega\sin\psi.}}\cos\psi d\psi$; $R_k(a)=\frac{-1}{\pi l\omega a}\int_0^{2\pi}\bar{f}_k(T,\dot{T})\Big|_{\substack{T=\ a\cos\psi;\\ \dot{T}=-a\omega\sin\psi.}}\sin\psi d\psi$.

Алгебраїчні залежності (14) є основою для визначення невідомих коефіцієнтів c_k. Для (14) можливі три випадки.

Випадок 1. Вказані співвідношення (14) виконуються однозначно для довільних значень параметра а, тобто система алгебраїчних рівнянь (14) має єдиний розв'язок. У вказаному випадку функції f_k підібрано вдало, і аналітична апроксимація невідомих силових характеристик визначається залежностями (10а, 10б) при отриманих розв'язках $c_1, \dots c_N$ системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Випадок 2. Алгебраїчні співвідношення (14) не виконуються при всіх значеннях параметра *а*. У цьому випадку система функцій f_k підібрана невдало, і треба замінити її іншою.

Випадок 3. Залежності (14) виконуються тільки для окремих значень параметра *а*, тобто шляхом прирівнювання коефіцієнтів при однакових степенях *а* правої і лівої частин співвідношень (14), отримаємо недовизначену система лінійних алгебраїчних рівнянь.

У цьому випадку додаткові умови для знаходження невідомих параметрів можна отримати, наприклад, з умови [19, 20]:

$$J = \int_0^{2\pi} \left[\sum_{k=1}^{N} c_k \bar{f}_k(a,\psi) \right]^2 d\psi \to \min . \qquad (15)$$

Нехай із (14) можна визначити зв'язок між першими s невідомими коефіцієнтами та всіма іншими у вигляді

$$c_i = \eta_i(c_{s+1}, \dots, c_N), \quad i = 1, 2, \dots s., \text{ де } \eta_i \text{ – відомі функції.}$$

З врахуванням вищенаведеного, (10) набуває вигляду

$$J = \int_0^{2\pi} \left[\sum_{i=1}^{s} \eta_i(c_{s+1}, \dots, c_N) \bar{f}_i(a,\psi) + \sum_{r=s+1}^{N} c_r \bar{f}_r(a,\psi) \right]^2 d\psi. \qquad (16)$$

Функціонал (16) набуватиме мінімального значення, якщо виконуються умови

$$\frac{\partial J}{\partial c_{s+i}} = \varphi_i(c_{s+1}, c_{s+2}, \dots, c_N, a) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N - s. \qquad (17)$$

Розв'язуючи сумісну систему лінійних алгебраїчних рівнянь, яка випливає із (14) та (17) відносно c_k, знаходимо всі невідомі коефіцієнти.

Приклад

Наведемо приклад визначення аналітичного виразу силових факторів, що діють на рухому нелінійно-пружню механічну систему на основі відомої амплітудно-частотної характеристики її руху.

Нехай автономний коливний процес нелінійної механічної системи (наприклад, рухомої стрічки транспортера з розміщеними на ній вантажами) описується диференціальним рівнянням:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2V \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} - \left(\alpha^2 - V^2\right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta^2 \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} = \varepsilon \left(c_1 \frac{\partial u}{\partial t} + c_2 \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^3 + c_3 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^3 + c_4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)^2 \right), \qquad (18)$$

де *c1*, *c2*, *c3*, *c4* – невідомі параметри, котрі необхідно визначити на основі амплітудно-частотної характеристики, що приведена до вигляду:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon\left(\lambda_1 a + \lambda_2 a^3\right), \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega + \varepsilon\left(\lambda_3 a^3\right). \end{aligned} \qquad (19)$$

У (19) $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – задані.

Вираз у правій частині диференціального співвідношення (18) є апроксимацією невідомих силових чинників. Із співвідношень (14), прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях параметра a, отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно шуканих коефіцієнтів:

$$\begin{cases} \lambda_1 = c_1 \dfrac{\omega}{2\kappa}; \\ \lambda_2 = c_2 \dfrac{9\omega^3}{32\kappa}; \\ \lambda_3 = c_3 \dfrac{9\kappa^5}{32} + c_4 \dfrac{3\kappa^7}{32}. \end{cases} \tag{20}$$

де $\kappa = \dfrac{k\pi}{l}$. За цією системою визначаємо коефіцієнти c_1 та c_2: $c_1 = \lambda_1 \dfrac{2\kappa}{\omega}$, $c_2 = \lambda_2 \dfrac{32\kappa}{9\omega^3}$.

Як додаткову умову для однозначного визначення всіх параметрів використовуємо (16) і, як наслідок, доповнюємо (20) співвідношенням

$$c3 + \kappa^2 C_4 = 0. \tag{21}$$

Розв'язавши сумісну систему лінійних алгебраїчних рівнянь (20),(21) отримуємо значення всіх шуканих коефіцієнтів: $c_3 = \lambda_3 \dfrac{16}{3\kappa^5}$, $c_4 = -\lambda_3 \dfrac{16}{3\kappa^7}$.

