

ОПРАЦЮВАННЯ ТА ПЕРЕТВОРЕННЯ ВИМІРЮВАЛЬНИХ СИГНАЛІВ

УДК 621.317

ПРЯМИЙ ТА ОПОСЕРЕДКОВАНИЙ МЕТОДИ ВІДТВОРЕННЯ ПРОВІДНОСТІ В ЕЛЕКТРИЧНІЙ ТОМОГРАФІЇ

© Михайло Дорожовець^{1,2}, Антон Пригородський¹, 2010

¹Національний університет “Львівська політехніка”,
кафедра інформаційно-вимірювальних технологій, вул. С. Бандери, 12, Львів, Україна
dorzhovets@polynet.lviv.ua
prygodsky.anton@gmail.com

²Ряшівська політехніка, вул. В.Поля, 2В, 35-959, Ряшів, Польща
michdor@prz.rzeszow.pl

Досліджено можливість застосування опосередкованого методу відтворення розподілу провідності для покращання збіжності ітераційних процедур розв’язання оберненої задачі томографії. Метод оснований на проміжному відтворенні розподілу резистивності. Показано, що цей метод забезпечує кращу збіжність ітераційних процедур розв’язання оберненої задачі томографії провідності.

Исследована возможность применения опосредованного метода воспроизведения распределения проводимости для улучшения сходимости итерационных процедур решения обратной задачи электрической томографии. Метод основывается на промежуточном воспроизведении распределения резистивности. Показано, что метод обеспечивает лучшую сходимость итерационных процедур решения обратной задачи томографии проводимости.

In this paper an opportunity of mediated conductivity distribution reconstruction method for inverse problem’s iterative procedures convergence improvement is investigated. This method based on intermediate resistance distribution reconstruction. It is shown that this method provides better convergence of resistance tomography inverse problem’s iterative procedures.

1. Вступ. Електричну томографію використовують для визначення просторового розподілу провідності, діелектричної проникності, комплексної провідності, магнітної проникності та інших пов’язаних з ними величин всередині об’єкта за результатами вимірювань зовнішніх електричних величин [1].

Суть томографії електричної провідності полягає в тому, що об’єкт у різних просторових ракурсах піддають зовнішньому електричному збудженню (зондуванню) і вимірюють його реакцію на ці збудження, і далі за множиною отриманих результатів вимірювань знаходять просторовий розподіл провідності всередині об’єкта. Для збудження і вимірювання використовують електроди, які розміщені на зовнішній поверхні об’єкта (рис. 1)[1].

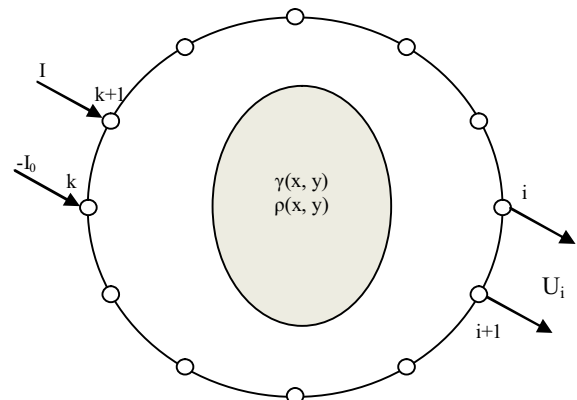


Рис. 1. Томографія провідності (резистивності): I_0 та $-I_0$ – струми збудження об’єкта з боку k -го та $k+1$ -го електродів; U_i – виміряне значення різниці потенціалів i -го та $i+1$ -го електродів

Задача знаходження просторового розподілу електричної провідності за результатами вимірювань зовнішніх електричних величин об'єкта, які є відгуком (реакцією) на зовнішні електричні збудження, за своєю суттю є нелінійною задачею. Застосовуючи той чи інший спосіб апроксимації електричних параметрів досліджуваного середовища та електричного поля в ньому, цю задачу можна звести до системи нелінійних рівнянь. Основними методами розв'язування таких систем є методи ньютонівського типу та оптимізаційні методи. В обох випадках – це ітераційні методи і на кожній ітерації для визначення наступного наближення шуканих величин виникає необхідність обчислення матриць похідних, зокрема, матриці Якобі – у ньютонівських методах та градієнтів – в оптимізаційних методах [1].

