

НЕПЕРЕРВНЕ Й ГЛАДКЕ РІВНОМІРНЕ СПЛАЙН-НАБЛИЖЕННЯ ТЕМПЕРАТУРНОЇ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЕНСОРА ТА ЙОГО ЧУТЛИВОСТІ

© Малахівський Петро¹, Пізюр Ярослав², Андруник Василь², 2007

¹Центр математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки та математики ім. Я. С. Підстригача
НАН України, Українська академія друкарства, м. Львів

²Національний університет “Львівська політехніка”,
вул. С. Бандери, 12, 79013, Львів, Україна

Розглядається задача побудови неперервного й гладкого сплайн-наближення, кожна ланка якого є поліноміальним наближенням за чебишевським критерієм. Описано алгоритм побудови такого сплайн-наближення із заданою похибкою. Наведено приклад застосування такого рівномірного сплайн-наближення для описання температурної характеристики й чутливості термодіодного сенсора для криогенних температур.

Рассматривается задача построения непрерывного и гладкого сплайн-приближения, каждое звено которого является полиномиальным приближением за чебышевским критерием. Описан алгоритм построения такого сплайн-приближения с заданной погрешностью. Приведен пример применения такого равномерного сплайн-приближения для описания температурной характеристики и чувствительности термодиодного сенсора для криогенных температур.

It is considered the problem of construction of the continued and smoothed spline-approximation, where its each link is Chebyshev polynomial. The algorithm for determinating of such spline-approximation with apriory given error is proposed. The example of application of this approximation for the transfer-function of thermodiode sensor for cryogen temperatures is described.

Для описання статичних характеристик сенсорів часто використовуються розривні рівномірні поліноміальні сплайни, наближення на окремих ланках яких підбираються так, щоб похибка наближення характеристики ні в одній точці діапазону вимірювання не перевищувала деякої наперед заданої величини [1]. Доцільність застосування таких сплайнів із роздільним чебишовським наближенням на окремих частинах діапазону вимірювання пояснюється можливістю отримання потрібної точності наближення за невеликих значень кількості параметрів у поліноміальних наближеннях. Такі апроксимації, неперервні на окремих ланках (частинах діапазону вимірювання), використовуються тоді, коли визначальною умовою є лише забезпечення відтворення значень функції з певною похибкою. Прикладом такої задачі може бути знаходження функціональної залежності для описання статичних характеристик термоперетворювачів [2 – 4]. Проте для дослідження чутливості сенсора такі розривні апроксимації непридатні, оскільки значення похідної в крайніх точках ланок мають значні розбіжності [5, 6]. У роботі [5] для наближення термометричної характеристики кремнієвих діодних сенсорів температури та їхньої

чутливості використано апроксимації за методом найменших квадратів поліномами Чебишова. Задовільна точність апроксимації термометричної характеристики сенсора та його чутливості досягається при сотовому і вищому степені поліномів Чебишова, що ускладнює практичне застосування цих апроксимацій через характерні для високих степенів пульсації.

Задача відтворення статичної характеристики сенсора та його чутливості зводиться до побудови неперервного й гладкого сплайн-наближення. Для досягнення оптимальної точності необхідно застосовувати рівномірне сплайн-наближення, яке забезпечує наближення з найменшою можливою похибкою за заданого степеня полінома [1, 7]. Побудову гладкого розривного сплайн-наближення поліномами третього степеня із застосуванням чебишовського критерію описано в роботі [7], проте теоретичного обґрунтування його побудови не наведено. У цій статті запропоновано спосіб підбору таких рівномірних поліноміальних наближень на окремих ланках сплайна, за яких похибка наближення на всьому відрізьку наближення не перевищує деякої наперед заданої величини, і складений із них сплайн та його похідна є неперервними функціями.