Висновки. Результати досліджень уможливлюють визначення відповідно до заданого закону руху досліджуваної механічної системи силових чинників, які виникають у ній або діють на неї ззовні, та спричиняють відповідний закон її руху. Тобто маючи певний необхідний оптимальний експлуатаційний режим руху системи, наприклад, підйомно-транспортного механізму, конвеєра чи їншої механічної системи, можна підібрати такі параметри сил системи, зокрема приводу, які б давали змогу реалізувати цей режим.

На основі викладеної методики можна визначити нелінійні характеристики доволі широкого класу рухомих одновимірних нелінійних механічних систем, за законом зміни основних параметрів, які описують коливний процес. Отримані результати дають змогу побудувати оптимальну аналітичну апроксимацію нелінійних силових чинників, що діють на нелінійну механічну систему. Розроблену методику можна узагальнити також на складніші крайові умови автономного типу, а також і на деякі складніші механічні системи, зокрема на механічні системи, які характеризуються наявністю вимушених коливань середовищ, для яких небажаними є резонансні явища.

1. Боженко М.В., Сліпчук А.М. Вплив повздовжнього руху на нелінійні поперечні коливання пружних одновимірних систем // Вісн. Нац. ун-ту "Львівська політехніка". – 2004. – № 509. – С. 25–30. 2. Назар І.І., Сокіл Б.І. Метод Ван-дер-Поля у дослідженні періодичних збурень рухомих одновимірних систем // Вісн. Нац. ун-ту "Львівська політехніка". – 2006. – № 560. – С. 71–75. 3. Вікович І.А., Висоцька Х.А. Повздовжні коливання рухомої стрічки з урахуванням розсіяння енергії в матеріалі // Вібрації в техніці та технологіях: Всеукр. наук.-техн. журн. – Полтава, 2005. – С. 13–17. 4. Гладьо Ю.Б., Гевко Р.Б.Розрахунок конструктивно-кінематичних параметрів стрічкового транспортера–очисника //Сільськогосподарські машини: Зб. наук. статей. – Луцьк: ЛДТУ, 1999. – Вип. 5. – С. 46–53. 5. Недосекова Т.С. и др. Расчет надежности механизмов транспортирования ленты кассетных видеомагнитофонов // Техника кино и телевидение. – 1996. – № 5. – 32 с. 6. Кошляков Н.С. Глинер Э.Б. , Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики / Н.С. Кошляков,– М.: Высш. шк., 1970. – 712 с. 9. Тихонов А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Наука, 1972. – 736 с. 7. Галиуллин А.С. Обратные задачи динамики. – М.: Наука, 1981.– 145 с. 8. Плахтієнко Н.П. Про визначення нелінійної характеристики коливної системи з аналізу фазової траєкторії // Доп. АН УРСР, сер. А. – 1976. – Вип. 4. – С. 336–338. 9. Сеник П. М. Одно обобщение обратной задачи асимптотического метода Н.Н. Боголюбова // Изв. вузов. – 1960. – №. 6. – С. 226–232. 10. Сеник П. М. Визначення функції, яка *характеризує розсіювання енергії коливної системи // Прикл. мех. – 1960. – IV, вип. 1. – С. 40–45. 11. Гащук П.М., Назар І.І. Нелінійні коливання гнучкого робочого елемента приводу під дією імпульсних сил // Вісн. Нац.ун-ту "Львівська політехніка". – 2007. – № 588: Динаміка, міцність та проектування машин і приладів. – С. 20–24. 12. Митропольский Ю.А., Мосеенков Б.И. Асимптотические решения уравнений в частных производных. – К.: Вища шк., 1976. – 592 с. 13. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М., 1974. – 408 с. 14. Мартинців М.П., Сокіл М.Б. Одне узагальнення методу Д'Аламбера для систем, які характеризуються поздовжнім рухом // Збірник науково-технічних праць УДЛТУ. – Львів. – 2003. – Вип. 13.4. – С. 64–67. 15. Сокіл Б.І., Кузьо І.В., Боженко М.В., Сокіл М.Б. Динамічні процеси в рухомих нелінійно пружних системах і методи їх дослідження // Вібрації в техніці і технологіях. – 2004. – № 3 (35). – С. 118–125. 16. Сліпчук А.М. Нелінійні поперечні коливання пружного рухомого канату і методи їх дослідження // Лісове господарство, лісова, паперова і деревообробна промисловість. – Львів: УДЛТУ, 2003. – Вип. 28. – С. 89–94. 17. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике. – М.: Мир, 1972. – 276 с. 18. Галеркин Б.Г. Стержни и пластинки // Вестник инженеров-техников. – 1915. – № 19. – С. 23–32. 19. Сокіл Б.І., Сокіл М.Б., Хитряк О.І. Один підхід до розв'язання оберненої задачі про нелінійні згинні коливання середовищ // Науковий вісник УкрДЛТУ: зб. наук.-техн. праць – Львів:УкрДЛТУ. – 2010. – № 20.1. – С. 264–268. 20. Сокіл Б.І., Хитряк О.І. Обернені задачі динаміки нелінійних систем із розподіленими параметрами та один підхід до їх розв'язання // Науковий вісник УкрДЛТУ: Зб. наук.-техн. праць. – Львів:УкрДЛТУ. – 2009. – № 19.10. – С. 64–67.*