Переважає більшість алгоритмів реалізує прямий спосіб відтворення провідності на основі попереднього розрахунку матриці чутливостей результатів вимірювань до зміни провідності елементів:

$$J_{i,j}(\gamma_j) = \frac{\partial U_{meas,i}}{\partial \gamma_j}, \quad (1)$$

де $J_{i,j}(\gamma_j)$ – елемент матриці чутливостей; $U_{meas,i} = F(\gamma(x, y))$ – вимірне значення напруги як функція від розподілу провідності; $\gamma(x, y)$ – шуканий розподіл провідності.

Для томографії електричної провідності основним рівнянням для знаходження її розподілу $\gamma(x, y)$ є рівняння Ома у диференціальній формі для провідного середовища [2]:

$$j(x, y) = \gamma(x, y)E(x, y) = -\gamma(x, y)grad\phi(x, y), \quad (2)$$

де $j(x, y)$ – розподіл густини струму; $E(x, y)$ – вектор напруження електричного поля; $\phi(x, y)$ – розподіл електричного потенціалу.

Можна показати що, якщо провідність об'єкта дослідження збільшується у певну кількість разів, то за сталого струмового збудження об'єкта значення напруги (вимірюваних різниць потенціалів) зменшується у відповідну кількість разів, а елементи матриці чутливостей зменшуються у квадратичній залежності.

Зокрема, нехай значення провідності $\gamma(x, y)$ збільшиться у k разів, тобто нове значення дорівнюватиме:

$$\gamma_n(x, y) = k\gamma(x, y). \quad (3)$$

Тоді, оскільки за того самого збудження об'єкта струмом I_0 , розподіл вектора густини струму $j_n(x, y) = j(x, y)$ не змінюється, то рівняння (2) набуде вигляду:

$$j_n(x, y) = j(x, y) = -\gamma_n(x, y)grad\phi_n(x, y), \quad (4)$$

де $j_n(x, y)$ – новий розподіл вектора густини струму; $\phi_n(x, y)$ – новий розподіл електричного потенціалу.

Звідси:

$$grad\phi_n(x, y) = -\frac{j(x, y)}{\gamma_n(x, y)} = -\frac{j(x, y)}{k\gamma(x, y)}. \quad (5)$$

І звідси випливає, що нові значення вимірюваної напруги також зменшаться у k разів:

$$U_{\gamma_{meas},n} = \frac{U_{\gamma_{meas}}}{k}, \quad (6)$$

де $U_{\gamma_{meas},n} = F_n(\gamma_n(x, y))$ – нове значення вимірюваної напруги як функція від нового значення провідності.

Отже, елементи матриці чутливостей для нових значень провідності і нових значень вимірюваних напруг дорівнюватимуть:

$$J_{ni,j}(\gamma_{nj}) = \frac{\partial U_{\gamma_{meas},ni}}{\partial \gamma_{nj}} = \frac{1}{k^2} \cdot \frac{\partial U_{\gamma_{meas,i}}}{\partial \gamma_j} = \frac{1}{k^2} \cdot J_{i,j}(\gamma_j). \quad (7)$$

Як бачимо, є істотно нелінійна залежність змін вимірюваних напруг (обернено пропорційна), а ще більше – матриці чутливостей (обернено пропорційна до квадрата) змін провідності. На практиці провідність досліджуваного середовища рідко коли змінюється однаково у всьому просторі. Переважно такі зміни неоднорідні. Але характер залежностей (6) та (7) загалом зберігається. У зв'язку з цим для розв'язання такої задачі необхідно добре задавати початкове наближення і виконувати належну регуляризацію.

Метою роботи є дослідження можливості покращання умов відтворення шуканого розподілу провідності на основі застосування опосередкованого методу відтворення розподілу провідності – попереднього відтворення резистивності.

2. Опосередкований метод відтворення провідності.

