УДК 681.5.015

В.І. Мороз
Національний університет “Львівська політехніка”,
кафедра ЕАП

ВИБІР КРОКУ ДИСКРЕТИЗАЦІЇ В ЦИФРОВИХ МОДЕЛЯХ ЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ

Запропоновано шлях підвищення швидкодії комп'ютерних моделей електромеханічних систем через обмеження мінімального кроку розв'язування на основі оцінки максимально можливої похибки від часової дискретизації.

Approach to speedup computer simulation of the electromechanical systems using time step limiting based on the estimate maximum possible time quantization errors using convolution integral was described in this paper.

Постановка проблеми

Питання ефективності комп'ютерного моделювання електромеханічних систем значною мірою визначається раціональним вибором кроку розв'язування. Висока швидкодія сучасних комп'ютерних систем, здавалось би, зменшує вагу цього питання, проте залишається актуальною у разі реалізації систем реального часу (наприклад, комп'ютерних тренажерів), де використані моделі можуть бути доволі складними, а обчислювальна потужність апаратної бази – недостатньою. У такому разі проблема вибору компромісного кроку дискретизації з погляду швидкодії та точності є актуальною.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Вибір кроку дискретизації в цифрових моделях електромеханічних систем, як правило, здійснюється або шляхом використання алгоритмів автоматичного вибору кроку з умов локальної похибки [1, 2], або використанням відомих емпіричних методів, зокрема, рекомендацій [3, 4] стосовно співвідношення кроку дискретизації та найменшої сталої часу моделі електромеханічної системи. У першому випадку спосіб можна використати лише для обмеженого класу числових методів, які мають формули для оцінки локальних похибок (наприклад, методи Адамса чи Фельберга). У другому випадку використовується завищена оцінка похибки ("перестрахування"), що призводить до занижених значень кроків і, як наслідок, до зниження швидкості процесу комп'ютерного моделювання.

Задачею досліджень

Задачею досліджень є знаходження для заданого рівня похибок відтворення координат досліджуваної системи такого мінімального кроку дискретизації комп'ютерної моделі, нижче від якого зменшувати крок недоцільно.

Об’єктом досліджень

Об’єктом досліджень є комп’ютерні моделі електромеханічних систем.

Виклад основного матеріалу

Величина кроку дискретизації згідно з теоремою відліків Котельникова-Шеннона безпосередньо пов'язана зі спектром сигналу, що передається. Відповідно, нема потреби зменшувати крок для передавання ширшого спектра вихідного сигналу, якщо він обмежується частотною характеристикою електромеханічної системи, яка, як правило, є низькочастотним фільтром. Таке пояснення має й інший фізичний зміст – мінімально допустимий крок моделювання h_{min} повинен бути таким, щоб у разі найбільшої похибки у вхідному сигналі (наприклад, неправильно знайдений момент комутації широтно-імпульсного модулятора чи перемикання гістерезисного регулятора струму – випадок 100 %-ї похибки) відносна зміна вихідного сигналу $y(t)$ динамічної ланки не перевищувала величини допустимої відносної похибки ε.

Для оцінки похибок може бути застосований спосіб, що базується на інтегралі згортки [5] і полягає в такому. Реакція електромеханічної системи $y(t)$ на поточний неперервний сигнал $x(t)$ протягом деякого часу h з урахуванням реакції на попередні збурення (ненульовий попередній стан) описуватиметься інтегралом згортки для проміжку часу $t_i \le t < t_i + h$:

$$y(t) = y_0(t) + \int_{t_i}^{t_i+h} x(\tau) \cdot w(t_i + h - \tau)\, d\tau ,$$

де $w(t)$ – імпульсна перехідна функція системи.

Реакція цифрової моделі електромеханічної системи $y^*(t)$ на сигнал $x^*(t)$, який дискретизований з періодом h за допомогою поліноміальної апроксимації заданого порядку, описуватиметься впродовж періоду дискретизації з урахуванням реакції на попередні збурення також інтегралом згортки:

$$y^*(t) = y_0(t) + \int_{t_i}^{t_i+h} x^*(\tau) \cdot w(t_i + h - \tau)\, d\tau .$$

У результаті похибка від дискретизації сигналу на проміжку часу $t_i \le t < t_i + h$ за допомогою апроксимації заданого порядку визначатиметься за виразом

$$\varepsilon_i = y(t) - y^*(t) = \left(y_0(t) + \int_{t_i}^{t_i+h} x(\tau) \cdot w(t_i + h - \tau)\, d\tau \right) - \left(y_0(t) + \int_{t_i}^{t_i+h} x^*(\tau) \cdot w(t_i + h - \tau)\, d\tau \right) =$$

$$= \int_{t_i}^{t_i+h} w(t_i + h - \tau) \cdot \left(x(\tau) - x^*(\tau) \right) d\tau .$$