1. Означення та властивості неперервного й гладкого рівномірного сплайн-наближення із заданою похибкою. Нехай $f(x)$ – деяка неперервна й диференційовна функція на відрізку $[\alpha, \beta]$ ($f(x) \in C^{(1)}[\alpha, \beta]$), $P_m(a; x)$ – поліном степеня m ($m \geq 3$)

$$P_m(a; x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i \quad (1)$$

і $w(x)$ – вагова функція, неперервна на $[\alpha, \beta]$, така, що не набуває нульового значення на $[\alpha, \beta]$ ($w(x) \neq 0, x \in [\alpha, \beta]$). Необхідно функцію $f(x)$ наблизити на відрізку $[\alpha, \beta]$ з похибкою G_0 неперервним і гладким рівномірним сплайном

$$S(x) = \sum_{j=1}^q P_m(a^{(j)}; x) \Theta((x - t_j)(t_{j+1} - x)), \quad (2)$$

де $\Theta(u)$ – функція Хевісайда

$$\Theta(u) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } u \geq 0 \\ 0, & \text{якщо } u < 0 \end{cases}.$$

У сплайні (2) точки t_j ($j = \overline{1, q+1}$) – це межі ланок. Їх ще називатимемо вузлами сплайна, серед яких $t_1 = \alpha$, $t_{q+1} = \beta$, а відрізки $[t_j, t_{j+1}]$, $j = \overline{1, q}$ – ланки сплайна, на яких значення сплайна задають відповідно поліноми $P_m(a^{(j)}; x)$.

У цьому сплайні кожний із поліномів $P_m(a^{(j)}; x)$, $j = \overline{1, q}$ є чебишовським наближенням функції $f(x)$ на відрізку $[t_j, t_{j+1}]$ з вагою $w(x)$

$$\begin{aligned} \max_{t_j \leq x \leq t_{j+1}} \left| \frac{f(x) - P_m(a^{(j)}; x)}{w(x)} \right| = \\ = \min_a \max_{t_j \leq x \leq t_{j+1}} \left| \frac{f(x) - P_m(a; x)}{w(x)} \right|, \quad (3) \end{aligned}$$

і, на підставі неперервності сплайна та його похідної, значення цих поліномів і їхніх похідних у внутрішніх вузлах t_j , $j = \overline{2, q}$ збігаються

$$P_m(a^{(j-1)}; t_j) = P_m(a^{(j)}; t_j), \quad (4)$$

$$P'_m(a^{(j-1)}; t_j) = P'_m(a^{(j)}; t_j). \quad (5)$$

Окрім того, якщо G_j – значення похибки наближення функції $f(x)$ з вагою $w(x)$ на j -й ланці сплайна

$$G_j = \max_{t_j \leq x \leq t_{j+1}} \left| \frac{f(x) - P_m(a^{(j)}; x)}{w(x)} \right|, \quad (6)$$

то

$$\max_{1 \leq j \leq q} G_j \leq G_0, \quad (7)$$

де G_0 – задана похибка сплайн-наближення.

Задача знаходження для функції $f(x)$ сплайн-наближення $S(x)$ (2) з властивостями (3)–(7) на відрізку $[\alpha, \beta]$ полягає у забезпеченні досягнення заданої похибки наближення G_0 за найменшої можливої кількості ланок. Розв'язування цієї задачі зводиться до такого вибору границь ланок – вузлів t_j ($j = \overline{2, q}$) сплайн-наближення (2), за якого довжини всіх ланок, можливо, крім останньої, є максимально допустимими для заданої похибки наближення G_0 .

Розглянемо задачу знаходження неперервного й гладкого сплайн-наближення (2) для таблично заданої неперервно диференційовної функції $f(x)$ на множині точок X

$$X = \{x \in X : \alpha \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq \beta\}. \quad (8)$$

Нехай $G(f, w, m; \alpha_1, \alpha_2)$ – похибка чебишовського наближення функції $f(x)$ поліномом $P_m(a; x)$ степеня m ($m \geq 3$) на відрізку $[\alpha_1, \alpha_2]$ з вагою $w(x)$ ($w(x) > 0$ або $w(x) < 0$ для $x \in [\alpha_1, \alpha_2]$)

$$G(f, w, m; \alpha_1, \alpha_2) = \min_a \max_{\alpha_1 \leq x \leq \alpha_2} \left| \frac{f(x) - P_m(a; x)}{w(x)} \right|. \quad (9)$$

