УДК 621.317

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ЕКВІВАЛЕНТНОЇ ДІЕЛЕКТРИЧНОЇ ПРОНИКНОСТІ НЕОДНОРІДНОГО СИПКОГО СЕРЕДОВИЩА З УЩІЛЬНЕНОЮ СТРУКТУРОЮ КУЛЬОВИХ ВКЛЮЧЕНЬ

© Роман Івах, 2010

Національний університет “Львівська політехніка”, кафедра інформаційно-вимірювальних технологій
вул. С. Бандери, 28а, 79013, Львів, Україна

Запропоновано аналітичний спосіб визначення еквівалентної діелектричної проникності неоднорідного сипкого середовища з ущільненою структурою кульових включень.

Предложен аналитический способ определения эквивалентной диэлектрической проницаемости неоднородной сыпучей среды с плотной структурой шарообразных включений.

The analytical method of determination of equivalent inductivity of heterogeneous friable environment is offered with the structure of including of bullets.

Ця робота є продовженням статті [1].

Вступ. Вимірювання діелектричної проникності (ДП) здійснюють під час різноманітних технологічних процесів у хімічній, нафтопереробній, харчовій та інших галузях промисловості, де необхідно контролювати безліч неелектричних величин, таких як температура, тиск, вологість тощо. Так, для прикладу, вимірювання діелектричної проникності застосовують під час визначення вологості сипкого матеріалу (СМ). У такому випадку на результат вимірювання ДП сипкого матеріалу впливає неоднорідність досліджуваного об’єкта у міжелектродному просторі ємнісного первинного перетворювача (ЄПП), яка може бути спричинена тим, що у міжелектродному просторі, крім власне досліджуваного сипкого матеріалу, обов’язково є повітря або інше середовище, також можливим є включення іншої природи.

Спроби усунути цю неоднорідність виконують двома способами:

— подрібненням проби сипкого матеріалу;

— примусовим ущільненням сипкого матеріалу у ВК.

Перший спосіб має істотний недолік, що обмежує його використання. Подрібнення гранульованих сипких матеріалів у ЄПП можливо за допомогою, наприклад, млина, однак в процесі розмелу підвищується температура середовища, яке подрібнюється, що може спричинити зміни його властивостей, зокрема, неконтрольовані втрати вологості, тобто зміну діелектричної проникності СМ. Крім цього, подрібнення СМ – це тривалий процес, і для подрібнення необхідне додаткове устаткування, що ускладнює конструкцію первинного перетворювача.

Примусове ущільнення забезпечує зменшення впливу стану поверхні окремих зерен (наприклад, від її шорсткості, запиленості) і гранулометричного складу СМ на результат вимірювання діелектричної проникності СМ та постійного контактного опору між окремими частками матеріалу та електродами.

Однак ущільнення вологого СМ має також низку недоліків, пов’язаних, зокрема, зі зміною провідності середовища [2]. Для зменшення впливу коливань ступеня ущільнення на результати вимірювання необхідно докладати доволі значні зусилля, які деформують досліджуваний зразок, а в деяких випадках частково його руйнують, тоді замість матеріалу у природному його стані об’єктом вимірювання стає штучно спресований брикет із цього матеріалу з іншою діелектричною проникністю. Деформація або руйнування зразка досліджуваного матеріалу унеможливлюють повторне вимірювання, що є експлуатаційним недоліком.

Під час пресування зразків із високою вологістю можливе часткове відтискання вологи з її виділенням на електродах, що призводить до зміни еквівалентної діелектричної проникності.

Аналізуючи вищесказане, необхідно зазначити, що однією із основних складових похибки вимірювання діелектричної проникності сипкого середовища є похибка, зумовлена неоднорідною структурою діелектричної никності досліджуваного середовища. Тому для підвищення точності вимірювання діелектричної проникності сипких матеріалів необхідно встановити залежність еквівалентної діелектричної проникності від можливих складових досліджуваного середовища.

Метою роботи є розроблення математичної моделі еквівалентної діелектричної проникності неоднорідного сипкого середовища з ущільненою структурою кульових включень, яка, з урахуванням параметрів зовнішньої оболонки та внутрішнього ядра гранули сипкого матеріалу, дає змогу враховувати вплив неінформативних параметрів на результат вимірювання.

