

похибок розрахунку середнього квадрата шумової напруги, а, відповідно, і термодинамічної температури;

- для завад трапецієподібної та прямокутної форм похибки зростають;

- найнесприятливішим є випадок, коли завада прямокутної форми генерується в діапазоні низьких частот, що пов'язано, насамперед, з наявністю гармонік вищих порядків, які наявні у такій заваді та за рівнем амплітуди є меншими за середній рівень спектра шумового сигналу. Відповідно, не вдається розпізнати їх як гармоніки завади та виконати повну фільтрацію такої завади.

Тому під час проектування шумових термометрів потрібно найбільшу увагу приділяти мінімізації впливу на аналогові кола цифрових ланок, які є основними джерелами завади прямокутної форми і, тим самим, зменшувати похибки перетворення Фур'є.

Надалі планується виконання теоретичних досліджень оцінки додаткової похибки розрахунку середнього квадрата шумової напруги за спектром, яка виникає за рахунок обмеження часу вимірювання, та аналізу методики вибору значення рівня фільтрації для фільтрів на основі перетворення Фур'є.

1. Микитин І.П., Стадник Б.І. Проблеми створення вторинної апаратури у шумовій термометрії // *Вимірювальна техніка та метрологія – За матеріалами 8-ї Міжнародної конференції “Температура – 2003”*, 2003. – №64. – С.99–105. 2. Микитин І.П. Фільтрація шумових сигналів з використанням швидкого перетворення Фур'є // *Автоматика, вимірювання та керування*. 2006. – №551. – С. 37–42. 3. Nyquist H.A. A thermal motion of electrical charges in conductors // *Phys.Rev. V.32. – 1928. – July. – № 1. – P.110*. 4. Сиберт У.М. Цени, сигнали, системи: В 2-х ч. Ч.2: Пер. с англ. – М.: Мир, 1988. – 360 с. 5. Венцель Е.С. Теория вероятностей. – М.: Наука, 1969. – 574 с.

УДК 621.317

## ДОСЛІДЖЕННЯ МЕТОДИЧНИХ ПОХИБОК ВИМІРЮВАННЯ В ЕЛЕКТРИЧНІЙ ТОМОГРАФІЇ

©Петровська Ірина<sup>1</sup>, Дорожовець Михайло<sup>1,2</sup> 2007

<sup>1</sup>Національний університет “Львівська політехніка”, кафедра інформаційно-вимірювальних технологій,  
вул. С. Бандери, 12, 79013, Львів, Україна

<sup>2</sup>Ряшівська політехніка, кафедра метрології та вимірювальних систем, Ряшів,  
вул. В.Поля, 2, 35-959, Польща

**Наведено результати досліджень методичних похибок вимірювання при реконструкції питомої провідності в електричній томографії.**

**Приведены результаты исследований методических погрешностей измерений при реконструкции удельной проводимости в электрической томографии.**

**Results of methodical measurement error research at the reconstruction of specific conductance in electrical tomography are notified in the article.**

**1. Вступ.** Поява методичних похибок в електричній томографії спричинена алгоритмом розв'язування томографічних задач [1]. Методичні похибки безпосередньо пов'язані з математичними моделями етапів перенесення вимірювальної інформації під час томографічних вимірювань від фізичного об'єкта, який є джерелом інформації, через засоби відбирання вимірювальної інформації з об'єкта досліджень, використовуючи програму реконструкції образу до відображення результатів. В електричній томографії

методичні похибки насамперед пов'язані із вибраним методом апроксимації електричної польової задачі у досліджуваному середовищі, кількістю дискретних апроксимаційних ділянок та алгоритмом реконструкції розподілу питомої провідності за результатами вимірювань зовнішніх величин (міжелектродних напруг або струмів).

Кількість дискретних елементів однозначно визначає просторову роздільну здатність реконструкції образу. Для промислових томографічних вимірювань

роздільна здатність у кілька відсотків цілком прийнятна. Тому для отримання роздільної здатності на рівні  $\approx(1\pm 2)\%$  необхідно використовувати принаймні  $\approx(50\div 100)$  ділянок апроксимації [2].