Далі, нехай точки x_{i_j} збігаються із вузлами сплайна t_j ($x_{i_j} = t_j$, $j = 1, 2, \dots, q+1$). Тоді внутрішні вузли сплайна t_j ($j = 2, \dots, q$; $t_1 = x_1 = \alpha$, $t_{q+1} = x_n = \beta$), які є розв'язком задачі знаходження сплайн-наближення (2) із заданою похибкою G_0 , задовольняють умови:

$$G(f, m, w; x_{i_j}, x_{i_{j+1}}) \leq G_0, \quad j = 1, \dots, q; \quad (10)$$

$$G(f, m, w; x_{i_j}, x_{i_{j+1}}) > G_0, \quad j = 1, \dots, q-1.$$

Сплайн-наближення, що забезпечує деяку похибку наближення G_0 за найменшої можливої кількості ланок відповідно до вказаних умов, називають балансним сплайн-наближенням із похибкою G_0 [1]. На практиці найчастіше використовуються балансні сплайн-наближення з ваговими функціями $w(x) = 1$ і $w(x) = f(x)$. Якщо вагова функція дорівнює одиниці,

отримуємо наближення з абсолютною похибкою, а якщо $w(x) = f(x) - z$ відносною.

Для побудови сплайн-наближення (2) можна використати алгоритми побудови балансних мінімаксних сплайн-наближень, що описано в роботах [1, 8], з передбаченням дотримання умов (3)–(5), щодо неперервності й гладкості сплайна.

2. Алгоритм побудови неперервного й гладкого рівномірного сплайн-наближення із заданою похибкою. За основу алгоритму знаходження неперервного й гладкого рівномірного сплайн-наближення (2) візьмемо алгоритм, описаний у роботі [9]. Цей алгоритм ґрунтується на уточненому визначенні наближення до проміжних вузлів шуканого сплайна. За цим алгоритмом побудова балансного сплайн-наближення для деякої неперервно диференційовної функції $f(x)$ із заданою похибкою G_0 полягає в послідовному знаходженні меж ланок, тобто внутрішніх вузлів сплайна t_j ($j = \overline{2, q}$). Крайні вузли сплайна t_1 і t_{q+1} збігаються з межами відрізка $[\alpha, \beta]$ – $t_1 = \alpha$, $t_{q+1} = \beta$, на якому будується сплайн-наближення. Спочатку із забезпеченням точності наближення і дотриманням умов неперервності й гладкості сплайна визначається права гранична межа t_2 першої ланки $[t_1, t_2]$, потім – другої і т.д. Оптимальні межі ланок сплайна визначаються ітераційним способом, за яким уточнення пробного значення вузла t_j здійснюється залежно від похибки наближення на відрізку $[t_{j-1}, t_j]$ відповідної поточної ланки за формулою

$$t_{j,r+1} = x_{i_{j,r+1}}, \quad j = \overline{2, \dots, q}, \quad r = \overline{1, 2, \dots}, \quad (11)$$

де

$$i_{j,r+1} = i_{j-1} + \varepsilon \left((i_{j,r} - i_{j-1}) \sqrt[m]{G_0 / G_{j,r}} \right), \quad (12)$$

$t_{j,r}$ – r -е наближення до j -го вузла сплайна; $i_{j,r}$ – номер точки з підмножини X , яка відповідає r -му наближенню до j -го вузла сплайну; i_j – номер точки з підмножини X , яка збігається з j -м вузлом сплайна t_j ($t_j = x_{i_j}$); $\varepsilon(u)$ – ціла частина від u ; G_0 – похибка сплайн-наближення; $G_{j,r}$ – похибка наближення під час r -ї ітерації на $(j-1)$ -й ланці, тобто на відрізку $[t_{j-1}, t_j]$; m – кількість невідомих параметрів у виразі, яким наближаємо.

Формулу (11) для визначення номера точки чергового наближення до шуканого вузла отримуємо з формули для наближеного значення похибки наближення розривним балансним сплайном [8, 9], припустивши, що точки x_i ($i = \overline{1, \dots, n}$) з підмножини X рівновіддалені одна від одної. Необхідно врахувати також мінімально допустиму кількість точок на ланці. Для крайніх ланок сплайна (першої та останньої) вона на одиницю більша за степінь полінома – $(i_{j,r} - i_{j-1} + 1) = (m + 1)$, а для внутрішніх ланок дорівнює степеню – $(i_{j,r} - i_{j-1} + 1) = m$. Вибір уточненого наближення $t_{j,r+1}$ до шуканого вузла сплайна можна реалізувати й за іншими стратегіями, наприклад, починаючи з деякої ітерації, прийнявши його таким, що дорівнює середньому значенню між гранично допустимими.

