УДК 624.131.519

Г.Г. Бігун, Т.-Н. М. Ванькович
Національний університет "Львівська політехніка",
кафедра автомобільних шляхів

КОЛИВАННЯ В ОДНІЙ ІСТОТНО НЕЛІНІЙНІЙ СТОХАСТИЧНІЙ СИСТЕМІ

Наведено результати досліджень випадкових коливань в істотно нелінійних системах, що дає змогу ефективно досліджувати реакцію механічної системи на випадкову вібрацію.

Ключові слова: вібрація, коливання, інерційні навантаження, диференціальне рівняння.

The results of studies of random fluctuations in an essentially nonlinear systems to effectively investigate the response of mechanical system random vibrations.

Keywords: vibration, oscillation, inertia loads, differential equation.

Постановка проблеми. Розвиток нової техніки вимагає глибшого аналізу причин, які викликають вібрації. Доведено, що класичні періодичні збурення не є основними, а методи класичної механіки, що ґрунтуються на понятті детермінізму, недостатні для розуміння і пояснення фізичних ефектів, які виникають, наприклад, при старті ракет з випадковими ексцентриситетами тяги, від впливу на конструкцію профілю дороги чи аеродромного покриття, від дії випадкового вітрового навантаження тощо. Виникла необхідність створити нову фізичну модель при дослідженні цих динамічних процесів і, зокрема, створити і вдосконалити математичний апарат, який давав би змогу найточніше описати і врахувати зовнішні випадкові збурення. Таким математичним апаратом є теорія випадкових процесів.

Мета роботи. По суті, всі задачі механіки, фізики і техніки в строгій математичній постановці описуються нелінійними диференціальними рівняннями. Лінеаризація геометричних і фізичних величин у цих задачах може призвести до істотних помилок не лише кількісного, але і принципово якісного характеру. Тому актуальними є питання розроблення нових і вдосконалення відомих методів дослідження коливних процесів у системах з істотною нелінійністю, що описуються нелінійними стохастичними диференціальними рівняннями. Такі задачі набувають щораз більшого значення на практиці, але зв'язані зі значними математичними труднощами при їх розв'язанні.

Результати досліджень. Автори пропонують математичний метод дослідження випадкових коливань в істотно нелінійних системах, який ґрунтується на послідовному застосуванні теорії спеціальних Ateb-функцій, асимптотичного методу нелінійної механіки та теорії марківських процесів. Цей метод дає можливість ефективно дослідити реакцію механічної системи на випадкову вібрацію (наприклад, розглянути вібраційні процеси фундаменту, підведеного під двигун; розрахувати інерційні навантаження, які передаються на полотно дороги від рухомого транспорту; визначити оптимальні значення параметрів амортизаційних вузлів конструкції для зниження динамічних перенавантажень тощо).

Запропонований метод проілюструємо на прикладі дослідження коливного процесу системи, що перебуває під дією стаціонарного гауссового "білого шуму" й описується стохастичними неавтономними диференціальними рівняннями вигляду:

$$\dot{x}+\omega_1 y^{\nu_1}=\varepsilon f_1(pt,x,y)+\sqrt{\varepsilon} f_2(pt,x,y)\xi(t), \tag{1}$$

$$\dot{y}+\omega_1 x^{\nu_2}=\varepsilon q_1(pt,x,y)+\sqrt{\varepsilon} q_2(pt,x,y)\xi(t)$$

де ε – малий параметр; $\omega_1\omega_2$ – деякі сталі додатні величин $f_i q_i$, $(i=1,2)$ – нелінійні функції, що задовольняють всі необхідні умови існування та єдності системи (1), періодичні відносно pt з періодом 2π і можуть бути подані у вигляді рядів:

$$f_i(pt,x,y) = \sum_{n=-N}^{N} e^{inpt} f_{in}(x,y),$$

$$q_i(pt,x,y) = \sum_{n=-N}^{N} e^{inpt} q_{in}(x,y) \qquad (2)$$

де $f_{in}(x,y), q_{in}(x,y)$ – деякі функції x, y;

$$\upsilon_i = \left(2\upsilon_1^{(1)}+1\right)\cdot\left(2\upsilon_i^{(2)}+1\right)^{-1}, \left(\upsilon_i^{(j)}=0,1,2,...\right)(i,j=1,2);$$

$\xi(t)$ – процес “білого шуму”.