Дуже важливе значення має алгоритм реконструкції просторового розподілу питомої провідності. Найважливішими параметрами алгоритму є характеристики точності реконструкції просторового розподілу провідності та швидкість збіжності ітераційної процедури. Остання для практичних застосувань електричної томографії на першому місці, оскільки навіть якщо алгоритм і зможе забезпечити дуже високу точність реконструкції образу розподілу питомої провідності, але протягом великої кількості ітерацій, то його практична цінність невисока. Тому, у дослідженнях основну увагу приділятимемо підвищенню швидкості збіжності ітераційної процедури.

Похибка відповідного алгоритму спричинена тим, що для вибраної моделі розподілу величини, її апроксимації, отриманих результатів вимірювань, образ знаходять, застосовуючи певний алгоритм, який реалізують конкретними програмами на конкретному комп'ютері. Обернені задачі реконструкції належать до некоректних задач із відповідними проблемами забезпечення стійкості результатів реконструкції [3]. У багатьох випадках похибка розв'язку оберненої задачі може стати найвагомішою.

Метою виконуваних досліджень є підвищення точності вимірювань в електричній томографічній системі завдяки розробленому новому алгоритму реконструкції питомої електричної провідності для забезпечення методичних похибок на рівні декількох відсотків, що, своєю чергою, забезпечить підвищення точності реконструкції образу провідності.

**2. Обґрунтування застосування апроксимації електричної польової задачі методом скінченних елементів.** Вибір методу апроксимації електричної польової задачі пов'язаний із розв'язанням прямої задачі електричної томографії. Для забезпечення найвищої точності найефективнішим методом апроксимації електричної польової задачі є метод скінченних елементів. У разі застосування цього методу [4–7] досліджуване середовище всередині об'єкта досліджень поділяється на трикутні, чотирикутні чи іншої форми елементи, на кожному з яких задається апроксимація потенціалу, пов'язана з потенціалами у вузлових точках на стику різних елементів. У наших дослідженнях використовувалась апроксимація ста-

лими значеннями питомої електричної провідності та лінійна апроксимація потенціалу на трикутних елементах і білінійна апроксимація на чотирикутних елементах. Для заданих значень провідностей елементів при підведенні до зовнішніх електродів струмів розв'язання отриманої системи рівнянь дає значення вузлових напруг, що є результатом розв'язання прямої задачі електричної томографії.

**3. Рівняння та схема вимірювань.** В електричній томографії для середовища з неоднорідною питомою провідністю  $\gamma(x,y)$ , якщо всередині середовища джерела струму відсутні, а струм  $I_0$  підводиться лише між зовнішніми електродами  $\Gamma_i$  та  $\Gamma_{i+1}$  (рис.1) площею  $S_i$ , ( $J=I_0/S_i$ , де  $S_i$  – площа електрода), можна записати диференціальне рівняння у часткових похідних (узагальнене рівняння Пуассона) [8]:

$$\nabla\gamma(x,y)\cdot\nabla u(x,y)+\gamma(x,y)\nabla^2 u(x,y)=\begin{cases} J_0, \Gamma_i; \\ -J_0, \Gamma_{i+1}; \\ 0, \Gamma_j, j \neq i, i+1, \end{cases} \quad (1)$$

де  $\gamma(x,y)$  – розподіл питомої провідності;  $u(x,y)$  – розподіл потенціалів;  $\nabla$  – оператор Лапласа;  $\Gamma_i, \Gamma_{i+1}$  – електроди, до яких підводиться струм  $I_0$ ;  $J_0=I_0/S_0$  – густина підведеного струму,  $S$  – площа електрода;  $\Gamma_j$  – електроди, на яких вимірюються зовнішні потенціали.