Методика досліджень. Під час досліджень використовуватимемо припущення та позначення, описані в [1]. Для визначення еквівалентної діелектричної проникності застосуємо метод еквівалентних ємностей складових досліджуваного неоднорідного середовища, який ґрунтується на визначенні еквівалентної ємності кожного середовища, на підставі енергії електричного поля, яка накопичується у кожному з цих середовищ [3]. Причому кожне з тих середовищ спирається на заряди, що відповідають зарядам протилежних сторін куба $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$ (див. рис. 1).

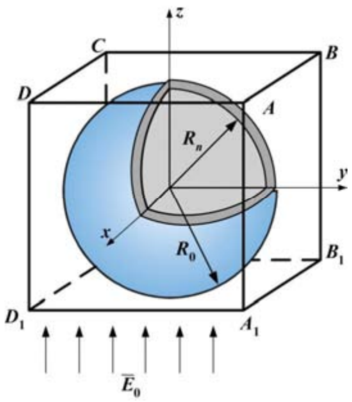

Рис. 1. Елементарна комірка із гранулою у вигляді двошарової кулі

Тоді

$$C_{\text{в}} = \frac{Q^2}{2 \cdot W_{\text{в}}};\ C_з = \frac{Q^2}{2 \cdot W_з};\ C_{\text{с}} = \frac{Q^2}{2 \cdot W_{\text{с}}}, \tag{1}$$

де $C_{\text{в}}$, $C_з$, $C_{\text{с}}$ – еквівалентні ємності внутрішнього ядра, зовнішньої оболонки та середовища відповідно; $W_{\text{в}}$, $W_з$, $W_{\text{с}}$ – енергії електричного поля, які запасаються у внутрішньому ядрі, зовнішній оболонці та середовищі відповідно.

Отже, насамперед доцільно визначити енергію електричного поля кожної складової неоднорідного середовища.

Визначення енергії електричного поля кожної складової неоднорідного середовища. Енергія електричного поля, яка запасається в елементарному кубі, дорівнює:

$$W_0 = C_0 \frac{U^2}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \varepsilon_0 \varepsilon_{\text{с}} R_0 \frac{(\sqrt{3} R_0{}^3 + \alpha_1)}{(R_0{}^3 - 0,5236\alpha_1)} U^2. \tag{2}$$

Пояснення щодо позначень, які використовуються у виразах цієї статті, наведені у [1].

Враховуючи вираз (8), поданий у [1], у внутрішньому ядрі діелектричної кулі поле рівномірно спрямоване вздовж осі z (тут враховано, що $R\cos\theta = z$) і дорівнює:

$$E_{\text{в}} = E_{вz} = -\frac{\partial \varphi_{\text{в}}}{\partial z} = \frac{9\varepsilon_з \varepsilon_{\text{с}}}{(2\varepsilon_з + \varepsilon_{\text{в}})(2\varepsilon_{\text{с}} + \varepsilon_з)} E_0. \tag{3}$$

Тоді енергія, яка запасається у внутрішньому ядрі діелектричної кулі, дорівнює:

$$\begin{aligned} W_{\text{в}} &= \int_{V_{\text{в}}} \frac{1}{2} \varepsilon_{\text{в}} \varepsilon_0 E_{\text{в}}^2 dV = \frac{1}{2} \varepsilon_{\text{в}} \varepsilon_0 E_{\text{в}}^2 \cdot \frac{4}{3} \pi R_n^3 = \\ &= \frac{2}{3} \pi \varepsilon_{\text{в}} \varepsilon_0 \frac{81 \varepsilon_з^2 \varepsilon_{\text{с}}^2 R_n^3}{(2\varepsilon_з + \varepsilon_{\text{в}})^2 (2\varepsilon_{\text{с}} + \varepsilon_з)^2} E_0^2 = \\ &= \frac{54\pi \varepsilon_0 \varepsilon_{\text{в}} \varepsilon_з^2 \varepsilon_{\text{с}}^2 E_0^2}{(2\varepsilon_з + \varepsilon_{\text{в}})^2 (2\varepsilon_{\text{с}} + \varepsilon_з)^2} R_n^3. \end{aligned} \tag{4}$$