Під розв'язком системи (1) розумітимемо розв'язок системи інтегральних рівнянь:

$$x(t) = x_0 + \int_0^t \left[-\omega_1 y^{v_1}(\tau) + \varepsilon\cdot f_1(p\tau, x(\tau), y(\tau))\right] d\tau + \int_0^t \sqrt{\varepsilon} f_2(p\tau, x(\tau), y(\tau)) d\xi(\tau) \qquad (3)$$

$$y(t) = y_0 + \int_0^t \left[-\omega_2 y^{v_2}(\tau) + \varepsilon\cdot q_1(p\tau, x(\tau), y(\tau))\right] d\tau + \int_0^t \sqrt{\varepsilon} q_2(p\tau, x(\tau), y(\tau)) d\xi(\tau),$$

Перейдемо від системи (1) до системи рівнянь першого порядку відносно амплітуди і фази. Для цього введемо нові змінні

$$x = au(\psi), y = a^{\mu} h\upsilon(\psi), \frac{n!}{r!(n-r)!}, \qquad (4)$$

де $$\mu = \frac{\upsilon_2+1}{\upsilon_1+1}, h\upsilon_2 + 1 = \frac{(\upsilon_1+1)\omega_2}{(\upsilon_2+1)\omega_1}; u(\psi), V(\psi) - 2\pi - \text{періодичні}$$

функції, які задовольняють співвідношення

$$u^{\upsilon_2+1} + u^{\upsilon_1+1} = 1 \qquad (5)$$

Крім того, вважатимемо, що виконується умова

$$V_1 \cdot V_2 = 1 \qquad (6)$$

Як і в детермінованому випадку (***f_2 = q_2*** = 0), розрізнятимемо резонансний і нерезонансний випадки.

Нерезонансним вважаємо випадок, коли частота власних коливань ω (вираз для ω буде знайдено нижче) не лежить поряд з числами ${}_s^r P$, де *r*, *s* – цілі числа.

Резонансний випадок спостерігатиметься тоді, коли ω лежить поблизу одного з чисел $\frac{\omega}{r}$ або відношення $\frac{\omega}{r}$ є раціональним числом.

Нерезонансний випадок

Враховуючи (5), (6) і формулу (1), продиференціюємо (4) і підставимо в (1). Одержимо систему стохастичних диференціальних рівнянь для двовимірного марківського процесу

$$da=\varepsilon\left[\begin{array}{l} u^{v_2}\cdot f_1(pt,a,\psi)+\dfrac{a^{1-v_2}v^{\frac{1}{v_2}}}{v_2h}g_1(pt,a,\psi)+\dfrac{v_2\left(u^{v_2+1}-u^{2v_2}\right)}{2a}f_2{}^2\left(pt,a,\xrightarrow{\psi}\right)- \\ -\dfrac{a^{v_2}u^{v_2}V^{\frac{1}{v_2}}}{h}f_2(pt,a,\psi)q_2(pt,a,\psi)+\dfrac{a^{1-v}-2^{v_2^2}\left(V^{\frac{1-v_2}{v_2}}-v_2V_{v_2}^2\right)}{2v_2^2h^2}\cdot q_2^2(pt,a,\psi)\end{array}\right]dt+\sqrt{\varepsilon}\left(u^{v_2}f_2\right)(pt,a,\psi)+ \tag{7}$$

$$+\frac{a^{1-v_2}V_{v_2}^1}{v_2h}q_2(pt,a,\psi)d\xi$$

$$d\psi=\left\{\frac{\omega_2(l_2+1)}{2lhv_2}+\varepsilon\left[\begin{array}{l}\dfrac{(v_2+1)u}{2v_2lhav^2}q_1(pt,a,\psi)-\dfrac{(v_2+1)V}{2la}f_1(pt,a,\psi)+\dfrac{(v_2+1)^2u^{v_2}V}{4la^2}f_2^2(pt,a,\psi)+ \\ +\dfrac{\left[(v_2+1)V^{\frac{v_2+1}{v_2}}-v_2\right]}{2v_2lha^{v_2+1}}f_2(pt,a,\psi)\cdot q_2(pt,a,\psi)-\dfrac{(v_2+1)^2UV^{\frac{1}{v_2}}}{4v_2^2lh^2a^{2v_2}}g_2^2(pt,a,\psi)\end{array}\right]\right\}dt+$$

