

ДИНАМІКА І СТІЙКІСТЬ СТИСНУТО-ЗІГНУТИХ СТРИЖНІВ, ПІДСИЛЕНИХ З ПОПЕРЕДНІМ НАПРУЖЕННЯМ

© Більський М.Р., 2010

Розглянуто методи розрахунку динаміки і стійкості стиснуто-зігнутих стрижнів сталевих каркасів будівель та споруд, що експлуатуються після реконструкції в умовах динамічних навантажень, підсилюваних з попереднім напруженням.

Ключові слова: динаміка, стійкість, стрижень, напруження.

This article expounds about method of estimate for dynamics and stability compressed bending bars steel works of structures and builing frame operating condition of a structure form cade.

Keywords: dynamic, stability, bar, compressed.

Актуальність проблеми. Під час реконструкції сталевих каркасів будівель та споруд часто виникає необхідність враховувати зміни умов їх подальшої експлуатації, динамічні навантаження тощо. З метою скорочення термінів виконання будівельно-монтажних робіт з реконструкції – підсилення конструкцій доцільно здійснювати під експлуатаційним навантаженням. В таких випадках підсилення необхідно виконувати із застосуванням попереднього напруження. Найскладніше підсилювати стиснуто-зігнуті стрижні. Це вимагає дослідження динаміки і стійкості таких стрижнів, підсилених з попереднім напруженням.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Динаміка стрижневих систем досліджувалась в багатьох працях [1, 2, 4, 8, 11, 16, 18], у яких розв’язано фундаментальні задачі динамічного розрахунку споруд, який відрізняється від статичного двома важливими особливостями [13]. По-перше, навантаження і реакції змінюються в часі, тому динамічний розрахунок значно складніший і працемісткіший, ніж статичний. По-друге, динамічні навантаження, що виникають в результаті дії сил інерції від прискорення мас, можуть становити істотну частину загальних навантажень [13]. Необхідно також зауважити, що вплив попереднього напруження на стійкість і коливання стрижневих систем висвітлений недостатньо. В монографії [8] досліджуються коливання попередньо напруженої балки постійної жорсткості, в кінцях якої закріплена попередньо натягнута зтяжка.

Розв’язання диференційного рівняння коливань шукають у вигляді:

$$\omega(s, t) = x(t) \sin \frac{\pi}{l} s,$$

де s, l – відповідно довжина зігнутої осі та величин прольоту балки.

В результаті показано критерій стійкості і зміну положення стійкої рівноваги в процесі натягу зтяжки. Робота такої попередньо напруженої балки під дією зовнішнього навантаження не досліджується.

У роботі [4] досліджується вплив попереднього напруження в результаті реконструкції підсилення сталевих каркасів будівель та споруд на частоті форм власних коливань. Показано, що попереднє напруження при підсиленні дає зменшення переміщень, що позитивно впливає на динамічні характеристики конструкцій. Разом з цим, робота стиснуто-зігнутих стрижнів, підсилених з попереднім напруженням під статичним навантаженням у разі дії динамічних навантажень, залишається не з’ясованою до кінця.

Стійкість сталевих гнучких стрижнів, що працюють на стиск, підсилені проміжною додатковою пружною опорою, досліджено в роботі [5]. Вплив попереднього напруження на роботу такого стрижня не розглядається.

Ефект попереднього напруження (регулювання зусиль) у поєднанні зі зміною статичної схеми є в сумі досить позитивним, що має істотне значення для теорії і практики підсилення [10].

Застосування електрозварювання в процесі підсилення також рівносильно дії запобігання, яка створює розтягуючі зусилля по довжині зварних швів [3]. Робота підсиленіх сталевих стрижнів на поздовжній згин досліджувалась в [6], де показано, що вплив попереднього напруження в процесі підсилення чітко виражений в істотному зменшенні деформативності і збільшенні тримкості (резерву стійкості) підсиленіх стрижнів в практично важливому діапазоні гнучкостей (30–90).

