A Privacy Preserving Technique for Euclidean Distance-based Mining Algorithms Using Fourier-related Transforms / S. Mukherjee, Z. Chen, A. Gangopadhyay // The VLDB Journal. — Springer-Verlag, 2006. — 15(4). — P. 293–315. 26. Bapna S. A Wavelet-based Approach to Preserve Privacy for Classification Mining / S. Bapna, A. Gangopadhyay // Decision Sciences Journal. — Wiley-Blackwell, 2006. — 37(4). — P. 623–642. 27. Liu L. Wavelet-based Data Perturbation for Simultaneous Privacy-Preserving and Statistics-Preserving / L. Liu, J. Wang, J. Zhang // 2008 IEEE International Conference on Data Mining Workshops. — IEEE Computer Society Press, 2008. — P. 27–35. 28. Chertov O. Statistical Disclosure Control Methods for Microdata / O. Chertov, A. Pilipyuk // International Symposium on Computing, Communication and Control. — Singapore: IACSIT, 2009. — P. 338–342. 29. Давыдов А. А. Вейвлет-анализ социальных процессов / А. А. Давыдов // Социологические исследования. — 2003. — №11. — С. 89–101. 30. Mallat S. A Wavelet Tour of Signal Processing / S. Mallat. — New York: Academic Press, 1999. — 620 p. 31. Strang G. Wavelet and Filter Banks / G. Strang, T. Nguyen. — Wellesley: Wellesley-Cambridge Press, 1997. — 520 p.

УДК 519.65

В.А. Андруник
Національний університет "Львівська політехніка",
кафедра інформаційних систем та мереж

ПАКЕТ ПРОГРАМ ДЛЯ НАБЛИЖЕННЯ НЕПЕРЕРВНИМ І ГЛАДКИМ МІНІМАКСНИМ СПЛАЙНОМ

Розкрито функціональні можливості пакета програм "АпроКріо". Описано його призначення та особливості застосування.

Ключові слова: чебишовська апроксимація, непервне та гладке мінімаксне сплайн-наближення, пакет "АпроКріо".

Filed functionality packages "ApproKrio". Described its purpose and features of the application.

Keywords: chebyshov approximation, smooth and continuous minimax spline approximation, software package "ApproKrio".

Вступ

Сплайни часто використовують для апроксимації статичних характеристик сенсорів. Оптимальна точність апроксимації високоточних даних досягається у разі застосування найкращої рівномірної (чебишовської, мінімаксної) апроксимації. У разі, коли наближувана функція має особливості в деяких точках, які спричиняють погану апроксимацію на всьому відрізку, використовують рівномірні апроксимації на окремих частинах. Тобто застосовують розривні мінімаксні поліноміальні сплайни, наближення на окремих ланках яких підбирають так, щоб похибка наближення статичної характеристики ні в одній точці діапазону вимірювання не перевищувала деякої наперед заданої величини. Мінімаксні сплайни поєднують позитивні властивості найкращого рівномірного наближення одним виразом (невелика кількість параметрів) і наближень класичними сплайнами (стійкість під час обчислення) [6]. Доцільність застосування таких сплайнів із роздільним мінімаксним наближенням на окремих частинах діапазону вимірювання пояснюється можливістю отримати потрібну точність наближення за невеликих значень кількості параметрів у поліноміальних наближеннях. Такі апроксимації, неперервні на окремих ланках (частинах діапазону вимірювання) використовують тоді, коли визначальною умовою є лише забезпечення відтворення значень функції з певною похибкою. Прикладом такої задачі може бути знаходження функціональної залежності для опису статичних характеристик термоперетворювачів [7]. Проте для дослідження чутливості сенсора такі розривні апроксимації непридатні, оскільки значення похідної у вузлах розривного сплайна мають значні розбіжності [8]. У роботі [8] для наближення термометричної характеристики кремнієвих діодних сенсорів температури та їх чутливості використано апроксимації за методом найменших квадратів поліномами Чебишова. Задовільна точність апроксимації термометричної характеристики сенсора та його чутливості досягається за сотого й вищого степеня поліномів Чебишова, що ускладнює практичне застосування цих апроксимацій через характерні для високих степенів пульсації.

Задача відтворення статичної характеристики сенсора і його чутливості зводиться до побудови неперервного й гладкого сплайн-наближення. Для досягнення оптимальної точності слід застосовувати мінімаксне сплайн-наближення, яке забезпечує наближення з найменшою можливою похибкою за заданого степеня полінома. Побудову гладкого розривного сплайн-наближення поліномами третього степеня із застосуванням мінімаксного критерію описано в роботі [9], проте теоретичного обґрунтування його побудови не наведено.

У цій роботі запропоновано спосіб підбору таких мінімаксних поліноміальних наближень на окремих ланках сплайна, за яких похибка наближення на всьому відрізку наближення не перевищує деякої наперед заданої величини, і водночас складений із них сплайн і його похідна є неперервними функціями.