Початкове пробне значення t_{j_0} крайнього правого вузла першої ланки t_2 може визначатись з урахуванням мінімально допустимої довжини ланки, може прийматись таким, що дорівнює β , або задаватись користувачем. Початкові пробні значення для решти вузлів, починаючи із третього – t_{j_0} ($j = \overline{3, \dots, q}$), можна приймати такими, що дорівнюють кількості точок попередньої ланки, тобто: $t_{j_0} = x_{i_{j_0}}$, де $i_{j_0} = 2i_{j-1} - i_{j-2}$, $j = \overline{3, \dots, q}$.

Параметри поліномів сплайн-наближення (2) на кожній із ланок визначаються відповідно до критерію чебишовського наближення з точним відтворенням значення функції та похідної у заданих точках [10]. Для отримання неперервного й гладкого сплайна відповідно до умов (4), (5) необхідно забезпечити збіг значень ланок сплайна та їхніх похідних у внутрішніх вузлах сплайна t_j ($j = \overline{2, q}$). На першій ланці сплайна використовується чебишовське наближення з точним відтворенням значення функції та її похідної в крайній правій точці ланки – t_2 . Параметри чебишовського поліноміального наближення на першій ланці сплайна визначаються із системи рівнянь

$$\begin{cases} (f(z_i^{(1)}) - P_m(a^{(1)}; z_i^{(1)})) / w(z_i^{(1)}) = (-1)^i \mu_1, & i = \overline{1, m} \\ P_m(a^{(1)}; t_2) = f(t_2) \\ P_m'(a^{(1)}; t_2) = f'(t_2) \end{cases}, \quad (13)$$

де $z_i^{(1)}$, $i = \overline{1, m}$ – впорядковані за зростанням $z_i^{(1)} < z_{i+1}^{(1)}$, ($i = \overline{1, m-1}$) точки альтернансу на відрізку

$[t_1, t_2]$. Для знаходження цих точок альтернансу можна використати схему Ремеза з одноточковою заміною наближення до точок альтернансу за алгоритмом Валле–Пуссена [11]. Кількість точок альтернансу, що визначає таке чебишовське наближення, дорівнює m . Під час вибору початкового наближення до цих точок необхідно пам'ятати, що крайня права точка ланки не може входити в альтернанс. Похибка апроксимації на першій ланці дорівнює модулю μ_1 ($G_1 = |\mu_1|$).

Параметри поліномів сплайн-наближення (2) для функції $f(x)$ на внутрішніх ланках, починаючи з другої до передостанньої, визначаються за критерієм чебишовського наближення з умовою точного відтворення значення функції та похідної у крайніх точках кожної з цих ланок $[t_j, t_{j+1}]$, $j = \overline{2, q-1}$. Відповідно до характеристичної властивості чебишовського наближення з точним відтворенням значення функції та похідної у двох точках [10] значення коефіцієнтів цих поліномів задовольняють системам рівнянь

$$\begin{cases} P_m(a^{(j)}; t_j) = f(t_j) \\ P'_m(a^{(j)}; t_j) = f'(t_j) \\ (f(z_i^{(j)}) - P_m(a^{(j)}; z_i^{(j)})) / w(z_i^{(j)}) = (-1)^i \mu_j, \\ P_m(a^{(j)}; t_{j+1}) = f(t_{j+1}) \\ P'_m(a^{(j)}; t_{j+1}) = f'(t_{j+1}) \end{cases} \quad \begin{matrix} i = \overline{1, m-2}, \\ j = \overline{2, q-1}, \end{matrix} \quad (14)$$

де $z_i^{(j)}$, $i = \overline{1, m-2}$, $j = \overline{2, q-1}$ – впорядковані за зростанням $z_i^{(j)} < z_{i+1}^{(j)}$, ($i = \overline{1, m-3}$) точки альтернансу j -ї ланки, тобто на відрізку $[t_j, t_{j+1}]$. Для знаходження цих точок альтернансу можна також використати схему Ремеза з одноточковою заміною наближення до точок альтернансу за алгоритмом Валле–Пуссена [11]. У цьому разі є лише $(m-2)$ -і точки альтернансу. Під час вибору початкового наближення до точок альтернансу треба пам'ятати, що крайні точки кожної із цих ланок не можуть входити в альтернанс. Як і для першої ланки, похибка апроксимації на кожній із цих ланок дорівнює модулю відповідного значення μ_j ($G_j = |\mu_j|$), $j = \overline{2, q-1}$.