Визначимо енергію електричного поля, яка запасається в оболонці діелектричної кулі.

$$W_з = \frac{6\varepsilon_{\text{с}}^2 \varepsilon_з \varepsilon_0}{\left(2\varepsilon_{\text{с}} + \varepsilon_з\right)^2} E_0^2 \left(R_0^3 - R_n^3\right) \left[1 + \frac{\left(\varepsilon_з - \varepsilon_{\text{в}}\right)^2 R_n^3}{\left(2\varepsilon_з + \varepsilon_{\text{в}}\right)^2 R_0^3}\right]. \tag{5}$$

З метою полегшення аналізу введемо такі відносні величини:

$$\beta = \frac{R_0}{R_n};\quad \delta = \frac{\varepsilon_з}{\varepsilon_в};\quad \lambda = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_в}. \tag{6}$$

Тоді

$$U = 2E_0 R_0 \frac{\beta^3 (2\delta + 1)(2,5236\lambda + 0,4764\delta) + 1,5708\lambda(\delta - 1)}{(2\lambda + \delta)(2\delta + 1)\beta^3}; \tag{7}$$

$$C_0 = \frac{2}{\sqrt{3}} \varepsilon_c \varepsilon_0 R_0 \frac{\beta^3 (2\delta + 1)(2,4641\lambda + 2,7320\delta) - 3\lambda(\delta - 1)}{\beta^3 (2\delta + 1)(2,5236\lambda + 0,4764\delta) + 1,5708\lambda(\delta - 1)}; \tag{8}$$

$$\begin{aligned} W_0 = \frac{4}{\sqrt{3}} \varepsilon_{\text{с}} \varepsilon_0 R_0^3 E_0^2 \frac{\left[\beta^3 (2\delta + 1)(2,4641\lambda + 2,7320\delta) - 3\lambda(\delta - 1)\right]}{(2\lambda + \delta)^2 (2\delta + 1)^2 \beta^6} \times \\ \times \left[\beta^3 (2\delta + 1)(2,5236\lambda + 0,4764\delta) + 1,5708\lambda(\delta - 1)\right] + 1,5708\lambda(\delta - 1); \end{aligned} \tag{9}$$

$$W_{\text{в}} = 54\pi \varepsilon_{\text{в}} \varepsilon_0 R_0^3 E_0^2 \frac{\delta^2 \lambda^2}{(2\delta + 1)^2 (2\lambda + \delta)^2 \beta^3}; \tag{10}$$

$$W_з = 6\pi \varepsilon_з \varepsilon_0 R_0^3 E_0^2 \frac{\lambda^2 (\beta^3 - 1)\left[(2\delta + 1)^2 \beta^3 + 2(\delta - 1)\right]}{(2\lambda + \delta)^2 (2\delta + 1)^2 \beta^6}. \tag{11}$$

Якщо оболонка діелектричної кулі відсутня, то останні вирази (8) – (11) набудуть такого вигляду:

$$U = 2E_0 R_0 \frac{2,5236\lambda + 0,4764}{2\lambda + 1}; \tag{12}$$

$$C_0 = \frac{2}{\sqrt{3}} \varepsilon_{\text{с}} \varepsilon_0 R_0 \frac{2,4641\lambda + 2,7320}{2,5236\lambda + 0,4764}; \tag{13}$$

$$W_0 = \frac{4}{\sqrt{3}} \varepsilon_{\text{с}} \varepsilon_0 R_0^3 E_0^2 \frac{(2,4641\lambda + 2,7320)(2,5236\lambda + 0,4764)}{(2\lambda + 1)^2}; \tag{14}$$

$$W_{\text{в}} = 6\pi \varepsilon_{\text{з}} \varepsilon_0 R_0^3 E_0^2 \frac{\lambda^2}{(2\lambda + 1)^2}. \tag{15}$$

Заряд, на який спирається ядро діелектричної кулі за наявності оболонки, буде дещо меншим від Q. Але, якщо оболонка є тонкою, то можна прийняти, що ці заряди є однаковими. Оскільки кожне з цих середовищ спирається на один і той самий заряд, то їх можна розглядати як послідовно з'єднані конденсатори.