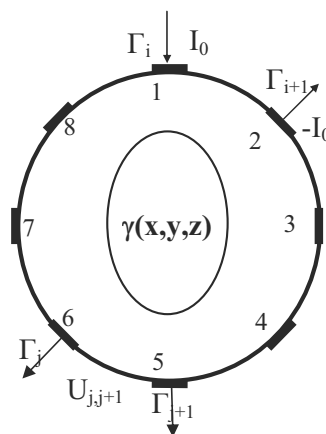


Рис.1. Схема вимірювань в електричній томографії

З математичного погляду задача полягає у розв'язанні рівняння Лапласа у часткових похідних за граничними умовами Неймана [8]:

$$\int \gamma \frac{\partial u}{\partial n} = \pm J, \quad (2)$$

де  $n$  – одинична зовнішня нормаль до поверхні об'єкта.

На рис. 2, а показана досліджувана структура апроксимації трикутними скінченними елементами об'єкта досліджень, яка складається з чотирьох шарів елементів (на рисунку вони умовно окреслені колами), розділена на шість секторів (обведені жирними лініями) і 96 трикутних елементів, якій відповідає електрична схема із 156 заступних елементів (опорів) (рис. 2, б).

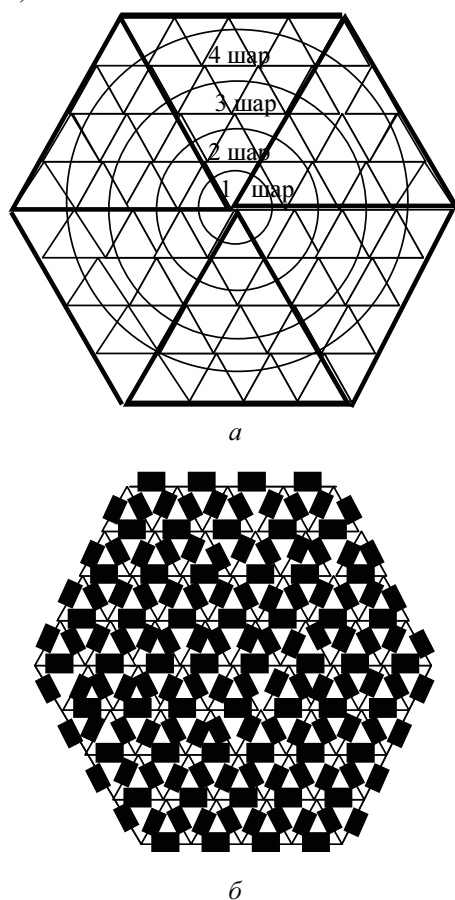


Рис. 2. Структура об'єкта досліджень при апроксимації методом скінченних елементів (трикутними скінченними елементами) (а) та електрична схема заміщення резисторами, яка відповідає цій апроксимації (б)

Для імітаційного моделювання томографічної реконструкції питомої провідності необхідно для заданого значення питомої провідності розрахувати значення міжелектродних напруг.

Реконструкція образу просторового розподілу питомої електричної провідності, тобто розв'язання оберненої задачі електричної томографії полягає у знаход-

женні такого розподілу провідності, для якого різниця між зовнішніми і отриманими в результаті вимірювань потенціалами була б нехтовно малою. Типова ітераційна процедура знаходження образу розподілу питомої провідності ньютонівським методом описана в [9]. Застосовуючи цей метод розв'язування системи нелінійних рівнянь, вектор  $\Delta\gamma^{(k+1)}$  шуканих величин (приросту провідності) на  $k$ -й ітерації можна знайти за виразом [9]:

$$\Delta\gamma^{(k+1)} = \left( S^T(\gamma^{(k)}) \cdot S(\gamma^{(k)}) \right)^{-1} S^T(\gamma^{(k)}) \cdot \Delta U, \quad (3)$$

де  $S^T$  – транспонована матриця чутливостей,  $\Delta U$  – різниця між зовнішніми і отриманими в результаті вимірювань потенціалами.

Зауважимо, що внаслідок поганої зумовленості якобіана  $S^T(R^{(k)}) \cdot S(R^{(k)})$  для забезпечення стійкості розв'язків необхідне застосування регуляризації, наприклад, за методом Левенберга–Маркварда [9], введенням регуляризаційного додатка

$$\Delta\gamma^{(k+1)} = \left( S^T(\gamma^{(k)}) \cdot S(\gamma^{(k)}) + mreg \cdot I_1 \right)^{-1} S^T(\gamma^{(k)}) \cdot \Delta U, \quad (4)$$

де  $mreg I_1$  – стабілізуючий доданок ( $mreg$  – параметр регуляризації,  $I_1$  – одинична діагональна матриця).