Для визначення поліноміального наближення на останній ланці сплайна використовується чебишовське

наближення з точним відтворенням значення функції та її похідної в крайній лівій точці ланки – t_q . Значення коефіцієнтів цього поліноміального наближення задовольняють системі рівнянь

$$\begin{cases} P_m(a^{(q)}; t_q) = f(t_q) \\ P'_m(a^{(q)}; t_q) = f'(t_q) \\ (f(z_i^{(q)}) - P_m(a^{(q)}; z_i^{(q)})) / w(z_i^{(q)}) = (-1)^i \mu_q, \quad i = \overline{1, m} \end{cases} \quad (15)$$

де $z_i^{(q)}$, $i = \overline{1, m}$ – впорядковані за зростанням $z_i^{(q)} < z_{i+1}^{(q)}$, ($i = \overline{1, m-1}$) точки альтернансу на відрізку $[t_q, t_{q+1}]$. Для знаходження цих точок альтернансу також можна використати схему Ремеза з одноточковою заміною наближення до точок альтернансу за алгоритмом Валле–Пуссена [11]. Подібно до першої ланки це наближення має m точок альтернансу й під час вибору початкового наближення до цих точок необхідно пам'ятати, що крайня ліва точка ланки не може входити в альтернанс. Похибка апроксимації на останній ланці дорівнює модулю μ_q ($G_q = |\mu_q|$).

Задача балансного сплайн-наближення із заданою похибкою у разі наближення таблично заданих функцій не завжди має розв'язок. Вона не має розв'язку, якщо на одному з підінтервалів $[x_{i_j}, x_{i_{j+1}}]$, $j = 1, 2, \dots, q$ мінімально допустимої довжини ланки отримується похибка G , більша від заданої G_0 ($G > G_0$). Для сплайн-наближення (2) поліномом степеня m мінімально необхідна кількість точок для визначення першої і останньої ланки дорівнює $(m+1)$, а для решти ланок – m .

Якщо під час побудови балансного сплайн-наближення із заданою похибкою отримувалась похибка, більша від заданої, то залежно від конкретної задачі можна вибрати поліном вищого степеня або збільшити похибку наближення. У такому разі можливі й інші розв'язання, наприклад, на підінтервалах, на яких чебишовське наближення з необхідною похибкою не вдалося знайти, можна застосувати ермітову інтерполяцію [12] із відтворенням значення функції та похідної у відповідних крайніх точках ланки: на першій ланці у крайній правій точці, на останній у крайній лівій точці, а для внутрішніх ланок в обох крайніх точках.

3. Неперервна апроксимація температурної характеристики термодіодного сенсора та його чутливості. Розглянемо апроксимацію температурної характеристики термодіодного сенсора типу DT-471 фірми Lake Shore, поданої на сайті [13] (Curve 10). Температурна характеристика цього сенсора задана 120-ма значеннями у діапазоні від 1.4 К до 475 К. Графік цієї температурної характеристики зображено на рис. 1, а графік чутливості сенсора – на рис. 2.

Для описання цієї температурної характеристики отримано неперервний і гладкий балансний сплайн, відносна похибка якого не перевищує 0.03%. Цей сплайн складається з 6 ланок, визначених за чебишовським критерієм, кожна з яких задається поліномом п'ятого степеня

$$U_j(T) = \sum_{i=0}^5 a_i^{(j)} T^i, \quad (16)$$

де j – номер ланки.

Значення коефіцієнтів поліномів (16) для кожної з ланок цього сплайна, а також межі ланок наведено в таблиці. Значення відносної похибки апроксимації балансним сплайном температурної характеристики сенсора та його чутливості на кожній із ланок вказано у процентах.