Тоді

$$C_{\text{екв}} = \frac{1}{\frac{1}{C_в} + \frac{1}{C_з} + \frac{1}{C_с}} = \frac{C_в \cdot C_з \cdot C_с}{C_в \cdot C_з + C_в \cdot C_с + C_з \cdot C_с} = 2 \cdot \varepsilon^*_{\text{екв}} \cdot \varepsilon_0 \cdot R_0 \tag{16}$$

звідси

$$\varepsilon^*_{\text{екв}} = \frac{C_{\text{екв}}}{2 \cdot \varepsilon_0 \cdot R_0}. \tag{17}$$

Якщо ж зовнішня оболонка відсутня, то

$$C_{\text{екв}} = \frac{1}{\frac{1}{C_в} + \frac{1}{C_с}} = \frac{C_в \cdot C_с}{C_в + C_с}. \tag{18}$$

Якщо ж підставити у (16) або (18) відповідні вирази (8) – (13), то еквівалентні діелектричні проникності неоднорідного середовища повністю збігаються з (26) та (27), які наведені в [1], тобто

$$\varepsilon^*_{\text{екв}} = \varepsilon_{\text{с}} \frac{\sqrt{3} R_0^3 + \alpha_1}{\sqrt{3}\left(R_0^3 - 0,5236\alpha_1\right)}, \tag{19}$$

де $\alpha_1 = \left[(\varepsilon_{\text{з}} - \varepsilon_{\text{с}}) \cdot R_0^3 - \frac{3\varepsilon_{\text{с}} \cdot (\varepsilon_{\text{з}} - \varepsilon_{\text{в}}) \cdot R_n^3}{(2\varepsilon_{\text{з}} + \varepsilon_{\text{в}})} \right] \cdot \frac{1}{2\varepsilon_{\text{с}} + \varepsilon_{\text{з}}}$;

$\alpha_1 = \frac{(\varepsilon_{\text{в}} - \varepsilon_{\text{с}}) \cdot R_0^3}{2\varepsilon_{\text{с}} + \varepsilon_{\text{в}}}$ – у разі відсутності зовнішньої оболонки діелектричної кулі

З урахуванням замін (6) еквівалентну діелектричну проникність сипкого неоднорідного середовища можна визначити з виразу:

$$\varepsilon_{\text{екв}} = \frac{\varepsilon_{\text{с}}}{\sqrt{3}} \left[\frac{\beta^3 (2\delta + 1)(2,4641\lambda + 2,7320\delta) - 3\lambda(\delta - 1)}{\beta^3 (2\delta + 1)(2,5236\lambda + 0,4764\delta) + 1,5708\lambda(\delta - 1)} \right], \tag{20}$$

а у разі відсутності зовнішньої оболонки діелектричної кулі:

$$\varepsilon_{\text{екв}} = 3,3109\varepsilon_{\text{с}} \left[\frac{0,9019\lambda + 1}{5,2972\lambda + 1} \right]. \tag{21}$$

Ущільнена структура сипкого неоднорідного середовища. Отримані вирази описують середовище, у якому кожна зернина має вигляд діелектричної кулі, вписаної в елементарний куб і утворюється впорядкована структура, кожен шар якої однаковий. Але насправді кульові частинки утворюють ущільненішу структуру, як показано на рис. 2.

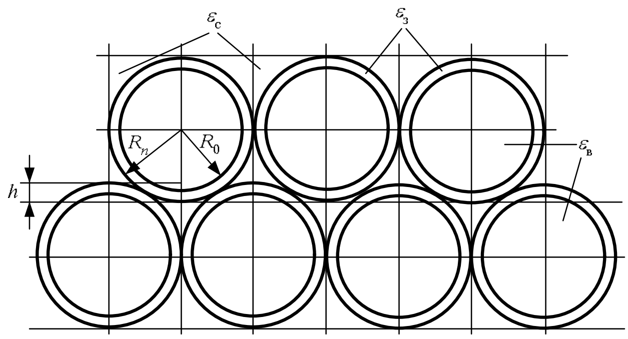

Рис. 2. Ущільнена структура зернин сипкого матеріалу

Тоді у кожній вершині елементарного куба вноситься певна частина кульового сегмента діелектричної кулі, як показано на рис. 2.