Якщо замість провідності у залежності (2) використати її обернену величину – резистивність $\rho(x, y)$:

$$\rho(x, y) = \frac{1}{\gamma(x, y)}, \quad (8)$$

тоді для нового значення провідності $k\gamma(x, y)$ нове значення резистивності дорівнюватиме:

$$\rho_n(x, y) = \frac{1}{k\gamma(x, y)} = \frac{\rho(x, y)}{k}. \quad (9)$$

Із урахуванням (8) рівняння (2) набуде вигляду:

$$j(x, y) = -\frac{1}{\rho(x, y)} \text{grad}\varphi(x, y), \quad (10)$$

що, своєю чергою, можна записати як:

$$\rho(x, y)j(x, y) = -\text{grad}\varphi(x, y), \quad (11)$$

а для нового значення резистивності $\rho_n(x, y)$:

$$\rho_n(x, y)j(x, y) = -\text{grad}\varphi_n(x, y) \quad (12)$$

та

$$\frac{\rho(x, y)}{k} j(x, y) = -\text{grad} \frac{\varphi(x, y)}{k}. \quad (13)$$

З останнього рівняння бачимо, що збільшення чи зменшення резистивності зумовлює таке саме збільшення або зменшення значень вимірюваних напруг.

Натомість значення елементів матриці чутливостей змін вимірюваних напруг до змін резистивності:

$$J_{i,j}(\rho_j) = \frac{\partial U_{\rho_{meas}}}{\partial \rho_j} = \frac{\partial U_{\rho_{meas}}}{\partial \gamma_j} \cdot \frac{\partial \gamma_j}{\partial \rho_j} = -J_{i,j}(\gamma_j) \cdot \gamma_j^2, \quad (14)$$

де $U_{\rho_{meas}} = \Psi(\rho(x, y))$ – значення вимірної напруги як функція від резистивності; для нового значення резистивності зміняться до значень:

$$J_{ni,j}(\rho_{nj}) = -J_{ni,j}(\gamma_{nj}) \cdot \gamma_{nj}^2 = -\frac{1}{k^2} J_{i,j}(\gamma_j) \cdot k^2 \cdot \gamma_j^2 = -J_{i,j}(\gamma_j) \cdot \gamma_j^2 = J_{i,j}(\rho_j). \quad (15)$$

Із виразу (15) видно, що елементи матриці чутливостей не залежать від масштабних змін провідності (а, відповідно, й резистивності).

Незалежність матриці похідних (матриці Якобі) від масштабних змін резистивності дає змогу вибрати початкове наближення резистивності довільним, наприклад, 1 Ом·м.

Якщо насправді рівень резистивності істотно відрізняється від прийнятого, то цей масштаб буде врахований у значеннях вимірних напруг, які за сталого струмового збудження є пропорційними до масштабу резистивності $\rho(x, y)$:

$$U_{\rho_{meas}} \equiv I_0 \rho(x, y). \quad (16)$$

Завдяки цим властивостям функцій $U_{\rho_{meas}} = \Psi(\rho(x, y))$ слід очікувати значно кращих результатів щодо збіжності ітераційних процедур розв'язання оберненої задачі томографії.

3. Знаходження матриці Якобі для обох методів.

У літературі [1–3] показано, що елементи матриці Якобі можна розрахувати без методичної похибки (без заміни похідних на відношення приростів) і гранично швидко (всього за одне знаходження оберненої матриці, що відповідає прямій задачі).

Зокрема, для трикутних ($M=3$) чи чотирикутних ($M=4$) апроксимаційних елементів (див. рис. 2) матриця чутливостей розраховуватиметься:

$$J_{i,j}(\gamma_j) = \frac{1}{I_0} \sum_{m=1}^M S_{j,m} U_{j,m}(i) U_{j,m}(k), \quad (17)$$

де $S_{j,m}$ – коефіцієнт, який залежить лише від форми та співвідношення геометричних розмірів апроксимаційних елементів; $U_{j,m}(i) = R_{i,j} I_{j,m}(i)$ – спад напруги на m -й вітці j -го апроксимаційного елемента у разі його збудження з боку i -ї вітки; $U_{j,m}(k) = R_{i,j} I_{j,m}(k)$ – спад напруги на m -й вітці j -го апроксимаційного елемента у разі його збудження з боку k -ї вітки; I_0 – струм збудження об'єкта.

