Порівняння розрахованих за формулою (2) cos $\varphi_ц$ та середніх їх значень cos $\varphi_{сер}$ свідчать про недосконаліcть формул типу (1, 2), які прийнято використовувати в розрахунках. Отже, вибір двигуна лише за коефіцієнтом форми недостатній і потребує детальніших досліджень з використанням математичної моделі всієї установки.

Висновки

Запропонований у статті метод визначення енергетичних параметрів штангової нафтовидобувної установки на підставі аналізу його кінематичної схеми і розрахунку статичних характеристик АД дає змогу для заданої динамограми визначати еквівалентний коефіцієнт потужності та коефіцієнт корисної дії установки залежно від маси та місця розміщення зрівноважувальних вантажів на верстаті-гойдалці, що дає змогу виключити натурні дослідження на діючих установках.

1. Бак С.И. Электрификация блочно-комплектных установок нефтяной промышленности / С.И. Бак, С.П. Читипаховян. – М.: Недра, 1989. – 183 с. 2. Бойко В.С. Розробка та експлуатація нафтових родовищ. – К.: Реал Прінт, 2004. – 695 с. 3. Маляр А.В. Динаміка електроприводу штангової нафтовидобувної установки // Технічна електродинаміка. – 2007. – № 2. – С. 50–54. 4. Маляр А.В. Математичне моделювання роботи верстата-гойдалки штангової нафтовидобувної установки // Нафтова і газова промисловість. – 2008. – № 3. – С. 34–35. 5. Малько Б.Д. Аналіз ефективності використання потужності електродвигунів верстатів-гойдалок / Б.Д. Малько, В.Я. Попович, В.Р. Харун // Розвідка та розробка нафтових і газових родовищ. – 2007. – № 1. – С. 49–52. 6. Меньшов Б.Г. Электротехнические установки и комплексы в нефтегазовой промышленности / Б.Г. Меньшов, М.С. Ершов, А.Д. Яризов. – М.: Недра, 2000. – 487 с. 7. Фильц Р.В. Математические основы теории электромеханических преобразователей. – К.: Наук. думка, 1979. – 208 с.

УДК 621.318.24: 621.372

В.С.Маляр, **І.А. Добушовська**
Національний університет “Львівська політехніка”,
кафедра ТЗЕ

АПРОКСИМАЦІЯ ХАРАКТЕРИСТИК НАМАГНІЧУВАННЯ ЕЛЕКТРОТЕХНІЧНИХ СТАЛЕЙ СПЛАЙНАМИ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

© Маляр В.С., Добушовська І.А., 2010

Розглянуто питання вибору способу апроксимації характеристик намагнічування електротехнічних сталей. Запропоновано побудову сплайна другого порядку для апроксимації кривої намагнічування.

The article discusses the problem of approximation of magnetic characteristics of electrotechnical steels. There has been offered the implementation of second-order spline for saturation curve approximation.

Постановка проблеми

Під час розв’язування багатьох задач аналізу процесів в електротехнічних установках, до яких входять феромагнітні матеріали, необхідно враховувати насичення їх магнітопроводів. Для цього необхідно апроксимувати характеристики намагнічування (ХН) електротехнічних сталей або ділянок магнітопроводу, які мають експериментальне походження і здебільшого задаються у вигляді таблиць. Спосіб апроксимації цих кривих впливає не тільки на точність результатів розрахунку, але нерідко і на якісний аспект процесу розв’язування поставленої задачі загалом.

Зокрема, він може впливати на збіжність обчислювальної процедури під час розв'язування задачі за ітераційним методом Ньютона, призводити до невиправданого дроблення кроку під час числового інтегрування диференціальних рівнянь з автоматичним його вибором [4, 8], а у разі дослідження резонансних явищ може призвести до неправильних результатів [9], тому питання апроксимації ХН має важливе значення.

Аналіз останніх досліджень

У технічній літературі висвітлено багато різних способів апроксимації ХН, основні з яких наведено в [1–8]. Способи апроксимації ХН розробляли відповідно до потреб задач, які розв'язували з їх використанням, і обчислювальних технічних можливостей. Вимоги до апроксимацій ХН диктуються специфікою тих методів, які використовуються під час математичного моделювання. Більшість методів числового інтегрування диференціальних рівнянь, які використовуються під час розрахунку перехідних процесів в електротехнічних пристроях, вимагають наявності неперервних похідних не тільки першого, але й вищих порядків. За наявності розривів у похідній ХН відбувається необгрунтоване дроблення кроку інтегрування, зумовлене невідповідністю вибраного способу апроксимації числовому методові інтегрування ДР. У теперішній час у зв'язку з високим розвитком комп'ютерної техніки деякі вимоги, які ставились до апроксимацій на ранньому етапі розвитку обчислювальної техніки, втратили свою актуальність, однак більшість з них використовуються і нині. Під час розв'язування задач за числовими методами на передній план висуваються дві вимоги: висока точність і наявність достатньої кількості неперервних похідних на всьому проміжку зміни аргументу ХН. Отже, зважаючи на велику різноманітність способів апроксимації, актуальною є проблема аналізу особливостей відомих апроксимацій. А оскільки всім апроксимаціям властиві свої недоліки, то актуальною є і задача розроблення нових, властивості яких відрізняються від відомих [1–8].