Побудова неперервного й гладкого рівномірного сплайн-наближення з поліноміальними ланками, в якому наближення на кожній із ланок визначається за мінімаксним критерієм, ґрунтується на застосуванні чебишовського наближення з точним відтворенням значення функції та похідної у заданих точках. Значення параметрів наближення на першій ланці цього сплайна визначається за характеристичною властивістю мінімаксного наближення, яке в крайній правій точці ланки відтворює значення функції та похідної. Поліноміальні наближення на внутрішніх ланках сплайна, починаючи з другої до передостанньої, визначаються відповідно до характеристичної властивості мінімаксного наближення, яке в крайніх точках цих ланок відтворює значення функції і похідної. Мінімаксне наближення на останній ланці сплайна точно відтворює значення функції і похідної у крайній лівій точці ланки. Довжини всіх ланок сплайна, крім останньої, вибирають максимально можливими для заданої похибки сплайн-наближення.

Якщо під час побудови неперервного сплайн-наближення із заданою похибкою на одній із поточних ланок мінімально допустимої довжини отримується похибка, більша від заданої, то використовується ермітова інтерполяція із відтворенням значення функції та похідної у відповідних крайніх точках ланки: на першій ланці в крайній правій точці, на останній у – лівій точці, а для внутрішніх ланок в обох крайніх точках.

Ефективність застосування неперервного й гладкого рівномірного сплайн-наближення з поліноміальними ланками проілюстрована на апроксимації температурної характеристики термодіодного сенсора типу DT-471 фірми Lake Shore [10]. Тому актуальним є розроблення програмного забезпечення для наближення неперервним та гладким мінімаксним сплайном. Адже математична система Maple передбачає визначення мінімаксного наближення, але лише для аналітично заданих функцій поліномом і раціональним виразом, хоча потреба в апроксимації таблично заданих функцій досить актуальна й методи знаходження такого наближення відомі. Проте навіть ці процедури (minimax та remez), реалізовані у пакеті Maple, часто з різних причин не дають результату у випадках, коли мінімаксне наближення існує, або дають неправильні результати. Mathcad, Matlab, Mathematica, як правило, виконують поліноміальну, раціональну і сплайн-інтерполяцію, а також середньоквадратичну апроксимацію, а саме надлиження за методом найменших квадратів [12]. Жоден з перерахованих програмних засобів не може знайти наближення дискретно заданих функцій у рівномірній метриці [11].

Такі ситуації не тільки обмежують інструментальні можливості згаданих програмних засобів, вони зумовлюють застосування середньоквадратичного критерію для задач, розв’язком яких є мінімаксні апроксимації. Це, зокрема, спричиняє отримання дещо гірших технічних характеристик під час проектування систем вимірювання чи керування, градуювання статичних характеристик сенсорів тощо.

Свого часу для машин серії МИР, СМ-4, IBM PC були розроблені пакети програм для розв'язування деяких задач із мінімаксною апроксимацією функцій. Таке програмне забезпечення розроблялося і за кордоном. Окремі програми для визначення мінімаксного наближення розроблялися в Інституті кібернетики НАН України, Інституті математики НАН України, Фізико-механічному інституті НАН України, Інституті механіки й математики РАН, Університеті штату Вісконсін, Університеті штату Південна Кароліна (округ Колумбія, США) й інших закладах.

Нині у Центрі математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки та математики НАН України розроблено пакет програм «РАДАН» для розв'язування задач на знаходження мінімаксного наближення функцій із найменшою абсолютною або відносною похибкою.

Призначення програми

Програмний засіб "Пакет програм для неперервного й гладкого рівномірного сплайн-наближення високоточної низькотемпературної характеристики" (скорочено – пакет «АпроКріо») призначений для розв'язування оптимізаційних задач аналітичного подання таблично заданої високоточної низькотемпературної (кріогенної) характеристики сенсора методами рівномірної (мінімаксної, чебишовської) апроксимації. Такі задачі виникають під час дослідження властивостей температурних сенсорів, оскільки їхня чутливість є похідною від функції, що описує температурну характеристику. До розв'язування таких задач зводиться також проектування різноманітних вимірювальних приладів, функціональних перетворювачів тощо. При цьому, як правило, ставиться мета зменшення методичної похибки відтворення дослідних даних. Досягнення мінімально можливої похибки апроксимації високоточних експериментальних даних забезпечується застосуванням рівномірного наближення, яке називають ще чебишовським, або мінімаксним.