При цьому зовнішнє середовище частково заміщається діелектричною кулею.

Висота кульового сегмента, як не важко підрахувати, дорівнює:

$$h = \sqrt{2} R_0 \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right) = 0,5858 R_0. \tag{22}$$

Об'єм четвертини кульового сегмента дорівнює:

$$V_{сег} = \frac{\pi}{12} h^2 \cdot (3R_0 - h) = 0,2169 R_0^3. \tag{23}$$

Причому об'єм діелектрика ядра кулі у цьому сегменті становить:

$$\begin{aligned} V_{\text{сег}}^{(\text{в})} &= \frac{\pi}{12} \left[0,5858 R_0 - R_0 + R_n\right]^2 \cdot \left(3R_n - 0,5858 R_0 + R_0 - R_n\right) = \\ &= \left(0,0186\beta^3 - 0,3253\beta + 0,5236\right) \frac{R_0^3}{\beta^3}. \end{aligned} \tag{24}$$

Об'єм оболонки кулі в четвертинці сегмента кулі дорівнює:

$$V_{\text{сег}}^{(\text{з})} = V_{\text{сег}} - V_{\text{сег}}^{(\text{в})} = \left(0,1983\beta^3 + 0,3253\beta - 0,5236\right) \frac{R_0^3}{\beta^3}. \tag{25}$$

Підрахуємо об'єми кожної складової в елементарному кубі після ущільнення:

а) об'єм середовища після ущільнення:

$$V_{\text{су}} = V_{\text{с}} - 8 \cdot V_{\text{сег}} = 8 \cdot R_0^3 - 4,189 R_0^3 - 8 \cdot V_{\text{сег}} = 2,0758 R_0^3. \quad (26)$$

б) об'єм діелектрика оболонки кулі після ущільнення:

$$V_{\text{зу}} = V_{\text{з}} + 8 \cdot V_{\text{сег}}^{(\text{з})} = \left(5,7754\beta^3 + 2,6024\beta - 8,3778\right)\frac{R_0^3}{\beta^3}. \quad (27)$$

в) об'єм діелектрика ядра кулі після ущільнення:

$$V_{\text{ву}} = V_{\text{в}} + 8 \cdot V_{\text{сег}}^{(\text{в})} = \left(0,1488\beta^3 - 2,6024\beta - 8,3778\right)\frac{R_0^3}{\beta^3}. \quad (28)$$

Якщо оболонка кулі відсутня, то

$$V_{\text{су}} = 2,0758; \quad V_{\text{зу}} = 0; \quad V_{\text{ву}} = 5,9242 R_0^3. \quad (29)$$

Для визначення еквівалентної діелектричної проникності у цьому випадку допустимо, що у разі ущільнення середні об'ємні густини електричної енергії у кожному з середовищ практично не змінюються і тому їх приймемо такими, як і до ущільнення.

Тоді, наприклад, за методом еквівалентних ємностей середовищ.

Визначимо запас електричної енергії у кожному із середовищ.

Тоді

$$C_{\text{ву}} = \frac{Q^2 \cdot V_{\text{в}}}{2 \cdot V_{\text{ву}} \cdot W_{\text{в}}} = \frac{Q^2 \cdot V_{\text{в}}}{2 \cdot V_{\text{ву}} \cdot a_1 W_0};$$

$$C_{\text{зу}} = \frac{Q^2 \cdot V_{\text{з}}}{2 \cdot V_{\text{зу}} \cdot W_{\text{з}}} = \frac{Q^2 \cdot V_{\text{з}}}{2 \cdot V_{\text{зу}} \cdot a_2 W_0}; \quad (30)$$

$$C_{\text{су}} = \frac{Q^2 \cdot V_{\text{с}}}{2 \cdot V_{\text{су}} \cdot W_{\text{с}}} = \frac{Q^2 \cdot V_{\text{с}}}{2 \cdot V_{\text{су}} \cdot \left(1 - a_1 - a_2\right) W_0}.$$

Відповідно

$$\frac{1}{C_{0y}} = \frac{2 \cdot W_0}{Q^2}\left(\frac{a_1 \cdot V_{\text{ву}}}{V_{\text{в}}} + \frac{a_2 \cdot V_{\text{зу}}}{V_{\text{з}}} + \frac{\left(1 - a_1 - a_2\right) \cdot V_{\text{су}}}{V_{\text{с}}}\right), \quad (31)$$

де C_{0y} – еквівалентна ємність куба після ущільнення.