**4. Описання тестових моделей, для яких виконувалися дослідження і методика оцінювання характеристик методичної похибки реконструкції питомої провідності.** Нашою метою під час моделювання було виявити, як впливає початкова нерівномірність розподілу питомої провідності на методичні похибки реконструкції. Моделювався вплив 100% збільшення провідності. Досліджувались 32 тестові моделі. Для прикладу наводимо лише десять з них, в яких на 100% збільшувалась провідність:

- одного елемента, розташованого в різних шарах від внутрішнього (рис. 3, а) до зовнішнього (рис. 3, б);
- трьох елементів у різній комбінації, розміщених як в одному шарі (рис. 3, в, г), так і в різних шарах (рис. 3, д, е);
- чотирьох елементів, розміщених у різних шарах (рис. 3, є, ж);
- шарів елементів від внутрішнього (рис. 3, з) до зовнішнього (рис. 3, к).

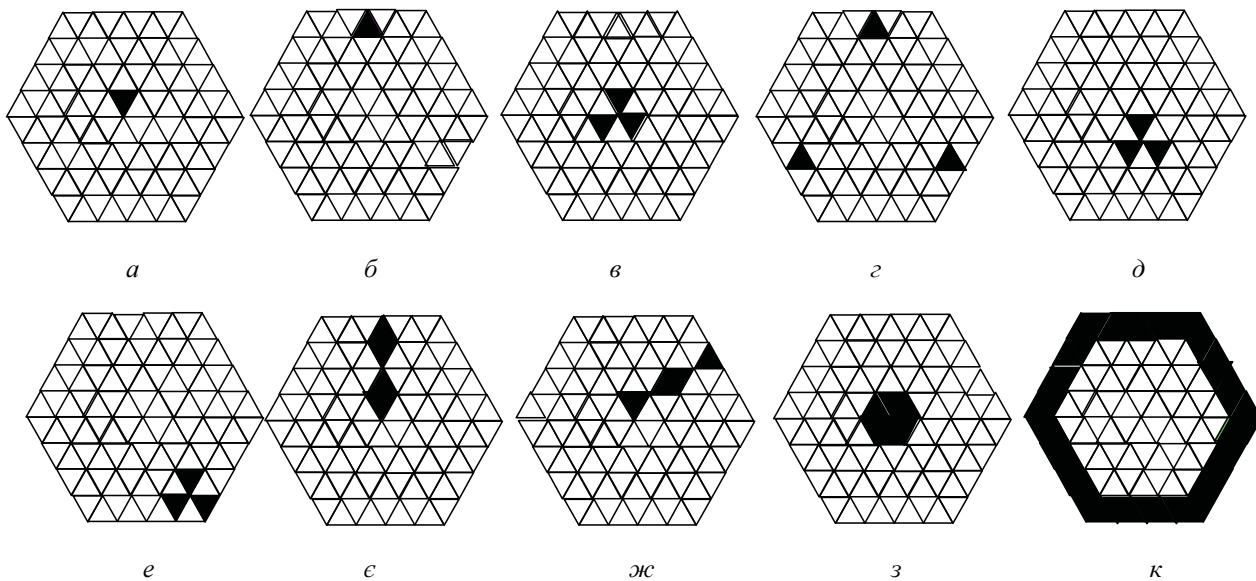


Рис.3. Деякі з досліджуваних тестових моделей

На кожній ітерації визначалися такі характеристики методичної похибки реконструкції:

- абсолютна похибка реконструкції провідності як різниця реконструйованих і заданих (модельних) значень:

$$\Delta\gamma_j^{(it)} = \gamma_j^{(it)} - \gamma_{\text{mod},j}; \quad (5)$$

де  $j$  – номер трикутного елемента.