Пакет «АпроКріо» забезпечує визначення неперервного й гладкого мінімаксного сплайн-наближення поліномом із заданою абсолютною або відносною похибкою таблично заданої функції. При цьому мінімаксні поліноміальні наближення визначаються на декількох окремих підмножинах заданої множини точок (на окремих ланках) так, що похибка наближення ні в одній точці діапазону вимірювання не перевищує наперед заданого значення. У крайніх точках підмножин (на межах ланок) здійснюється "склеювання" значень отриманих поліномів і їх похідних, тобто забезпечується їх рівність таблично заданим значенням. Довжину кожної поліноміальної ланки вибирають максимально можливою для заданої похибки, що забезпечує мінімальну кількість ланок у сплайні.

Необхідною інформацією для роботи програми є таблично задані значення аргументу, функції і її похідної, степінь многочлена-апроксиманти й значення потрібної похибки сплайн-наближення (абсолютної чи відносної).

Введення вхідних даних підтримується відповідним вікном введення даних. Значення наближуваної функції і її похідної зчитуються з текстового файла. Якщо значення похідної не задані, вони автоматично обчислюються за відомими різницевими формулами.

Результатом роботи програми є неперервний і гладкий сплайн, який забезпечує задану похибку наближення з найменшою можливою кількістю ланок. Для кожної з визначених ланок виводяться:

– порядковий номер ланки;

– межі ланки;

– значення коефіцієнтів многочлена у послідовності зростання степеня;

– значення похибки наближення заданої функції на певній ланці за мінімаксним критерієм із відповідними умовами на межах ланки;

– похибка відтворення значення похідної функції похідною сплайна.

Крім того, передбачено можливість ознайомлення з детальними результатами розв'язування задачі. Користувач може переглянути таблицю, у якій для кожної точки заданої функції подано точне значення функції, обчислене за сплайном наближене значення, похибка наближення, значення похідної, наближене значення похідної і похибку відтворення значення похідної.

Передбачено також можливість відстежити хід розв’язування задачі. В окремому полі робочого вікна програми подається інформація про пошук оптимальної довжини ланки й отримані при цьому значення похибок наближення.

Результати розв’язування задач відображаються в робочому вікні програми й, за бажанням користувача, можуть бути збережені у вказаному файлі.

Крім основної задачі, пакет передбачає розв’язування ще двох допоміжних задач:

– визначення найкращого рівномірного наближення многочленом на заданому відрізку з найменшою абсолютною чи відносною похибкою й точним відтворенням значення функції та похідної в заданій точці;

– визначення найкращого рівномірного наближення многочленом на заданому відрізку з найменшою абсолютною чи відносною похибкою і точним відтворенням значення функції та похідної у крайніх точках відрізка.

Розв’язування цих допоміжних задач дає користувачеві змогу самостійно задавати межі ланки та інтерполяційні умови.

У разі неможливості розв’язування задачі (вказана надто мала похибка) виводиться відповідне повідомлення. Програма передбачає багатовіконне розв’язування задач, тобто можна одночасно в окремих вікнах розв’язувати декілька задач і порівнювати одержані результати.

Для перевірки справдження характеристичної властивості найкращої рівномірної апроксимації на окремій ланці сплайна виводяться також номери точок альтернансу й точного відтворення значень функції та похідної. У точках альтернансу відхилення моделі від значень функції рівні за модулем і їх знак у цих точках почергово змінюється. Перевіривши виконання цієї властивості, користувач може впевнитись у правильності обчислення найкращого рівномірного наближення на ланці.

Користувачеві пакет «АпроКріо» передається у вигляді одного скомпільованого виконавчого файла – ApproCryo.exe. Розмір цього файла становить близько 1200 кілобайт. Особливості застосування пакета «АпроКріо» описано в [1]. Запуск програми «АпроКріо» на виконання реалізується активізацією файла ApproCryo.exe. Після виведення заставки-повідомлення про виконання пакета «АпроКріо» відкривається робоче вікно програми (див. рис. 1).