Розглянемо відомі способи апроксимації ХН з погляду ефективності їх використання для математичного моделювання процесів в електротехнічних пристроях з феромагнітними елементами.

Використання апроксимації ХН однією аналітичною функцією на всьому інтервалі зміни аргументу [1, 7, 9] дає змогу в деяких випадках отримати аналітичний розв'язок задачі. Однак вона має надто низьку точність і, незважаючи на простоту, підбір аналітичного виразу є складною задачею.

Апроксимація одним поліномом високого ступеня, який збігається із заданими значеннями ХН у вузлових точках [2], здійснюється достатньо просто, однак поліном такого типу має так звані осциляції (хвилястість) кривої, що призводить до ще більших осциляцій похідної. Це спричинює розбіжність ітераційних процесів у разі розв'язування задач із застосуванням ітераційного методу Ньютона, який вважається найефективнішим під час розв'язування нелінійних систем рівнянь.

У разі апроксимації ХН кількома поліномами невисокого степеня [1, 3] точність достатньо висока, але в точках стикування крива має розриви похідних, а це призводить до дроблення кроку під час числового інтегрування диференціальних рівнянь і розбіжності ітераційного процесу під час розв'язування системи нелінійних рівнянь. Найпростішою є кусково-лінійна апроксимація, однак розривність у вузлах вже першої похідної надто звужує можливості її використання в числових методах розрахунку.

Найефективнішими щодо точності відтворення реальної кривої є апроксимація ХН сплайнами, серед яких найпоширенішими є сплайни третього порядку [5, 6, 8]: інтерполяційний кубічний сплайн ХН; згладжувальний кубічний сплайни; кубічний сплайн Ерміта.

Апроксимація ХН кубічним сплайном, що проходить через таблично задані вузли, забезпечує високу точність і гладкість кривої лише за умови відсутності розкиду табличних значень. Оскільки останні мають експериментальне походження, то цього можна досягнути попереднім згладжуванням ручним способом або за допомогою комп'ютерної програми, наприклад, методом найменших квадратів. У зв'язку з тим, що вузлові значення функції H_j мають похибки, доцільніше будувати не інтерполяційний сплайн [5, 8], який проходить через вузлові точки, а такий, що проходить близько до таблично заданих вузлових значень, забезпечуючи плавність кривої [6]. Такий сплайн називають згладжувальним, оскільки у ньому поєднуються інтерполяція і згладжування за методом найменших квадратів. Однак при цьому існує проблема вибору значень вагових коефіцієнтів, від яких залежить ступінь наближення згладжувального сплайна до вузлових значень, а також відсутність хвилястості отриманої кривої.

Під час математичного моделювання як статичних характеристик, так і динамічних режимів електротехнічних пристроїв використовуються не тільки ХН, а й їхні похідні, причому для розв'язування багатьох задач достатньо, щоб ХН мала неперервну лише першу похідну. У цьому разі можна використовувати кубічний сплайн дефекту 2 (сплайн Ерміта) [6]. Недоліком його є необхідність визначення похідних у вузлах сітки та розривність вищих похідних у вузлах. Для побудови сплайна Ерміта необхідно мати значення похідної в кожному внутрішньому вузлі кривої. Оскільки в таблицях задаються тільки значення функції, то її похідну можна визначити за однією з формул числового диференціювання.

Перелічених недоліків позбавлені апроксимації ХН сплайнами другого порядку, яким присвячена ця стаття, і які є найефективнішими під час розв'язування багатьох задач, де достатньо мати неперервною лише першу похідну. Те, що ці сплайни досі для кривих намагнічування не розроблені, ймовірно пояснюється тим, що, як зазначено в класичних працях, сплайни парних порядків існують не завжди. Проведені нами дослідження підтвердили можливість та ефективність апроксимацій ХН сплайнами другого порядку.