$$+\sqrt{\varepsilon}\left[\frac{(v_2+1)U}{2lhv_2a^{v_2}}q_2(pt,a,\psi)-\frac{(v_2+1)v}{2la}f_2(pt,a,\psi)\right]d\xi$$

де

$$l=\frac{v_2+1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\left(1-u^{-v_2+1}\right)^{\frac{-1}{v_2+1}}\overline{du}\,.$$

Якщо в (7) зробити заміну $\varphi=\psi-\dfrac{\omega_2(v_2+1)t}{2lhv_2}$ змінних a і φ, одержимо систему стохастичних диференціальних рівнянь у стандартній формі, якій ставиться у відповідність таке рівняння Колмогорова–Фокера–Планка (КПФ):

$$\frac{dW}{dt}+\frac{d}{da}\left[K_aW\right]+\frac{d}{d\varphi}\left[K_\varphi W\right]=\frac{1}{2}\left\{\frac{d^2}{da^2}\left[D_aW\right]+2\frac{d^2}{dad\varphi}\left[D_{a\varphi}W\right]+\frac{d^2}{d\varphi^2}\left[D_\varphi W\right]\right\} \tag{8}$$

де $W=W\left(a,\varphi,t/a_0,\varphi_0,t_0\right)$ – густина сумісного розподілу а і φ;

$$K_a=\varepsilon\left\{\begin{array}{l}u^{v_2}f_1(pt,a,\varphi)+\dfrac{a^{1-v_2}v^{\frac{1}{v_2}}}{h}q_1(pt,a,\varphi)+\dfrac{v_2}{2a}\left(u^{v_2-1}-u^{2v_2}\right)\cdot f_2^2(pt,a,\varphi)-\dfrac{a^{v_2}u^{v_2}v^{\frac{1}{v_2}}}{h}f_2(pt,a,\varphi) \\ q_2(pt,a,\varphi)-\dfrac{a^{\frac{1-v_2-2v_2^2}{1+v_2}}\left(V^{\frac{1-v_2}{v_2}}-V_2V^{\frac{2}{v_2}}\right)}{2V_2^2h^2}q_2^2(pt,a,\varphi)\end{array}\right\};$$

$$K_\varphi=\frac{(v_2+1)u}{2lv_2ha^{v_2}}q_1(pt,a,\varphi)-\frac{(v_2+1)v}{2la}f_1(pt,a,\varphi)+\frac{(v_2+1)^2u^{v_2}v}{4la^2}f_2^2(pt,a,\varphi)+$$

$$+\frac{(v_2+1)\left[(v_2+1)v^{\frac{v_2+1}{v_2}}\right]}{2v_2lha^{v_2+1}}f_2(pt,a,\varphi)q_2(pt,a,\varphi)-\frac{(V_2+1)^2uv^{\frac{1}{v_2}}}{4la^{2v_2}v_2^2h^2}q_2^2(pt,a,\varphi)$$

$$D_a=u^{2v_2}f_2^2(pt,a,\varphi)+\frac{2a^{1-v_2}u^{v_2}v^{\frac{1}{v_2}}}{v_2h}f_2(pt,a,\varphi)q_2(pt,a,\varphi)+\frac{a^{2-2v_2}v^{\frac{2}{v_2}}}{v_2^2h}q_2^2(pt,a,\varphi) \tag{9}$$

$$D_{a\varphi}=\left(u^{v_2}f_2(pt,a,\varphi)+\frac{a^{1-v_2}v^{\frac{1}{v^2}}}{v_2h}q_2(pt,a,\varphi)\right)\left(\frac{(v_2+1)u}{2lhv_2a^{v_2}}q_2(pt,a,\varphi)\right)-\frac{(v_2+1)v}{2la}f_2(pt,a,\varphi);$$

$$D_{\varphi}=\frac{(v_2+1)^2U^2}{4l^2h^2v_2^2a^{2v_2}}q_2^2(pt,a,\varphi)-\frac{(v_2+1)^2UV}{2l^2hv_2a^{v_2+1}}f_2(pt,a,\varphi)q_2(pt,a,\varphi)+\frac{(v_2+1)^2V^2}{4l^2a^2}f_2^2(pt,a,\varphi).$$