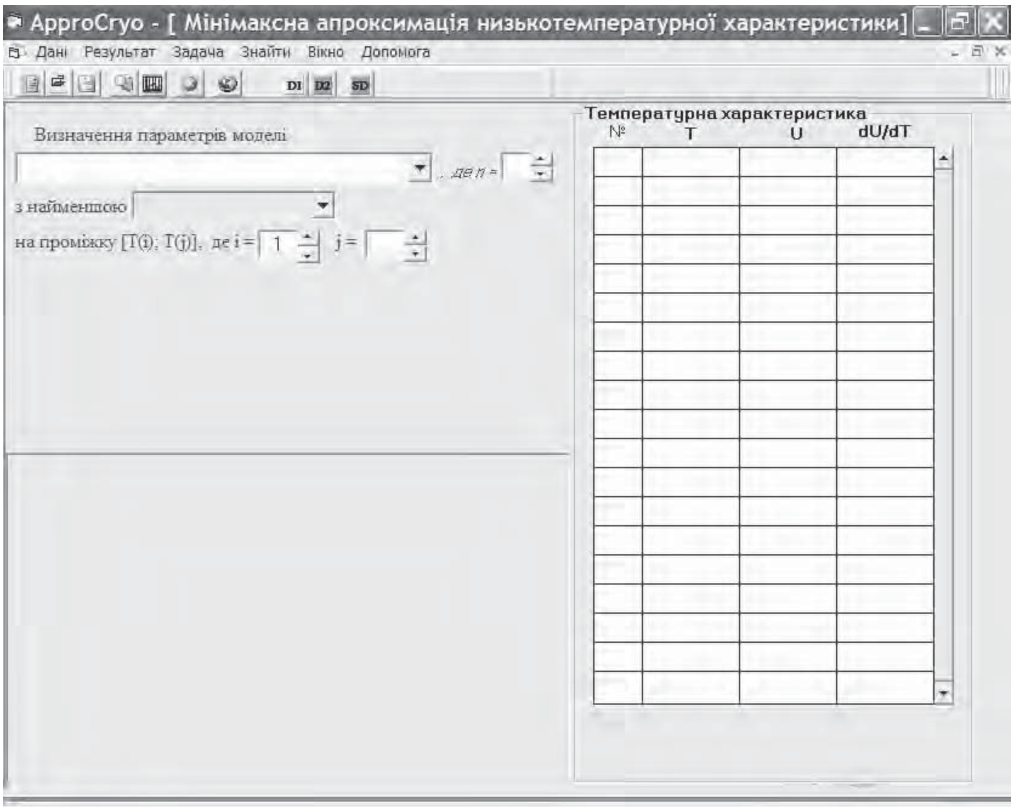

Рис. 1. Вигляд робочого вікна програми

Функціональні можливості пакета програм “АпроКріо”

Пакет передбачає побудову неперервного та гладкого мінімаксного сплайн-наближення

$$S(x)=F_m\left(a^{(j)};\ \ x\right),\ t_j\le x\le t_{j+1},\quad j=\overline{1,\ q},\qquad t_1=x_1,\quad t_{q+1}=x_n \tag{1}$$

на відрізку $[\alpha,\ \beta]$ неперервно диференційовної функції $f(x)$ $\left(\ f(x)\in C^1[\alpha,\ \beta]\ \right)$, заданої значеннями на множині точок

$$X=\{\ \alpha\le x_1<x_2<\ldots<x_n\le\beta\ \}. \tag{2}$$

У сплайні (1) точки t_j $\left(j=\overline{1,\ q+1}\right)$ – це межі ланок, їх ще називатимемо вузлами сплайна, а відрізки $[t_j,\ \ t_{j+1}]$, $j=\overline{1,\ q}$ – ланки сплайна, на яких значення сплайна визначається за відповідним виразом $F_m\left(a^{(j)};\ \ x\right)$. Вираз $F_m(a;\ x)$ – це вираз від m $(m\ge 4)$ дійсних параметрів a ($a\in A,\ \ A\subseteq R_m$). Кожний із виразів $F_m\left(a^{(j)};\ \ x\right)$, $j=\overline{1,\ q}$ є чебишовським наближенням функції $f(x)$ на відрізку $[t_j,\ t_{j+1}]$, яке в точках дотику ланок t_j $\left(j=\overline{2,\ q}\right)$ забезпечує дотримання співвідношень

$$F_m\left(a^{(j-1)};\ \ t_j\right)=F_m\left(a^{(j)};\ \ t_j\right)=f\left(t_j\right)\ , \tag{3}$$

$$F'_m\left(a^{(j-1)};\ \ t_j\right)=F'_m\left(a^{(j)};\ \ t_j\right)=f'\left(t_j\right)\ . \tag{4}$$

Якщо G_j – значення похибки наближення на j-й ланці сплайна, то похибкою наближення сплайном називається величина G, яка дорівнює

$$G=\max_{1\le j\le q}G_j. \tag{5}$$

Побудова неперервного й гладкого мінімаксного сплайн-наближення виразом $F_m(a;\ x)$ із заданою похибкою полягає у визначенні чебишовського наближення цим виразом на ланках сплайна так, щоб похибка наближення у жодній точці діапазону вимірювання не перевищувала наперед заданого значення. Неперервність і гладкість сплайна забезпечується ”склеюванням” значень отриманих чебишовських наближень і їхніх похідних у точках дотику ланок (3)–(4). У цих точках значення сплайн-наближення та його похідної дорівнює таблично заданим значенням функції та її похідної. Алгоритм побудови такого сплайн-наближення описано в [2]. Відповідно до цього алгоритму довжина кожної ланки вибирається максимально можливою для заданої похибки, що забезпечує мінімальну кількість ланок у сплайні.