Як видно з отриманого виразу, похибка дискретизації ε_i залежить не лише від виду вхідного сигналу $x(t)$ та його апроксимації $x^*(t)$, але й від виду імпульсної перехідної характеристики системи $w(t)$. З врахуванням доцільності паралельної декомпозиції системи (розкладу на суму елементарних динамічних ланок: інтегральних і аперіодичних, і можливості опису ланки, що описує пару комплексно-спряжених полюсів, двома простішими ланками [6]), потрібно розглянути два випадки:

- інтегральна ланка (нульовий полюс);
- аперіодична ланка (дійсний полюс).

Вхідний сигнал $x(t)$ у загальному випадку є довільним, тобто, не допускає аналітичного опису, що робить пряме визначення похибок від часової дискретизації неможливим. Виходом з цього положення є застосування апроксимацій сигналу $x^*(t)$ поліномами вищих порядків (для оцінки похибки достатньо лише на порядок вищої порівняно з порядком використаної в цифровій моделі). Ілюстрація процесу оцінки похибок показана нижче на прикладі апроксимації нульового порядку (відповідає перетворенню сигналу прямокутниками або фіксатора нульового порядку [3]), для оцінки похибки якого достатньо використовувати уточнення за допомогою полінома першого порядку. Для апроксимаційних поліномів нульового (*позначено нижнім індексом* $_{(0)}$) та першого порядків (*відповідно, позначено нижнім індексом* $_{(1)}$), побудованих за відліками $x(t_i)$ та $x(t_{i+1})$ на проміжку часу $t_i \le t < t_{i+1}$, матимемо

$$x^*_{(0)}(t) = x(t_i); \qquad x^*_{(1)}(t) = \frac{x(t_{i+1}) - x(t_i)}{h} \cdot t + x(t_i) .$$

Підставляючи отримані вирази апроксимацій $x^*(t)$ у формулу для знаходження похибки, одержимо вираз для визначення похибки вихідного сигналу системи з фіксатором нульового порядку на вході

$$\varepsilon_i = \int\limits_{t_i}^{t_i+h} w(t_i + h - \tau) \cdot \left(\frac{x(t_{i+1}) - x(t_i)}{h} \cdot \tau \right) d\tau .$$

Маючи загальну формулу для розрахунку похибок вихідного сигналу, можна виконати відповідний аналіз для кожної елементарної динамічної ланки – інтегральної та аперіодичної першого порядку. Для цих двох випадків нижче показано шлях отримання оцінки похибок для найпростішого типу поліноміальної апроксимації – прямокутниками.

Імпульсна перехідна характеристика **інтегратора** є простою: $w^{(I)}(t) = \dfrac{1}{T}$, тому для нього нескладно знайти аналітичний вираз за формулою для оцінки, похибки його вихідного сигналу за умови наявності фіксатора нульового порядку на його вході:

$$\varepsilon_i^{(I)} = \frac{h \cdot (x(t_{i+1}) - x(t_i))}{2T} .$$

Імпульсна перехідна характеристика **аперіодичної ланки** є складнішою – $w^{(A)}(t) = \dfrac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}}$, проте також дає змогу знайти аналітичний вираз для оцінки внесеної у вихідну координату похибки внаслідок процесів часової дискретизації:

$$\varepsilon_i^{(A)} = \left(x(t_{i+1}) - x(t_i) \right) \cdot \left(1 - \frac{T}{h} \left(1 - e^{-\frac{h}{T}} \right) \right).$$

Для цієї ланки внесена на попередньому кроці похибка виступає як додаткові початкові умови для наступного кроку. Таке явище "загасання" похибок з попередніх кроків належно повинно бути враховано:

$$\varepsilon_i^{(A)} = \varepsilon_{i-1}^{(A)} \cdot e^{-\frac{h}{T}} + \int\limits_{t_i}^{t_i+h} w^{(A)}(t_i + h - \tau) \cdot \left(x^*_{(0)}(\tau) - x(t_i) \right) d\tau .$$

Підставляючи в отриманий вираз відповідні значення імпульсної функції ланки $w^{(A)}(t)$ та апроксимації вхідного сигналу $x^*(t)$, після спрощень отримаємо

$$\varepsilon_i^{(A)} = \varepsilon_{i-1}^{(A)} \cdot e^{-\frac{t}{T}} + \left(x(t_{i+1}) - x(t_i) \right) \cdot \left(1 - \frac{T}{h} \left(1 - e^{-\frac{h}{T}} \right) \right).$$