Розв'язок рівняння КФП (8), тобто функція густини розподілу W, повинен задовольняти всі необхідні умови позитивності, спадання та нескінченності, нормування до одиниці та початкову умову, наприклад, $W(a,\varphi,t,a_0,\varphi_0,t_0)=\delta(a-a_0,\varphi-\varphi_0)$.

Рівняння (7), (8) є точними і в загальному випадку достатньо складними. Застосування методу усереднення дає змогу значно спростити як систему (7), так і рівняння (8). Тут можливі два підходи: 1) виконати усереднення виведеного для системи (7) рівняння КФП (8); 2) виконати усереднення системи (7) і вже для усередненої системи записати рівняння КПФ.

Зупинимося тут на першому підході, як простішому в цьому випадку. Другий підхід, а саме усереднення системи (7), випливає як частковий випадок з методу усереднення стохастичних систем з швидкозмінною фазою [l].

Застосування методу усереднення для параболічних рівнянь [2] дає змогу розв'язок рівняння (8) з коефіцієнтами (9) рівномірно наблизити на достатньо великому скінченному інтервалі часу розв'язком усередненого рівняння

$$\frac{dW_0}{dt}+\frac{d}{da}\left[\overline{K_a}W_0\right]+\frac{d}{d\varphi}\left[\overline{K\varphi W_0}\right]=\frac{1}{2}\left\{\frac{d^2}{da^2}\left[\overline{D_a}W_0\right]+2\frac{d^2}{dad\varphi}\left[\overline{D_{a\varphi}}W_0\right]+\frac{d^2}{d\varphi^2}\left[\overline{D_{\varphi}}W_0\right]\right\},\tag{10}$$

де

$$\overline{K_a}(a)=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}K_a d\theta d\psi,\ \overline{K_{\varphi}}(a)=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}K_{\varphi}d\theta d\psi,$$

$$\overline{D_a}(a)=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}D_a d\theta d\psi,\ \overline{D_{a\varphi}}(a)=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}D_{\varphi}d\theta d\psi,\tag{11}$$

$$\overline{D_{\varphi}}(a)=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}D_{\varphi}d\theta d\psi.$$

У формулах (11) введено позначення $pt=0$.

Усереднене рівняння (10) в деяких випадках вдається проінтегрувати методом розділення змінних, у всіх інших випадках може бути застосований числовий аналіз.

Резонансний випадок.

Оскільки в резонансному випадку розглядаються значення ω, достатньо близькі до ${}_s^rP$, вважатимемо

$$\omega=\frac{r}{s}p+\varepsilon\Delta,\tag{12}$$

де $\varepsilon\Delta$ є різницею між власними і зовнішніми частотами. Тоді вихідна система (1) з урахуванням умови (6) запишеться у вигляді

$$\dot{x}+\frac{\left({}_s^rP\right)2l}{(v_2+1)h^{\frac{1}{v_2}}}=\varepsilon\left[\frac{\Delta 2l}{(v_2+1)h^{\frac{1}{v_2}}}+f_1(pt,x,y)\right]+\sqrt{\varepsilon}f_2(pt,x,y)\xi(t);\tag{13}$$

$$\dot{y}+\frac{\left({}_s^rP\right)2l}{(v_2+1)h^{\frac{1}{v_2}}}y^{v_2}=\varepsilon\left[\frac{\Delta 2lhv_2}{(v_2+1)}+q_1(pt,x,y)\right]+\sqrt{\varepsilon}q_2(pt,x,y)\xi(t).$$

Виконавши в системі (13) заміну змінних за формулами (4), одержимо відносно нових змінних ***a і*** φ систему стохастичних диференціальних рівнянь першого порядку. Коефіцієнти усередненого рівняння КФП, побудованого для системи (13), в цьому випадку залежать не лише від змінної ***a***, але і від змінної φ, що значно ускладнює розв'язання рівняння (10). Для його розв'язування слід застосувати числові методи.