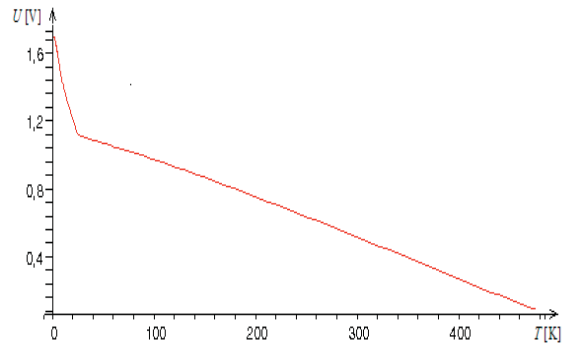


Рис. 1. Графік температурної характеристики сенсора DT-471

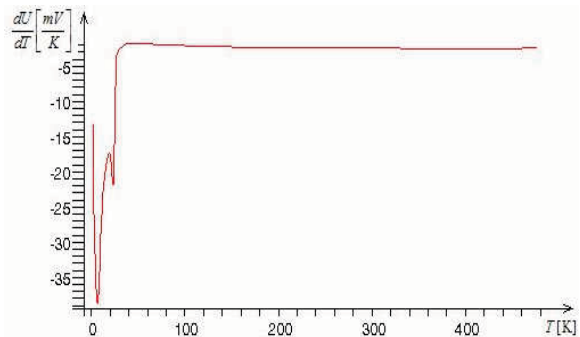


Рис. 2. Графік чутливості сенсора типу DT-471

Результати апроксимації температурної характеристики сенсора типу DT-471

Номер ланки	Межі ланки	Значення коефіцієнтів полінома (16) у послідовності зростання степеня	Похибка апроксимації [%]	
			характеристики	чутливості
1	1.4; 12	1.7103271; -1.9989467 $\cdot 10^{-3}$; -4.8893344 $\cdot 10^{-3}$; 1.9990021 $\cdot 10^{-5}$; 3.4349482 $\cdot 10^{-5}$; -1.4507749 $\cdot 10^{-6}$	0.025	16.2
2	12; 22	2.4487157; -0.25724672; 2.73776 $\cdot 10^{-2}$; -1.6298457 $\cdot 10^{-3}$; 4.9900542 $\cdot 10^{-5}$; -6.2051397 $\cdot 10^{-7}$	0.008	0.73
3	22; 26	81.153238; -19.959439; 1.9429376; -9.2568187 $\cdot 10^{-2}$; 2.1651085 $\cdot 10^{-3}$; -1.9942037 $\cdot 10^{-5}$	0.022	2.57
4	26; 46	3.5701596; -0.32433755; 1.7194142 $\cdot 10^{-2}$; -4.559726 $\cdot 10^{-4}$; 6.0103265 $\cdot 10^{-6}$; -3.1483237 $\cdot 10^{-8}$	0.026	7.1
5	46; 390	1.1489153; -1.3559077 $\cdot 10^{-3}$; -4.7383389 $\cdot 10^{-6}$; 1.0344912 $\cdot 10^{-8}$; -9.9551343 $\cdot 10^{-12}$; 1.8461086 $\cdot 10^{-15}$	0.025	0.63
6	390; 475	-34.071441; 0.42745457; -2.0940457 $\cdot 10^{-3}$; 5.1036573 $\cdot 10^{-6}$; -6.2237301 $\cdot 10^{-9}$; 3.037588 $\cdot 10^{-12}$	0.004	0.23

Відносна похибка відтворення сплайном значення чутливості 16.2% на першій ланці зумовлена похибкою відтворення чутливості при температурі 1.4 К, при температурі 1.6 К вона становить 6.77%, а в решті точок спостереження на цій ланці відносна похибка відтворення чутливості сенсора не перевищує 4%. Висока похибка 7.1% відтворення сплайном чутливості сенсора на четвертій ланці пояснюється наявним на цьому інтервалі локальним мінімумом функції, що описує чутливість сенсора (див. рис. 2). Правда, якісний характер зміни чутливості сенсора в діапазоні перших чотирьох ланок, тобто для температури від 1.4 К до 46 К, похідна від сплайна відтворює задовільно. Візуальним підтвердженням цьому може бути рис. 3, на якому зображено графік розрахованих за сплайном значень чутливості сенсора у цьому діапазоні й відповідні спостережувані значення чутливості. Точками на цьому рисунку відображено результати спостереження, а крива зображає значення похідної від сплайна. Наведені в таблиці результати неперервної апроксимації температурної характеристики і чутливості термодіодного сенсора підтверджують доцільність застосування балансного сплайн-наближення з ланками визначеними за мінімаксним критерієм. Отриманий сплайн відтворює температурну характеристику термодіодного сенсора в діапазоні температур від 1.4 К до 475 К з відносною похибкою, меншою за 0.026%. Особливо ефективно виглядає порівняння кількості параметрів цього сплайна з апроксимацією поліномами Чебишова високого степеня, запропонованою в роботі [5]. Загальна кількість параметрів апроксимації у цьому разі значно менша, оскільки чебишовський критерій забезпечує досягнення найменшої похибки наближення для заданої кількості параметрів.