Виклад основного матеріалу

Розглянемо питання побудови сплайна другого порядку для ХН, заданої у вигляді табличної залежності H=H(B). Для цього розіб'ємо весь інтервал зміни аргументу B (рис. 1) на N ділянок, необов'язково рівномірних. Як відомо, у разі практичних розрахунків перша ділянка [B_0, B_1] (при малих насиченнях) та остання [B_{N-1}, B_N] (при сильних насиченнях) приймаються лінійними. Тому точка B_1 відповідає кінцю першої, а точка B_{N-1} початку останньої прямолінійних ділянок. Отже, необхідно побудувати сплайн-апроксимацію на інтервалі [B_1, B_{N-1}].

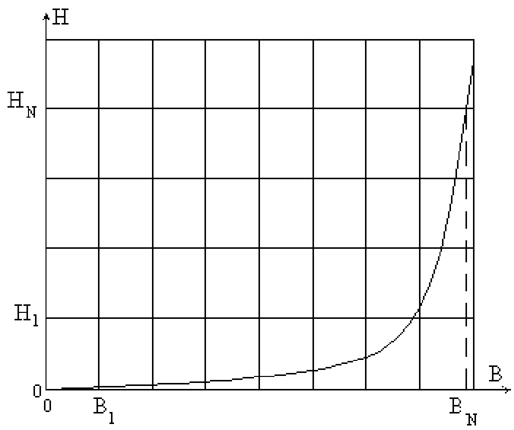

Рис. 1. Характеристика намагнічування електротехнічної сталі Э3010

Запишемо сплайн для j-ї ділянки ХН у вигляді кривої другого порядку

$$H(B) = a_j + b_j(B_j - B) + c_j(B_j - B)^2, \qquad (1)$$

де j – номер ділянки, який відповідає номеру вузла на її правій границі; B_j – значення аргументу в цьому вузлі; a_j, b_j, c_j, – коефіцієнти сплайна.

Перша та друга похідні сплайна (1) мають вигляд

$$\frac{dH}{dB} = -b_j - 2c_j(B_j - B); \qquad \frac{d^2H}{dB^2} = 2c_j, \qquad (2)$$

тобто друга похідна розривна.

Для першої ділянки і останньої, як лінійних, сплайн має вигляд

$$H_1(B) = a_1 + b_1(B_1 - B); \qquad H_N(B) = a_N + b_N(B_N - B). \qquad (3)$$

Запишемо необхідні для обчислення коефіцієнтів сплайна рівняння. Для цього підставимо в (1) та (2) значення B_j та B_{j-1} аргументу B відповідно на правій та лівій границях j-ї ділянки

$$H(B_j) = H_j = a_j; \qquad H(B_{j-1}) = H_{j-1} = a_j + b_j h_j^2;$$
$$\left.\frac{dH}{dB}\right|_j = -b_j; \qquad \left.\frac{dH}{dB}\right|_{j-1} = -b_j - 2c_j h_j; \qquad (4)$$

де $h_j = B_j - B_{j-1}$ – довжина j-ї ділянки.

З умови неперервності сплайна та збіжністю зі значеннями ХН у вузлах отримаємо $2N$ рівнянь вигляду

$$a_j + b_j h_j + c_j h_j^2 = a_{j-1}, \quad \left(j = \overline{1, N}\right); \tag{5}$$

$$a_j = H_j; \qquad \left(j = \overline{1, N}\right). \tag{6}$$

З умови неперервності першої похідної сплайна у вузлах $j = \left(\overline{1, N-1}\right)$ отримаємо N–1 рівнянь вигляду

$$b_{j-1} = b_j + 2c_j h_j. \tag{7}$$

З рівнянь (5), (6), (7) для визначення коефіцієнтів b_j отримаємо систему рекурентних рівнянь

$$\begin{aligned} & b_1 = \frac{-H_1}{B_1}; \\ & b_2 = 2\frac{H_1 - H_2}{h_2} - b_1; \\ & \vdots \\ & b_j = 2\frac{H_{j-1} - H_j}{h_j} - b_{j-1}; \\ & \vdots \\ & b_N = 2\frac{H_{N-1} - H_N}{h_N} - b_{N-1}. \end{aligned} \tag{8}$$

Для першої і останньої ділянок друга похідна дорівнює нулю, тому

$$c_1 = 0; \quad c_N = 0.. \tag{9}$$

Решту коефіцієнтів визначаємо з рівнянь

$$\begin{aligned} & c_2 = \frac{b_1 - b_2}{2h_2}; \\ & \vdots \\ & c_j = \frac{b_{j-1} - b_j}{2h_j}; \\ & \vdots \\ & c_{N-1} = \frac{b_{N-2} - b_{N-1}}{2h_{N-1}}. \end{aligned} \tag{10}$$