У [12] розглядаються динамічні переміщення прямого бруса при поздовжніх силах, прикладених в його кінцях та з рівномірно розподіленим поперечним навантаженням по довжині при вільних коливаннях, вимушених коливаннях при вібраційному навантаженні, а також поздовжні коливання прямих стрижнів (вільні та вимушені). Визначаються в загальному вигляді і форми власних коливань поздовжньо-стиснутих і розтягнутих брусів. Показано, що при критичній силі поздовжнього стиску частота коливань дорівнює нулю, причому стискуюча поздовжня сила збільшує частоту, а розтягуюча – зменшує. Викладений [12] метод досліджень можна застосувати для вивчення роботи стиснуто-зігнутого стрижня, підсиленого з попереднім напруженням.

Невирішені раніше частини проблеми. Статистична і динамічна стійкість попередньо напружених під статистичним експлуатаційним навантаженням стиснуто-зігнутих стрижнів та інших елементів сталевих будівельних конструкцій з початковими (власними напруженнями) вимагає додаткових досліджень. З огляду на викладене необхідно продовжити роботу в такому напрямі:

А) визначення частот і форм власних коливань стиснутих стрижнів, підсиленіх з регулюванням зусиль попередньо напруженими елементами з відпуском регулюючого зусилля під експлуатаційним навантаженням (без зупинки виробництва в діючих цехах підприємств);

Б) вивчення роботи підсиленіх стиснутих елементів під дією статичного і динамічного навантажень;

В) закладення основ практичних рекомендацій з підсилення під навантаженням стиснуто-зігнутих елементів сталевих конструкцій з розрахунку їх роботи на динамічні і статичні навантаження.

Метою цієї роботи є отримання аналітичних залежностей впливу попереднього напруження на роботу підсилення під навантаженням стиснуто-зігнутих сталевих конструкцій.

Диференціальне рівняння зігнутої осі стиснуто-зігнутого стрижня

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{M_{(x,t)}}{EI_x} + (N_x - N_{ps})(y - y_0),$$

де $M=M_{q(x,t)}$ – згинальний момент від дії зовнішнього навантаження (факторів поперечного згину); EI_x – жорсткість стрижня; N_x – нормальна сила від дії зовнішнього навантаження; N_{ps} – зусилля (поздовжня сила) від дії попереднього напруження (регулююче зусилля).

Для отримання диференційного рівняння переміщень стрижня приймемо спочатку, що

$$\frac{\partial^2 M_{(x,t)}}{\partial x^2} = p(x,t) = m_x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + q(x,t). \quad (1)$$

Тоді

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI_x \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right] + m_x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + (N_x - N_{ps}) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -q(x,t). \quad (2)$$

Диференціальне рівняння вільних коливань

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI_x \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right] + m_x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + (N_x - N_{ps}) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0. \quad (3)$$

Розв'язок (3) шукаємо у вигляді

$$y_{(x,t)} = \sum_{k=1}^{\infty} y_{k0} \bar{\omega} F_{k,t}. \quad (4)$$

Після підстановки часткового інтеграла (4) в (3) та розділивши результат на $m_x y_{k,x} F_{k,t}$, отримаємо

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{(EI_x y''_{k,x})}{m_x y_{k,x}} + \frac{(N_x - N_{ps}) y''_{k,x}}{m_x y_{k,x}} = \frac{\ddot{F}_{k,t}}{F_{k,t}} = \omega_k^2. \quad (5)$$

Звідси

$$\ddot{F}_{k,t} + \omega_k^2 F_{k,t} = 0, \quad (6)$$

А його інтеграл:

$$F_{k,t} = A_k \sin \omega_k t + B_k \cos \omega_k t \quad (7)$$

Стрижень здійснює гармонічні коливання з частотою ω_k .