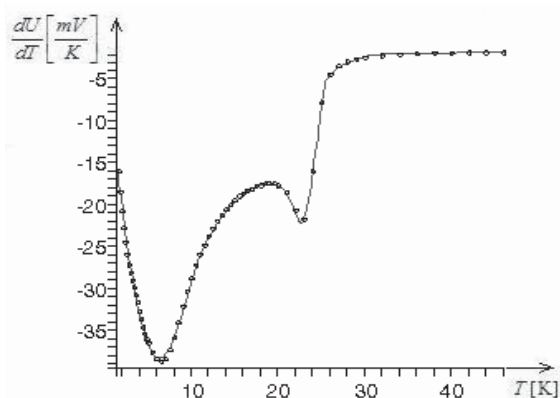


Рис. 3. Графік чутливості сенсора типу DT-471 та його наближення

Відповідно до означення балансного сплайн-наближення можна стверджувати, що не існує неперервного й гладкого сплайн-наближення з меншою кількістю поліноміальних ланок вигляду (16) ніж шість, яке з відносною похибкою 0.03% апроксимує залежність спаду напруги від температури для статичної температурної характеристики термодіодного сенсора типу DT-471 у діапазоні [1.4 К; 475 К]. Кожна ланка цього сплайн-наближення визначається з умови досягнення найбільшої можливої довжини, за якої забезпечується задана точність наближення. Оскільки апроксимація на кожній із ланок здійснюється за чебишовським критерієм, то кількість цих ланок є мінімально можливою.

Щоправда, за рахунок деякого збільшення похибки наближення на останній ланці інколи можна зменшити похибку сплайн-наближення для цієї самої кількості ланок. У цьому разі необхідно зафіксувати отриману кількість ланок і, зменшуючи довжини деяких із ланок, спробувати досягти деякого зменшення похибки сплайн-наближення. Таку задачу називають задачею побудови сплайн-наближення із заданою кількістю ланок. Алгоритми побудови негладкого сплайн-наближення із заданою кількістю ланок описано в роботі [1].

Висновки. Побудова неперервного й гладкого балансного сплайн-наближення з поліноміальними ланками, в якому наближення на кожній із ланок визначається за чебишовським критерієм, ґрунтується на застосуванні рівномірного наближення, що відтворює точне значення функції та похідної в заданих точках. Значення параметрів наближення на першій ланці цього сплайна визначається за характеристичною властивістю чебишовського наближення, яке в крайній правій точці ланки відтворює значення функції та похідної. Поліноміальні наближення на внутрішніх ланках сплайна, починаючи із другої до передостанньої, визначаються відповідно до характеристичної властивості чебишовського наближення, яке в крайніх точках цих ланок відтворює значення функції і похідної. Чебишовське наближення на останній ланці сплайна точно відтворює значення функції і похідної у крайній лівій точці ланки. Довжини всіх ланок сплайна, крім останньої, вибирають максимально можливими для заданої похибки сплайн-наближення.