Отже, задача побудови для ХН сплайна другого порядку вигляду (1) має однозначний розв'язок, а його коефіцієнти за умови лінійності першої та останньої ділянок обчислюються за формулами (6), (8)–(10). Такий сплайн є найпростіший і потребує зберігання в пам'яті машини лише масиву значень H_j функції, оскільки для обчислення його коефіцієнтів не потрібно розв'язувати системи рівнянь. При цьому сітку вузлів краще брати рівномірною, хоча щодо кількості вузлів вона неоптимальна, однак у цьому разі економнішою є процедура пошуку необхідної ділянки під час обчислення значення сплайна для заданого значення аргументу B_j характеристики.

Насамкінець відзначимо, що викладений вище спосіб апроксимації ХН кубічним сплайном, що проходить через таблично задані вузли, забезпечує високу точність і кращу від кубічних сплайнів гладкість кривої, оскільки має менше осциляцій. Ще більшої гладкості кривої можна досягнути шляхом попереднього згладжування.

Висновки

1. Питання апроксимації ХН електротехнічних сталей має принципове значення під час розв'язування задач аналізу процесів в електротехнічних пристроях з феромагнітними елементами, оскільки від способу подання цих кривих нерідко залежать не тільки кількісні, але й якісні результати розв'язування задач загалом.

2. Описати ХН одним аналітичним виразом на всьому інтервалі зміни аргументу з достатньою точністю неможливо, а поліном високого ступеня, який проходить через всі вузлові точки, має осциляції як функції, так і похідної. Апроксимація кількома звичайними поліномами невисокого ступеня або іншими функціями має розриви похідних у вузлах їх стикування.

3. Найповніше задовольняють вимоги щодо точності апроксимації ХН і неперервності та плавності зміни похідних кубічні сплайни. Однак інтерполяційний сплайн має осциляції. Уникнути їх можна лише попереднім зглажуванням експериментальних даних.

4. Ефективнішим є подання ХН згладжувальним кубічним сплайном, який проходить не через вузлові точки, а поєднує в собі згладжування за методом найменших квадратів і інтерполяцію.

5. Для задач, в яких для розрахунку режимів роботи електротехнічних пристроїв використовується лише перша похідна ХН, доцільно використовувати кубічні сплайни другого порядку, алгоритм побудови яких викладений у статті.

1. Аракелян А.К.. К вопросу об аппроксимации характеристик холостого хода электрических машин / А.К. Аракелян, Г.Н. Дмитриев // Разработка и исследование специальных электрических машин. – Куйбышев: Куйб. политехн. ин-т., 1987. – С. 126–136. 2. Бамдас А.М. Определение степенного полинома для аппроксимации основной кривой намагничивания / А.М. Бамдас // Изв. вузов. Электромеханика. – 1966. – № 12. – С. 1293–1296. 3. Золотарев Н.А. Кусочно-полиномиальная аппроксимация характеристик намагничивания / Золотарев Н.А. // Изв. вузов СССР. Электромеханика. – 1981. – № 3. – С. 237–242. 4. Кузовлева Ф.Я. Аппроксимация кривых намагничивания при расчетах на ЭЦВМ / Ф.Я. Кузовлева, И.И. Пеккер // Изв. вузов СССР. Электромеханика.– 1965. – № 6. – С. 611–614. 5. Маляр В.С. Аппроксимация характеристик намагничивания сплайнами / В.С. Маляр, Р.В. Фильц // Изв. вузов СССР. Энергетика. – 1977. – № 11. – С. 119–121. 6. Маляр В.С. Апроксимація характеристик намагнічування електротехнічних сталей / В.С. Маляр, А.В. Маляр, Д.П. Гречин // Теоретична електротехніка. – 2004. – Вип. 57. – С. 78–85. 7. Оганян Р.В. Аппроксимация кривой намагничивания стали квадратичной функцией / Р.В. Оганян // Электричество. – 1998. – № 4. – С. 70–73. 8. Представление кривых намагничивания в численных расчетах магнитного поля / В.В. Гололобов, В.В. Рымша, И.В. Меркулов, А.С. Порайко // Електромашинобудування та електрообладнання: Респ. міжвід. н.-техн. зб. – К.: Техніка, 1999. – Вип. 52 – С. 81–85. 9. Синицький Л.А.. Вплив апроксимації кривої намагнічування на результати розрахунку ферорезонансу у RLC-контурі / Синицький Л.А., Смаль І.В. // Вісн. Національного ун-ту "Львівська політехніка" " ". – 2001. – № 418: Електроенергетичні та електромеханічні системи. – С. 153–158.