- відносна похибка реконструкції провідності (у відсотках):

$$\delta\gamma_j^{(it)} = \frac{\Delta\gamma_j^{(it)}}{\gamma_{\text{mod},j}} \cdot 100\%; \quad (6)$$

та її характеристики (усереднені по всіх елементах):

- середнє значення відносної похибки реконструкції провідності:

$$\overline{\delta\gamma^{(it)}} = \frac{1}{n_{\text{елем}}} \cdot \sum_{j=1}^{n_{\text{елем}}} \delta\gamma_j^{(it)}; \quad (7)$$

- оцінка стандартного відхилення відносної похибки реконструкції провідності:

$$\sigma\gamma^{(it)} = \sqrt{\frac{1}{n_{\text{елем}} - 1} \cdot \sum_{j=1}^{n_{\text{елем}}} (\delta\gamma_j^{(it)} - \overline{\delta\gamma^{(it)}})^2}; \quad (8)$$

- оцінка середньоквадратичного значення відносної похибки реконструкції провідності:

$$\delta\gamma_{\text{skv}}^{(it)} = \sqrt{(\sigma\gamma^{(it)})^2 + (\overline{\delta\gamma^{(it)}})^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{n_{\text{елем}} - 1} \cdot \sum_{j=1}^{n_{\text{елем}}} (\delta\gamma_j^{(it)} - \overline{\delta\gamma^{(it)}})^2 + \left( \frac{1}{n_{\text{елем}}} \cdot \sum_{j=1}^{n_{\text{елем}}} \delta\gamma_j^{(it)} \right)^2}; \quad (9)$$

- максимальне за модулем значення відносної похибки реконструкції провідності:

$$\delta\gamma_{\text{max\_mod}}^{(it)} = \max \left\{ \left| \delta\gamma_j^{(it)} \right| \right\}. \quad (10)$$

**5. Аналіз отриманих результатів дослідження методичних похибок реконструкції.** За результатами четвертої ітерації при моделюванні 100% збільшення питомої провідності окремих елементів отримано найменше середнє значення відносної похибки  $3 \cdot 10^{-7}\%$  при 100% збільшенні питомої провідності 7-го елемента другого внутрішнього шару, найбільше  $2 \cdot 10^{-3}\%$  при 100% збільшенні питомої провідності 63-го елемента зовнішнього шару. Стандартне відхилення і середньоквадратичне значення відносної похибки реконструкції найменші –  $7 \cdot 10^{-5}\%$  при 100% збільшенні питомої провідності 0-го елемента внутрішнього шару, найбільші  $9 \cdot 10^{-3}\%$  при 100% збільшенні питомої провідності 63-го елемента зовнішнього шару. Максимальна за модулем відносна похибка найменша  $10^{-4}\%$  при 100% збільшенні питомої провідності 0-го, 7-го, 9-го елементів внутрішнього шару, найбільша  $0.04\%$  при 100% збільшенні питомої провідності 63-го елемента зовнішнього шару. На рис. 4. а, б подано

графіки розподілу максимальної відносної похибки реконструкції питомої провідності з відповідними характеристиками по всіх чотирьох ітераціях при 100% збільшенні провідності 0-го внутрішнього шару (рис. 4, а) і 63-го елемента зовнішнього шару (рис. 4, б), як найпоказовіші.

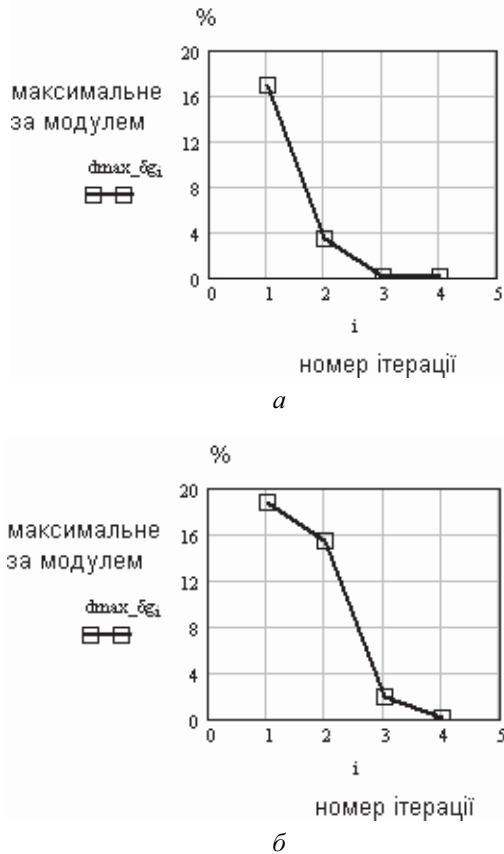


Рис. 4. Максимальне за модулем значення відносної похибки реконструкції при 100% збільшенні питомої провідності окремих елементів по ітераціях