Диференційне рівняння головної форми коливань стиснуто-зігнутого стрижня масою m (рівномірно розподіленою по довжині), підсиленого попередньо напруженим (регулюючим) елементом, що створив розвантажувальну поздовжню силу $-N_{ps}$

$$Y_x^{IV} = \frac{N - N_{ps}}{EI} Y_{k,x}^{II} - \frac{m \omega_k^2}{EI} Y_{k,x} = 0. \quad (8)$$

Характеристичне рівняння для (8) має такий вигляд

$$r^4 + \frac{N - N_{ps}}{EI} r^2 - S_k^4 = 0, \quad (9)$$

$$r_{1,2} = \pm a_k; r_{3,4} = \pm b_{k,i},$$

$$a_k = \sqrt{\pm \frac{N - N_{ps}}{2EI} + \sqrt{\frac{(N - N_{ps})^2}{4(EI)^2} + S_k^4}}; \quad (10)$$

$$b_k = \sqrt{\pm \frac{N - N_{ps}}{2EI} + \sqrt{\frac{(N - N_{ps})^2}{4(EI)^2} + S_k^4}};$$

Разом з тим

$$a_k^4 - b_k^4 = \pm \frac{N - N_{ps}}{EI}; \quad a_k^2 + b_k^2 = 2 \sqrt{\frac{(N - N_{ps})^2}{4(EI)^2} + S_k^4}. \quad (11)$$

Відповідно до коренів характеристичного рівняння інтеграл (8) буде

$$Y_{k,x} = Acha_k X + Bsha_k X + \cos b_k X + D \sin b_k X \quad (12)$$

Диференціюючи (12) послідовно, отримаємо

$$y'_{k,x} = a_k Asha_k \cdot x + a_k Bcha_k x - b_k C \sin b_k x + b_k D \cos b_k x; \quad (13)$$

$$y''_{k,x} = a_k^2 Asha_k \cdot x + a_k^2 Bcha_k x - b_k^2 C \sin b_k x - b_k^2 D \cos b_k x; \quad (14)$$

$$y'''_{k,x} = a_k^3 Asha_k \cdot x + a_k^3 Bcha_k x + b_k^3 C \sin b_k x - b_k^3 D \cos b_k x; \quad (15)$$

Інтеграл (12) з часткових розв'язків, що задовольняють одиничну матрицю

$$\left. \begin{aligned} Y_{1k}(0) = 1; & \quad Y'_{1k}(0) = 0; & \quad Y''_{1k}(0) = 0; & \quad Y'''_{1k}(0) = 0; \\ Y_{2k}(0) = 1; & \quad Y'_{2k}(0) = 0; & \quad Y''_{2k}(0) = 0; & \quad Y'''_{2k}(0) = 0; \\ Y_{3k}(0) = 1; & \quad Y'_{3k}(0) = 0; & \quad Y''_{3k}(0) = 0; & \quad Y'''_{3k}(0) = 0; \\ Y_{4k}(0) = 1; & \quad Y'_{4k}(0) = 0; & \quad Y''_{4k}(0) = 0; & \quad Y'''_{4k}(0) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Після знаходження часткових розв'язків $Y_{ik}(x)$ і похідних $Y'_{ik}(x)$, $Y''_{ik}(x)$, $Y'''_{ik}(x)$ та відповідних математичних операцій [12]

$$y_{\kappa}(x) = y_{\kappa}(0)Y_{1\kappa}(x) + Y'_{\kappa}(0)Y_{2\kappa}(x) - \frac{M_{\kappa}(0)}{EI}Y_{3\kappa}(x) - \frac{Q_{\kappa}(0)}{GI}Y_{4\kappa}(x); \quad (17)$$

$$y'_{\kappa}(x) = y_{\kappa}(0)Y'_{1\kappa}(x) + Y'_{\kappa}(0)Y_{2\kappa}(x) - \frac{M_{\kappa}(0)}{EI}Y'_{3\kappa}(x) - \frac{Q_{\kappa}(0)}{GI}Y_{4\kappa}(x); \quad (18)$$