Пакет «АпроКріо» забезпечує встановлення неперервного й гладкого мінімаксного сплайн-наближення із заданою абсолютною або відносною похибкою таблично заданої функції такими виразами:

− многочленом

$$P_m(a;x)=\sum_{i=0}^{m}a_i\,x^i\ , \tag{6}$$

− сумою многочлена й експоненти

$$Q_m(a;x)=\sum_{i=0}^{m}a_i\,x^i+Ae^{qx}\ , \tag{7}$$

− сумою многочлена й логарифма

$$L_m(a;x)=\sum_{i=0}^{m}a_i\,x^i+A\ln(x+p),\quad x>-p\ , \tag{8}$$

в яких a_i $\left(i=\overline{0,\ m}\right)$ і A – невідомі параметри, а значення параметрів q і p задано. Пакет передбачає також побудову неперервного й гладкого мінімаксного сплайн-наближення з абсолютною похибкою нелінійними виразами: сумою многочлена й експоненти

$$E_m\left(a;x\right)=\sum_{i=0}^{m}a_i\,x^i+Ae^{px}\ , \tag{9}$$

і сумою многочлена й степеня

$$C_m\left(a;x\right)=\sum_{i=0}^{m}a_i\,x^i+Ax^p\ , \tag{10}$$

в яких значення показника степеня p визначається в результаті наближення.

Основу пакета “АпроКріо” становлять апроксимаційні модулі, орієнтовані на визначення чебишовського наближення виразами (6)–(10) з конкретними інтерполяційними умовами. До складу пакета входять 52 апроксимаційні модулі, які реалізують методи обчислення параметрів чебишовського наближення з точним відтворенням значення функції та її похідної у крайніх точках відрізка з найменшою абсолютною чи відносною похибкою. Окрім того, передбачено ще 17 інтерполяційних модулів для визначення інтерполяції виразами (1)–(5), з яких 15 забезпечують визначення ермітової інтерполяції цими виразами з відтворенням значень похідної функції в крайніх точках відрізка. Опис методів чебишовського наближення й інтерполювання виразами (6)–(10) подано в [1–5].

Вхідні та вихідні дані пакета програм “АпроКріо”

Необхідною інформацією для роботи програми є таблично задані значення аргументу, функції та її похідної, степінь многочлена відповідного апроксимувального виразу й значення потрібної похибки сплайн-наближення (абсолютної чи відносної). Введення вхідних даних підтримується відповідним вікном введення даних (див. рис. 2). Значення наближуваної функції та її похідної зчитуються з текстового файла. Задання значень похідної функції не обов’язкове. Якщо значення похідної не задані, то вони автоматично обчислюються за відомими різницевими формулами.

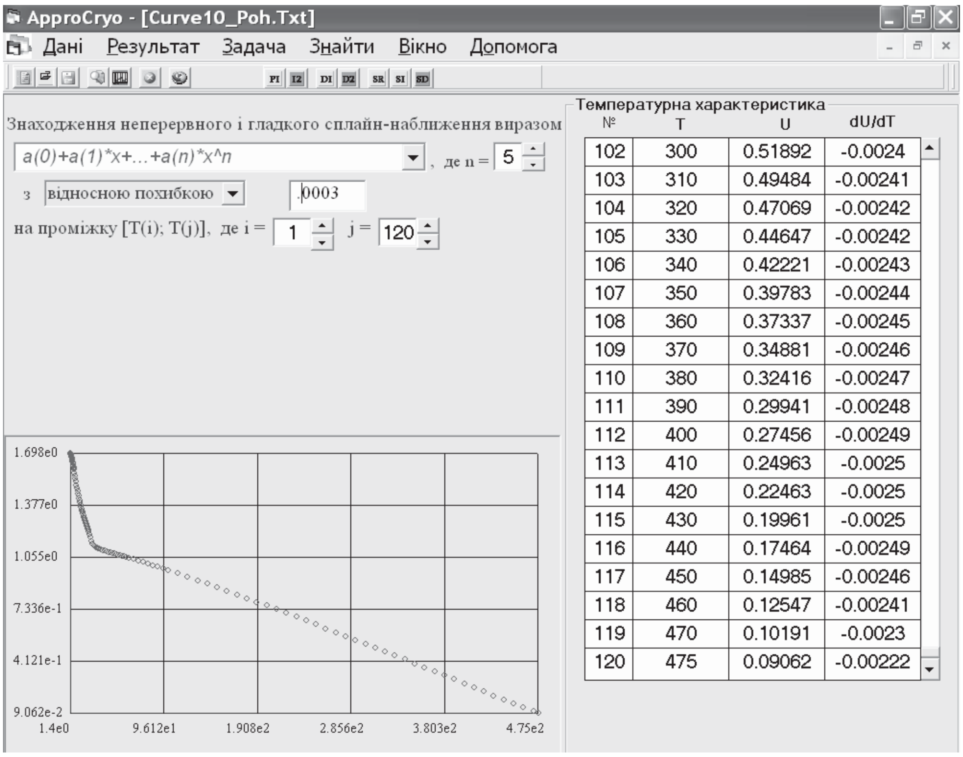

Рис. 2. Вигляд робочого вікна програми із заданими вхідними даними

Для вибору наближаючого виразу серед (5)–(10) і похибки наближення абсолютної чи відносної передбачено відповідні списки з можливими варіантами. Ці списки контекстно залежні – наприклад, можливість вибору виразів (9) і (10) забезпечується лише для абсолютної похибки.