За результатами четвертої ітерації при моделюванні 100% збільшення питомої провідності груп елементів отримано найменші значення всіх характеристик відносної похибки при 100% збільшенні питомої провідності елементів внутрішнього шару відповідно  $5 \cdot 10^{-6}\%$ ,  $10^{-4}\%$ ,  $10^{-4}\%$ ,  $2 \cdot 10^{-3}\%$ , а найбільші знову ж таки при 100% збільшенні питомої провідності елементів зовнішнього шару відповідно 0.28%, 1.98%, 2.00%, 9.1%. На рис. 5, а, б наведено графіки розподілу максимальної відносної похибки реконструкції питомої провідності з відповідними характеристиками по всіх чотирьох ітераціях при 100% збільшенні провідності елементів з номерами 0–5 внутрішнього шару (рис. 5, а) і елементів з номерами 63–72 зовнішнього шару (рис. 5, б), як найпоказовіші.

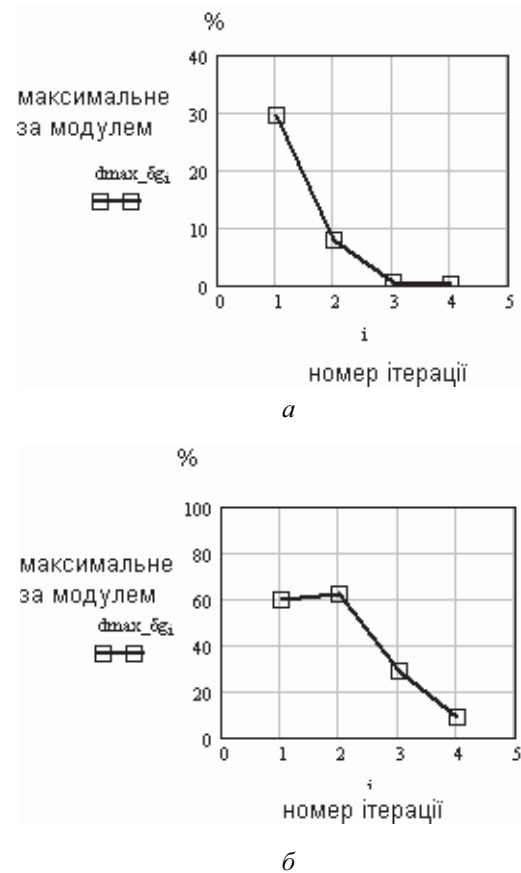


Рис. 5. Максимальне за модулем значення відносної похибки реконструкції при 100% збільшенні питомої провідності груп елементів по ітераціях

За результатами четвертої ітерації при моделюванні 100% збільшення питомої провідності шарів елементів отримано найменші значення всіх характеристик відносної похибки  $8 \cdot 10^{-6}\%$ ,  $7 \cdot 10^{-6}\%$ ,  $7 \cdot 10^{-6}\%$ ,  $3 \cdot 10^{-4}\%$  при 100% збільшенні питомої провідності внутрішнього шару елементів з номерами від 0 до 5, найбільші відповідно  $5 \cdot 10^{-3}\%$ , 0.01%, 0.01%, 0.05% при 100% збільшенні питомої провідності елементів третього внутрішнього шару з номерами від 24 до 53. На рис. 6, а, б наведено графіки розподілу максимальної відносної похибки реконструкції питомої провідності з відповідними характеристиками по всіх чотирьох ітераціях при 100% збільшенні провідності шарів елементів з номерами 0–5 внутрішнього шару (рис. 6, а) і елементів з номерами 24–53 третього внутрішнього шару (рис. 6, б), як найпоказовіші.