За отриманими виразами для заданої відносної похибки ε_i можна знайти таке співвідношення h/T, яке б для найгіршого випадку похибки у вхідному сигналі (100%-на похибка) забезпечило задану точність. Як вже згадувалося, такий випадок можливий під час комп'ютерного моделювання у разі неправильного визначення моментів перемикання ШІМ чи гістерезисного регулятора. Розраховані значення співвідношень h/T для типових значень відносної точності та двох типів елементарних динамічних ланок і порядків апроксимаційних формул для дискретизації вхідного сигналу наведено у таблиці.

Мінімальне співвідношення "крок/стала часу" для двох типів ланок і заданої точності

Ланка, порядок перетворення сигналу		Задана точність			
		5%	2%	1%	0.1%
Інтегратор	нульовий порядок	0.1	0.04	0.02	0.002
	перший порядок	0.6	0.24	0.12	0.012
Аперіодична ланка	нульовий порядок	0.1	0.04	0.02	0.002
	перший порядок	0.94	0.27	0.13	0.012

Отже, якщо числовий метод розрахунку динаміки електромеханічної системи для заданої точності вимагає меншого кроку, ніж вказано у таблиці, він є нераціональним.

Потрібно зауважити, що знайдені оцінки справедливі для цифрових моделей, отриманих будь-яким числовим чи числово-аналітичним методом: одно- чи багатокроковими методами числового інтегрування звичайних диференційних рівнянь або з використанням z-перетворення. Важливим є лише спосіб перетворення сигналу – прямокутниками, трапеціями, параболами тощо, який визначається порядком застосованої рекурентної формули. Відповідно, використовуючи пропонований спосіб, можна оцінити мінімально необхідний крок розв'язування і для перетворень сигналів вищих порядків (найчастіше відповідає порядку числового методу).

Як правило, основним визначальним чинником необхідного мінімального кроку дискретизації в комп'ютерній моделі з умов передавання корисного спектра сигналу є перша інерційна ланка, після якої високочастотні складові проміжної координати стають менш вираженими і вже для свого відтворення не вимагають малого кроку. У такому разі вирішальним фактором може стати числова стійкість застосованого числового методу, що може спричинити потребу переходу до числово-аналітичних методів, наприклад, до z-перетворення.

Висновки

Використання запропонованої оцінки мінімально необхідного кроку розв'язування дає змогу реально оцінити придатність використаного числового методу для розрахунку динаміки електромеханічної системи, здійснити вибір кращого методу з умови забезпечення максимального кроку моделювання і тим самим підняти швидкодію комп'ютерного аналізу динаміки електромеханічних систем, зокрема, під час обчислень у реальному часі.

1. Numerical Computing with MATLAB [Електронний ресурс]; [автор C. Moler]. The MathWorks, Inc. – 2004. – Режим доступу до ресурсу : http://www.mathworks.com/moler. 2. Арушанян О.Б. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений [Електронний ресурс] / О.Б. Арушанян, С.Ф. Залеткин. – 2002. – Режим доступу до ресурсу: http://www.srcc.msu.su/num_anal/list_wrk/sb3_doc/part6.htm. 3. Смит Дж.М. Математическое и цифровое моделирование для инженеров и исследователей / Дж.М. Смит; [пер. с англ. Н.П. Ильиной; под. ред. О.А. Чембровского] – М.: Машиностроение, 1980. – 271 с. 4. Костинюк Л. Моделювання електроприводів : Навчальний посібник [для студ. вищ. навч. закл.] / Л.Д. Костинюк, В.І. Мороз, Я.С. Паранчук. – Львів : Вид-во Нац. ун-ту "Львівська політехніка", 2004. – 404 с. 5. Лозинський О.Ю. Оцінка похибок часової дискретизації в цифрових системах / О.Ю. Лозинський, В.І. Мороз // Електромашинобудування та електрообладнання: Міжвідомчий науково-технічний збірник. Тематичний випуск "Проблеми автоматизованого електропривода. Теорія і практика". Випуск 66. – К.: Техніка, 2006. – С. 74–76. 6. Мороз В. Моделювання електроприводів із застосуванням модифікованого Z-перетворення / В. Мороз // Вісн. Нац. техн. ун-ту "Харківський політехнічний інститут". Тематичний випуск "Проблеми автоматизованого електроприводу. Теорія і практика". – Харків : НТУ "ХПІ", 2005. – № 45. – С. 155–156.