Результатом виконання програми є неперервний і гладкий мінімаксний сплайн, який забезпечує задану похибку наближення з найменшою можливою кількістю ланок. Програма, окрім побудови неперервного й гладкого мініксного сплайн-наближення, передбачає також можливість побудови неперервного, а також розривного сплайн-наближення. Вигляд робочого вікна програми з результатами її виконання зображено на рис. 3.

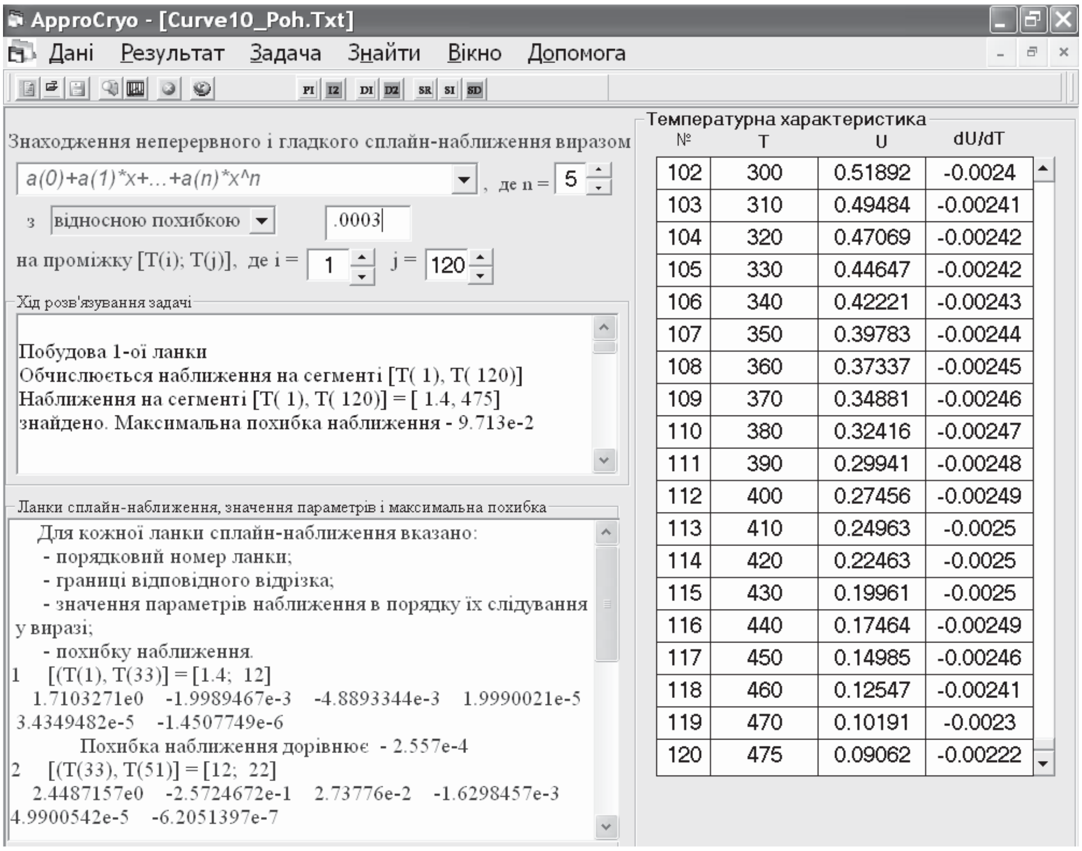

Рис. 3. Вигляд робочого вікна програми з результатами розв'язування задачі

Для кожної з визначених ланок сплайн-наближення виводяться:

– порядковий номер ланки;

– межі ланки;

– значення коефіцієнтів наближаючого виразу;

– значення похибки наближення заданої функції на цій ланці за чебишовським критерієм із відповідними умовами на межах ланки;

– похибка відтворення значення похідної функції похідною сплайна.

Крім того, передбачено ще можливість ознайомлення з детальними результатами розв'язування задачі. Користувач може переглянути таблицю, у якій для кожної точки заданої функції подано точне значення функції, обчислене за сплайном наближене значення, похибка наближення, значення похідної, наближене значення похідної та похибка відтворення значення похідної. Ці результати можна переглянути у полі "Спостереження та значення моделі" робочого вікна (див. рис. 4).

З метою виявлення результатів з можливими випадковими похибками передбачено аналіз дослідних даних. Цей аналіз ґрунтується на дотриманні монотонності термометричної характеристики сенсора й виявленні результатів спостереження, які більше ніж на 2σ відхиляються від середньоквадратичної моделі.