$$M_{\kappa}(x) = -EI_{y_{\kappa}}(0)Y''_{1\kappa}(x) - EI_{y'_{\kappa}}(0)Y''_{2\kappa}(x) + M_{\kappa}(0)Y''_{3\kappa}(x) + Q_{\kappa}(0)Y''_{4\kappa}(x); \quad (19)$$

$$Q_{\kappa}(x) = -EI_{y_{\kappa}}(0)Y'''_{1\kappa}(x) - EI_{y'_{\kappa}}(0)Y'''_{2\kappa}(x) + M_{\kappa}(0)Y'''_{3\kappa}(x) + Q_{\kappa}(0)Y'''_{4\kappa}(x). \quad (20)$$

Розрахунок стиснуто-зігнутих стрижів можна виконувати методом пружних вантажів [15].

У такому разі зусилля попереднього напруження N_{ps} прикладемо вздовж лінії дії стискуючої сили N (зовнішнього навантаження). Крім стиснутої сили, на стрижень діє поперечне навантаження інтенсивного q зусилля. На стрижень поперечне напруження розраховується згідно з [7] так, щоб максимально розвантажити посилюваний стрижень.

Тоді вектор згинаючих моментів:

$$\vec{M} + \frac{ql^2}{8} + (\vec{N} - \vec{N}_{ps})y,$$

де l – довжина стрижня; y – прогин стрижня на віддалі x від нижньої (шарнірної опори).

За допомогою вектора пружних вантажів [15] $\vec{W} = B_w \cdot \vec{M}$ знаходять вектор прогинів

$$\vec{y} = L_m W B_w \left(\frac{ql^2}{8} - N_{ps} \right) y = L_m B_w \left(\frac{ql^2}{8} - N_{ps} \right) y + (N - N_{ps}) L_m B_w \vec{y} L_m B_w$$

де L_m – матриця моментів; B_w – матриця пружних вантажів.

Позначимо перший доданок цього виразу через \vec{y}_0 .

Тоді

$$y = \vec{y}_0 + (N - N_{ps}) C \vec{y}, \quad (a)$$

де $C = L_m B_w$.

У разі відсутності поперечного навантаження

$$\left(\vec{y}_0 = 0 \right) \quad y = (N - N_{ps}) C \vec{y}. \quad (b)$$

Звідси

$$|C = \lambda E| = 0, \quad (г)$$

$$\text{де } C = \lambda_{\max} \cdot \bar{C} \quad \lambda + \frac{1}{N - N_{ps}}, \quad (д)$$

E – матрична матриця; λ_{\max} – максимальне характеристичне число матриці C .

Згідно з (г)

$$\lambda_{\max} = \frac{1}{N_{kp}}, \quad (е)$$

де N_{kp} – критична (ейлерова) сила стрижня. При шарнірному опираючому обох кінців $N_{kp} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$, де

EI – жорсткість стрижня на згин.

Підставивши (е) в (д), а потім отримане значення матриці C в (а), одержимо

$$\vec{y} = \vec{y}_0 + \frac{N - N_{ps}}{N_{kp}} \bar{C} \cdot \vec{y},$$

$$\bar{y} = \left(E - \frac{N - N_{ps}}{N_{kp}} \bar{C} \right)^{-1} \bar{y}.$$

Тоді прогин посередині довжини стрижня ($\bar{C} = 1$)

$$y = \frac{y_0}{1 - \frac{N - N_{ps}}{N_{kp}}}.$$

Висновки

1. Вплив попереднього напруження (розтягу), яке створено в результаті підсилення виражається в кінцевому результаті у збільшенні частоти коливань підсиленого стрижня та у зменшенні величини переміщень його перерізів (амплітуд коливань).

2. Стискуюче осьове зусилля діє навпаки – зменшує частоту підсиленого стрижня та збільшує амплітуду коливань.

3. При збільшенні осьового стискуючого зусилля від зовнішнього навантаження, що діє на стрижень (з урахуванням знищуючої дії попереднього напруження) при досягненні критичної сили частота його коливань дорівнюватиме нулю.