1. Попов Б. А. *Равномерное приближение сплайнами*. – К.: Наук. думка, 1989. – 272 с. 2. *Температурные измерения / Геращенко О. А., Гордов А. И., Еремина А. К. и др.* – К.: Наук. думка, 1989. – 704 с. 3. Грановский В. А., Сирая Т. Н. *Методы обработки экспериментальных данных при измерениях*. – Л.: Энергоатомиздат. Ленингр. отд-ние, 1990. – 288 с. 4. Денисюк В. П., Марченко Б. Г. *Сплайны и их приложения в задачах моделирования и обработки измерительных сигналов*. – К.: Национальный технический университет Украины "КПИ", 1995. – 246 с. 5. Иващенко А. Н., Шварц Ю. М. *Аппроксимация термометрических характеристик кремниевых диодных сенсоров температуры // Оптоэлектроника и полупроводниковая техника: Межвед. сб. науч. тр.* – 2003. – Вып. 38. – С. 61–70. 6. Шварц Ю. М., Яганов П. А., Дзюба В. Г. *Нейросетевая аппроксимация термометрической характеристики диодного сенсора // Технология и конструирование в электрон. аппаратуре*. – 2005. – № 5. – С. 18–22. 7. Пізюр Я. В., Попов Б. О.

Побудова многочленних ермітово-чебишовських сплайнів третього степеня // Волинський математичний вісник. – 1995. – Вип. 2. – С. 129–131. 8. Монцибович Б. Р., Криворучко Г. Ф., Малачивський П. С. и др. *Диалоговый пакет программ для аналитической обработки табличных данных (ППП РАДАН – 2)*. – Львов: 1988. – 135 с. – Деп. в Укр. РФАП 27.03.1990, № АП0278. 9. Малачивський П., Андруник В. *Рівномірне сплайн-наближення // Комп'ютерні технології друкарства*. – № 7. – Львів: Українська академія друкарства, 2002. – С. 107–115. 10. Малачивський П. С. *Рівномірне наближення з точним відтворенням значень функції та похідної в заданих точках // Доп. НАН України*. – 2006. – № 9. – С. 80–85. 11. Попов Б. А., Теслер Г. С. *Приближение функций для технических приложений*. – К.: Наукова думка, 1980. – 352 с. 12. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. *Машинные методы математических вычислений*. – М.: Мир, 1980. – 279 с. 13. www.lakeshore.com/.../Curve 10.

УДК 621.315.592

ДОСЛІДЖЕННЯ ТЕРМОЕЛЕКТРИЧНОГО МАТЕРІАЛУ $ZrNiSn_{1-x}In_x$. ОСОБЛИВОСТІ ЕЛЕКТРОКІНЕТИЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК

© Ромака Володимир¹, Стадник Юрій², Ромака Віталій², Лагун Андрій¹, 2007

¹Національний університет "Львівська політехніка", вул. С. Бандери, 12, 79013, Львів, Україна

²Львівський національний університет ім. І. Франка, вул. Університетська, 1, 79000, Львів, Україна

Досліджено температурні та концентраційні залежності питомого опору та коефіцієнта термо-ЕРС напівпровідникового твердого розчину $ZrNiSn_{1-x}In_x$ у діапазонах, $T = 80 \div 380$ К, $x = 0 \div 0,15$. Експериментально встановлена залежність між параметрами флуктуації зон неперервних енергій, глибиною флуктуації та глибиною потенціальної ями дрібномасштабної флуктуації.

Исследованы температурные и концентрационные зависимости удельного сопротивления и коэффициента термо-ЭДС полупроводникового твердого раствора $ZrNiSn_{1-x}In_x$ в диапазонах, $T = 80 \div 380$ К, $x = 0 \div 0,15$. Экспериментально установлена зависимость между параметрами флуктуации зон непрерывных энергий, глубиной флуктуации и глубиной потенциальной ямы мелкомасштабной флуктуации

The temperature and concentration dependencies of resistivity and thermopower $ZrNiSn_{1-x}In_x$ semiconductor solid solution in ranges, $T = 80 \div 380$ K and $x = 0 \div 0,15$, respectively were investigated. Dependence between the parameters of fluctuation of the continuous energy bands, depth of fluctuation, and depth of the potential well of low-scale fluctuation was experimentally ascertained.

1. Вступ. Розвинута у [1] теорія сильнолегованого та повністю компенсованого напівпровідника передбачає, що максимальна амплітуда флуктуації зон неперервних енергій дорівнює половині ширини забо-

роненої зони напівпровідника ($\epsilon_g/2$), а рівень Фермі (μ) розташовується посередині забороненої зони (рис. 1). Наведені нижче експериментальні результати, поперше, підтверджують теоретичні висновки [1], по-