У результаті експериментів було встановлено, що для низькотемпературної характеристики термодіодних сенсорів для згладження доцільно застосовувати поліном четвертого степеня на множині 15 точок.

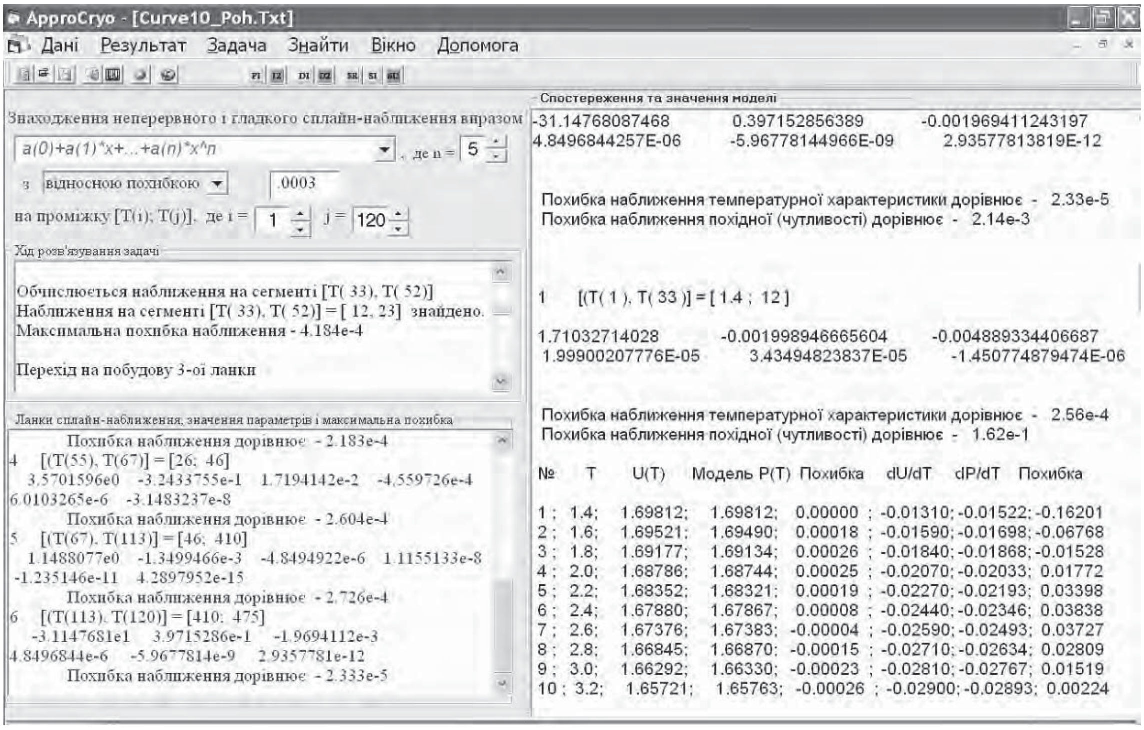

Рис. 4. Вигляд робочого вікна програми з детальними результатами розв'язування задачі

Результати розв'язування задачі, за бажанням користувача, можуть також бути збережені у вказаному файлі.

Пакет передбачає можливість відображення графіка отриманого сплайн-наближення з позначенням наближуваної функції, а також графіка похідної сплайна із зображенням значень похідної наближуваної функції.

Для перевірки справдження характеристичної властивості чебишовської апроксимації на окремій ланці сплайна виводяться номери точок альтернансу й точного відтворення значень функції та її похідної. У точках альтернансу відхилення моделі від значень функції рівні за модулем, а знак похибки наближення в цих точках почергово змінюється. Перевіривши виконання цієї властивості, користувач може впевнитись у правильності обчислення чебишовського наближення на відповідній ланці.

Передбачено також можливість відстеження ходу розв'язування задачі. У полі "Хід розв'язування задачі" робочого вікна програми (див. рис. 3, 4) подається інформація про результати пошуку оптимальної довжини кожної ланки сплайна й отримані при цьому значення похибок наближення. За цією інформацією можна відстежити процес побудови сплайн-наближення.

Крім основної задачі − побудови неперервного та гладкого мінімаксного сплайн-наближення – пакет передбачає розв'язування ще двох допоміжних задач:

– визначення чебишовського наближення вказаним виразом на заданому відрізку з найменшою абсолютною чи відносною похибкою і точним відтворенням значення функції та її похідної у заданій точці;

– визначення чебишовського наближення вказаним виразом на заданому відрізку з найменшою абсолютною чи відносною похибкою і точним відтворенням значення функції та її похідної у крайніх точках відрізка.

Розв'язування цих допоміжних задач дає змогу користувачеві самостійно задавати межі ланки та інтерполяційні умови. Потреба в них виникає тоді, коли необхідно дослідити значення похибки наближення для певних відрізків.