Приклад. Дослідимо коливний процес, який описується системою неавтономних стохастичних диференціальних рівнянь вигляду

$$\dot{x} + y^{\frac{1}{3}} = 0;$$
$$\dot{y} + x^3 = \varepsilon\left[1 - (x + E\sin pt)^2 y\right] + \sqrt{\varepsilon}\sigma x^2 \xi(t), \tag{14}$$

де E, σ – деякі сталі, що характеризують інтенсивність періодичного і випадкового збурень.

Розглянемо нерезонансний випадок, тобто вважатимемо, що частота власних коливань системи не лежить поряд з числами $\frac{r}{s}P$ (r, s – цілі числа).

$$da = \varepsilon\left(\frac{av^{\frac{4}{3}}}{3} - \frac{a^3u^2v^{\frac{4}{3}}}{3} - \frac{2Ea^{2uv^{\frac{3}{4}}}\sin pt}{3} + \frac{E^2av^{\frac{4}{3}}\sin^2 pt}{3} + \frac{\sigma^2u^4v^{\frac{-2}{3}}}{18h^2a} - \frac{\sigma^2u^4v^{\frac{2}{3}}}{6h^2a}\right)dt + \sqrt{\varepsilon}\frac{\sigma u^2v^{\frac{1}{3}}}{3h}d\xi.$$

Відповідно до вищесказаного робимо в системі (14) заміну змінних за формулами (4) і для нових змінних ***a і*** φ одержуємо систему стохастичних диференціальних рівнянь у стандартній формі

$$d\varphi = \varepsilon\left(\frac{2uv}{3l} - \frac{2a^2u^3v}{3l} - \frac{4Eau^2v\sin pt}{3l} + \frac{2E^2uv\sin^2 pt}{3l} - \frac{4\sigma^2u^5v^{\frac{1}{3}}}{9lh^2a^2}\right)dt + \sqrt{\varepsilon}\frac{2\sigma u^3}{3lha}d\xi. \tag{15}$$

Усереднене рівняння КФП для стаціонарної густини розподілу амплітуди коливного процесу системи (15) набуде вигляду

$$\frac{d}{dt}\left[\left(0{,}25a - 0{,}07a^3 + 0{,}125E^2a + \frac{\sigma^2 \cdot 0{,}01}{a}\right)W_{0c}(a)\right] = 0{,}005\sigma^2\frac{d^2W_{0c}(a)}{aa^2}. \tag{16}$$

Враховуючи граничні умови $W_{0c}(a) \to 0, \frac{dW_{oc}}{da} \to 0$, при $a \to 0$ одержимо розв'язок рівняння (16):

$$W_{0c}(a) = c \cdot a^2 \cdot \exp\left[-\frac{3{,}5a^4}{\sigma^2} + \frac{25a^2}{\sigma^2}(1-2E)^2\right], \tag{17}$$

де *C* – стала нормування функції $W_{0c}(a)$.

Функція (17) має єдиний максимум у точці

$$a = \sqrt{1{,}8\left(1-2E^2\right) + \sqrt{2{,}89\left(1-2E^2\right)^2 + 0{,}14\sigma^2}}\ .$$

Висновок. Отже, в системі, яка описується системою стохастичних диференціальних рівнянь (14), здійснюються випадкові стійкі коливання з амплітудою (18).

1. Коломиец В.Г., Цикайло Т.-Н.М. Асимптотические методы и периодические Ateb-функции в некоторых нелинейных задачах теории случайных колебаний. – К., 1987. – 64 с. (Препринт АН УССР. Ин-т математики). 2. Хасьминский Р.З. О принципе усреднения для параболических и эллиптических диффереціальных уравнений и марковских процессов с малой диффузией // Теория вероятностей и ее применения. – 1963. – 8. Вып. 1. – С. 3–25.