Позначимо $\varpi_{\text{ву}} = \frac{V_{\text{ву}}}{V}; \varpi_{\text{зу}} = \frac{V_{\text{зу}}}{V}; \varpi_{\text{су}} = \frac{V_{\text{су}}}{V}$ – відносний вміст кожної складової в об'ємі елементарного куба після ущільнення.

Отже

$$\frac{1}{C_{0y}} = \frac{1}{C_0}\left(\frac{\varpi_{\text{ву}}}{\varpi_{\text{в}}} a_1 + \frac{\varpi_{\text{зу}}}{\varpi_{\text{з}}} a_2 + \left(1 - a_1 - a_2\right)\frac{\varpi_{\text{су}}}{\varpi_{\text{с}}}\right) = \frac{K_z}{C_0}, \quad (32)$$

де C_0 – еквівалентна ємність куба до ущільнення, а

$$K_z = \frac{\varpi_{\text{ву}}}{\varpi_{\text{в}}} a_1 + \frac{\varpi_{\text{зу}}}{\varpi_{\text{з}}} a_2 + \left(1 - a_1 - a_2\right)\frac{\varpi_{\text{су}}}{\varpi_{\text{с}}}. \quad (33)$$

Якщо ж зовнішня оболонка відсутня, то

$$K_z = \frac{\varpi_{\text{ву}}}{\varpi_{\text{в}}} a_1 + \left(1 - a_1\right)\frac{\varpi_{\text{су}}}{\varpi_{\text{с}}}. \quad (34)$$

Тоді

$$C_{0y} = \frac{C_0}{K_z}. \quad (35)$$

Звідси

$$\varepsilon'_{\text{екв}} = \frac{\varepsilon_{\text{екв}}}{K_z}. \quad (36)$$

На практиці доволі часто використовується обернена задача: за відомою (виміряною) еквівалентною діелектричною проникністю досліджуваного сипкого середовища та відомою діелектричною проникністю однієї із складових, наприклад повітря, необхідно знайти діелектричну проникність досліджуваного матеріалу. Для цього треба скористатися залежностями (20) та (21) з урахуванням коефіцієнта ущільнення.

Висновки. Створено математичну модель еквівалентної діелектричної проникності невпорядкованого неоднорідного сипкого середовища з урахуванням зовнішньої оболонки та внутрішнього ядра зернини за допомогою методу еквівалентних ємностей, що дає змогу розрахувати діелектричну проникність суміші за відомих (виміряних) діелектричних складових досліджуваного середовища і розв'язати зворотну задачу, тобто знаходити діелектричну проникність досліджуваного матеріалу за відомими (виміряними) значеннями еквівалентної діелектричної проникності та діелектричною проникністю однієї зі складових суміші (повітря).

1. Івах Р. М., Совин Я. Р. Математична модель еквівалентної діелектричної проникності неоднорідного середовища з регулярними кульовими діелектричними включеннями // Автоматика, вимірювання та керування. — 2009. — № 639. — С. 44—51. 2. Берлинер М. А. Измерения влажности. – М.: Энергия, 1973. – 400 с. 3. Атабеков Г. И., Купалян С. Д., Тимофеев А. Б., Хухриков С. С. Теоретические основы электротехники / Под ред Г. И. Атабекова. Ч. 2 и 3. Нелинейные цепи. Электромагнитное поле. – М.–Л.: Энергия, 1966. – 280 с. 4. Нейман Л. Р., Димерчан К. С. Теоретические основы электротехники. – М.: Энергоиздат, 2003. 5. Теоретические основы электротехники. Том II. Нелинейные цепи и основы теории электромагнитного поля: Учебник для электротех. вузов. / Под ред. П.А. Ионкина. – Изд. 2-е, перераб и доп. – М.: Высшая школа, 1972. 6. Клауснатцер Г. Введение в электротехнику. – М., 1985. – 480 с. 7. Малинівський С. М. Загальна електротехніка. – Львів: Бескид-Біт, 2003. – 500 с.