У разі неможливості розв'язування задачі (вказана надто мала похибка) виводиться відповідне повідомлення.

Обмеження на кількість N значень наближуваної функції: $3 \le N \le 1000$. Це значення вибрано із міркувань практичної доцільності. У принципі його значення розробник може встановити залежно від потреб користувача.

Обмеження на степінь n многочлена-апроксиманти: $3 \le n \le 14$.

Крім того, повинна виконуватися очевидна математична вимога: $n << N$. Степінь полінома-апроксиманти має бути не нижчим від кількості точок спостереження.

У реальних задачах значення N вимірюється сотнями, а бажане значення степеня полінома – n не більше від десяти.

Для зручності подальшого використання файла результатів можна вибирати для нього бажаний тип файла за передбаченими в пакеті розширеннями імені: .txt, xls або .doc. Це дає змогу надалі опрацьовувати ці файли відповідними текстовими редакторами чи іншими програмними засобами.

Файл користувача із заданими значеннями наближуваної функції (температурної характеристики) повинен бути оформлений як текстовий файл, який містить N рядків; у кожному рядку розділені комою, пробілом або знаком табуляції мають бути записані значення аргументу, функції і (необов’язково) значення похідної функції. Ці значення повинні бути впорядковані строго за зростанням аргументу (від найменшого до найбільшого, однакові не допускаються).

Програма передбачає багатозадачний режим функціонування. Вона підтримує можливість одночасного розв’язування в окремих вікнах декількох задач, що дає змогу оперативно порівнювати різні варіанти допустимих результатів.

Вибір функціональних можливостей пакета «АпроКріо» реалізовано із застосуванням меню й панелі інструментів. Передбачено також використання клавіш доступу та клавіш швидкого доступу.

Висновки

Пакет програм “АпроКріо” призначений для побудови непервного та гладкого мінімаксного сплайн-наближення з заданою абсолютною або відносною похибкою поліномом, експоненційним і логарифмічним виразом, а також сумою полінома й експоненти (степеня). Він працює під керуванням операційної системи Windows, його інтерфейс зручний та інтуїтивно зрозумілий.

1. Чапля Є. Я. Пакет програм для неперервного і гладкого рівномірного сплайн-наближення високоточної низькотемпературної характеристики («Апрокріо») / Є. Я. Чапля, П.С. Малачівський, М. І. Дзюбачик, Б. Р. Монцибович, А. Р. Торський, В. А. Андруник // Свідоцтво про реєстрацію авт. права на твір № 20705 від 30.05.2007 / Державний департамент інтелектуальної власності МОНУ. – 80 с. 2. Andrunyk V. Continuous and smooth minimax spline-approximation of sensor temperature characteristic and its sensitivity / Vasyl Andrunyk, Petro Malachivskyy, Yaropolk Pizyur, Vasyl Yatsuk // Pomiary, automatyka, kontrola (PAK). – 2007. – Vol. 53, – nr 9bis – S. 617–620. 3. Андруник В. Неперервна й гладка мінімаксна сплайн-апроксимація експоненційним виразом / Василь Андруник, Петро Малачівський // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2007. – Вип. 5. – С. 85–97. 4. Малачівський П. Неперервна апроксимація характеристики термодіодного сенсора і його чутливості сумою многочлена й експоненти з нелінійним параметром / Петро Малачівський // Вимірювальна техніка та метрологія. – 2008. – № 69. – С. 84–89. 5. Андруник В. А. Неперервна мінімаксна сплайн-апроксимація температурної характеристики та чутливості термодіодного сенсора логарифмічним виразом / В. А. Андруник, П. С. Малачівський // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2007. – № 5. – С. 108–115. 6. Попов Б. А. Равномерное приближение сплайнами. – Киев: Наук. думка, 1989. – 272 с. 7. Малачівський П., Андруник В. Рівномірне сплайн-наближення // "Комп'ютерні технології друкарства", № 7. – Львів: Українська академія друкарства, 2002. – С. 107–115. 8. Иващенко А. Н., Шварц Ю. М. Аппроксимация термометрических характеристик кремниевых диодных сенсоров температуры // Оптоэлектроника и полупроводниковая техника: Межвед. сб. науч. тр. – 2003. – Вып. 38. – С. 61–70. 9. Пізюр Я. В., Попов Б. О. Побудова многочленних ермітово-чебишовських сплайнів третього степеня // Волинський математичний вісник. – 1995. – Вип. 2. – С. 129–131. 10. http://www/mapleapps.com/categories/mathematics/numerics/html/ratappr.html 11. Каленчук-Порханова А.А, Вакал Л.П. Пакет программ аппроксимации функций // Комп’ютерні засоби, мережі та системи. – 2008. – №7. – С. 32–33. 12. Говорухин В., Цибулин Б. Компьютер в математическом исследовании: Maple, Matlab. – СПб.: Питер, 2001. – С. 619.