Як бачимо зі всіх наведених графіків, якщо на першій ітерації для всіх досліджуваних моделей максимальна похибка реконструкції становить декілька десятків відсотків, то вже на четвертій ітерації максимальне за модулем значення відносної похибки реконструкції становить декілька відсотків.



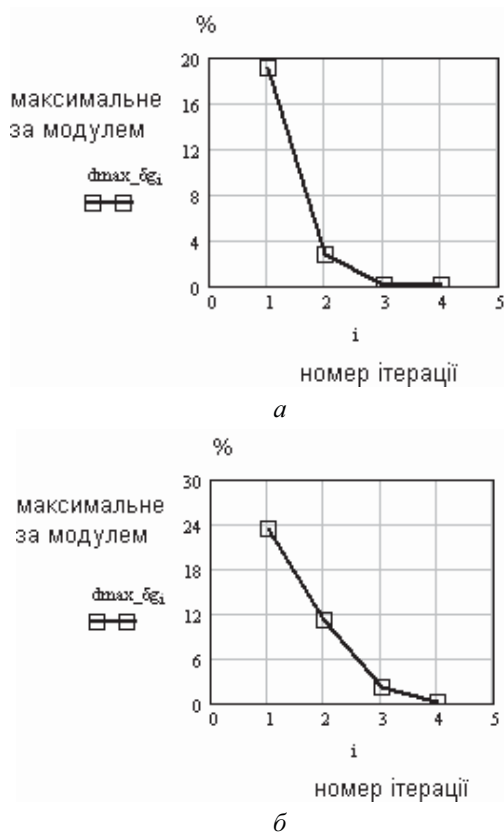


Рис.6. Максимальне за модулем значення відносної похибки реконструкції при 100% збільшенні питомої провідності шарів елементів по ітераціях

**6. Висновок.** Застосування розробленого нового алгоритму знаходження результату реконструкції питомої електричної провідності порівняно із відомими алгоритмами забезпечило вже на четвертій ітерації отримання методичних похибок реконструкції на рівні декілька відсотків; підвищення швидкості

збіжності ітераційної процедури (отримання результатів за декілька ітерацій порівняно із необхідністю здійснення десятків ітерацій відомими традиційними методами); зменшення часових затрат на отримання кінцевого результату реконструкції питомої електричної провідності.

1. Орнатский П.П. Теоретические основы информационно-измерительной техники. К.: Вища школа. 1984.
2. Дорожовець М., Ковальчик А. Аналіз сумісного впливу методичної та інструментальної похибок томографії провідності // Вимірювальна техніка та метрологія. – 2002. – № 59. – С. 115–118.
3. Деннис Дж., Шнабель Р. Численные методы безусловной минимизации и решения нелинейных уравнений. – М.: Мир, 1988. – 340 с.
4. Дорожовець М. Властивості електричних схем, еквівалентних апроксимації скінченними елементами та їх використання для відтворення образу в електричній томографії. 49. Internationales Wissenschaftliches Kolloquium Technische Universität Ilmenau 27. – 30. September 2004. – С.32–35.
5. Дорожовець М.М., Федорчук А.А., Петровська І.Р. Методика розв'язку прямої задачі томографії провідності // Автоматика, вимірювання та керування. – 1998. – №324. – С.43–51.
6. Дорожовець М. Електрична схема заміщення чотирикутного скінченного елемента // Вимірювальна техніка та метрологія. – 2003. – №62. – С. 19–24.
7. Дорожовець М.М., Петровська І.Р. Розрахунок матриці Якобі при застосуванні апроксимації чотирикутними скінченними елементами в електричній томографії // Автоматика, вимірювання та керування. – 2003. – №475. – С.99–104.
8. Савула Я.Г. Метод скінченних елементів. – К.: НМК ВО, 1993. – 100 с.
9. Дорожовець М., Ковальчик А. Підвищення точності одноітераційного алгоритму відтворення провідності багатоеlementних вимірювальних перетворювачів // Автоматика, вимірювання та керування. – 2002. – №445. – С.37–42.