1. Баженов В.А. Будівельна механіка / В.А. Баженов, С.Я. Гранат, О.В. Шишов // Комп'ютерний курс: підручник. – К., 1999. – 584 с.
2. Безухов Н.И. Устойчивость и динамика сооружений / Н.И. Безухов, О.В. Лужин, Н.В. Колкунов. – М.: Высшая школа, 1987. – 264 с.
3. Більський М.Р., Кінаш Р.І. Робота сталевих конструкцій надшахтного копра, підсилені із застосуванням електрозварювання / М.Р. Більський, Р.І. Кінаш // Вісник Донбаської національної академії будівництва і архітектури. – Макіївка, 2009. – Вип. 4 (78). – С. 122–127.
4. Більський М.Р. Визначення частот і форм власних коливань сталевих конструкцій, посилені під навантаженням / М.Р. Більський // Вісник Нац. ун-ту “Львівська політехніка”. – Львів, 2007. – № 600. – С. 10–15.
5. Більський М.Р. Стійкість гнучкого сталевих стрижня, посиленого збільшенням перетину і двома пружними підкріпленнями / М.Р. Більський // Вісник Нац. ун-ту “Львівська політехніка”. – Львів, 2007. – № 602. – С. 3–6.
6. Більський М.Р. Робота металевих стрижневих конструкцій, підсилені з регулюванням напружень / М.Р. Більський // Вісник Нац. ун-ту “Львівська політехніка”. – Львів, 2009. – № 655. – С. 9–13.
7. Бондарь Н.Г. Устойчивость и колебания упругих систем в современной технике / Н.Г. Устойчивость и колебания упругих систем в современной технике / Н.Г. Бондарь. – К.: Вища школа, 1987. – 200 с.
8. Бельский М.Р. Усиление сжатых стержней стальных конструкций под эксплуатационной нагрузкой / М.Р. Бельский. – М.: Стройиздат, 1984. – 152 с.
9. Бутенко Б.И. Строительная механика / Ю.И. Бутенко, Н.А. Засядько, С.Н. Кан, Ю.П. Китов, В.П. Пустовойтов, С.П. Фесик. – К.: Виц. шк., 1989. – 479 с.
10. Гнідець Б.Г. Підсилення залізобетонних конструкцій зі зміною статичної схеми і регулювання зусиль / Б.Г. Гнідець // Вісник Нац. ун-ту “Львівська політехніка”. – Львів, 2004. – № 520. – С. 36–42.
11. Гуляев В.И. Прикладные задачи теории нелинейных колебаний механических систем / В.И. Гуляев, В.А. Бажено, С.Л. Попов. – М.: Высш. шк., 1989. – 383 с.
12. Киселев В.А. Динамика и устойчивость сооружений // Строительная механика / В.А. Киселев. – М.: Стройиздат, 1980. – 616 с.
13. Клаф Р. Динамика сооружений / Р. Клаф, Дж. Пензиен. – М.: Стройиздат, 1979. – 320 с.
14. Попов Н.Н. Расчет конструкций специальных сооружений / Н.Н. Попов, Б.С. Расторгуев. – М.: Стройиздат, 1990. – 208 с.
15. Смирнов А.Ф. Строительная механика. Динамика и устойчивость сооружений / А. Ф. Смирнов, А.В. Александров, Б.Я. Лащенков, Н.Н. Шапошников. – М.: Стройиздат, 1984. – 416 с.
16. Снитко Н.К. Строительная механика / Н.К. Снитко. – М.: Высш. шк., 1980. – 431 с.
17. Снитко Н.К. Устойчивость стержневых систем в упруго-пластической области / Н.К. Снитко. – Л.: Стройиздат, 1968. – 248 с.
18. Филин А.П. Прикладная механика твердого деформируемого тела. Т.111. Динамика и устойчивость / А.П. Филин. – М.: Наука, 1981. – 480 с.