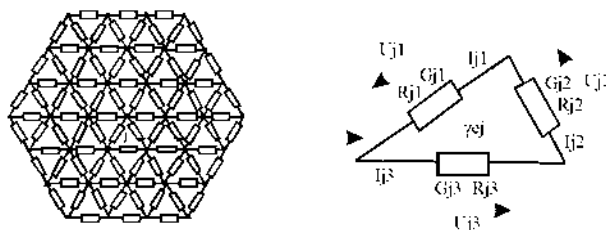


Рис. 2. Апроксимація трикутними елементами

Вираз (14) можна записати:

$$J_{i,j}(\rho_j) = -J_{i,j}(\gamma_j) \cdot \gamma_j^2 = -J_{i,j}(\gamma_j) \cdot \frac{1}{\rho_j^2}. \quad (18)$$

Підставивши (17) у (18), отримаємо:

$$J_{i,j}(\gamma_j) = -\frac{1}{I_0} \sum_{m=1}^M S_{j,m} \frac{U_{j,m}(i) U_{j,m}(k)}{\rho_j} = -\frac{1}{I_0} \sum_{m=1}^M C_{j,m} I_{j,m}(i) I_{j,m}(k), \quad (19)$$

де $C_{j,m}$ – коефіцієнт, який залежить лише від форми та геометричних розмірів апроксимаційних елементів.

Тобто чутливість змін вимірюваних потенціалів до змін резистивності може бути визначена як сума добутків струмів відповідних віток скінченного елемента при перестановці джерела струму I_0 між вітками i та k .

Якщо резистивність збільшимо в k разів, то розплив струмів не зміниться і у такому разі не зміняться значення елементів матриці чутливостей.

4. Опосередковане відтворення розподілу провідності. Розкладемо у ряд Тейлора нелінійну залежність вимірюваної напруги в околі початкових значень $\rho_{10}, \rho_{20}, \rho_{30}, \dots, \rho_{n0}$ (n – кількість елементів апроксимації):

$$U_{\rho_{measi}} = \Psi_i(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_i, \dots, \rho_n), \quad (20)$$

$$U_{\rho_{measi}} \approx \Psi_i(\rho_{10}, \rho_{20}, \dots, \rho_{i0}, \dots, \rho_{n0}) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial U_{\rho_{measi}}}{\partial \rho_j} (\rho_j - \rho_{j0}). \quad (21)$$

Обмежуючись лінійними членами розкладу, у матричній формі одержимо рівняння:

$$U(\rho) = U(\rho_0) + J(\rho_0)(\rho - \rho_0), \quad (22)$$

де $U(\rho)$ – вектор виміряних значень потенціалів; $U(\rho_0)$ – вектор розрахованих значень потенціалів; $J(\rho_0)$ – матриця чутливостей; ρ – вектор шуканих значень резистивності апроксимаційних елементів; ρ_0 – вектор початкових значень резистивності апроксимаційних елементів.

У літературі [4–5] показано, що для довільного ρ завжди справедлива залежність $U(\rho) = J(\rho)\rho$, тому вираз (22) набуває простого вигляду:

$$U(\rho) = J(\rho_0)\rho, \quad (23)$$

що відображає близьку до лінійної залежність $U(\rho)$.

Оскільки матриця $J(\rho_0)$ є прямокутною, то, щоб привести її до квадратної матриці, домножимо обидві частини виразу (23) на транспоновану матрицю Якобі $J^T(\rho_0)$:

$$J^T(\rho_0)U(\rho) = J^T(\rho_0)J(\rho_0)\rho. \quad (24)$$

Оскільки матриця Якобі розраховується наближено за дискретизованою прямою задачею у разі скінченної розрядності чисел, то гесіан:

$$HES = J^T(\rho_0)J(\rho_0) \quad (25)$$

виходить погано зумовленим. Це можна урахувати після першої (та кожної наступної) ітерації, застосувавши регуляризацию. Тоді вираз для визначення ρ матиме вигляд:

$$\rho^{(it+1)} = (HES^{it} + \mu_0^{it} \cdot \mu \cdot I_1)^{-1} J^T(\rho^{it})U(\rho), \quad (26)$$

де I_1 – одинична діагональна матриця; $\mu = \sqrt{n \cdot meps \cdot norm2(HES)}$ – параметр регуляризації; $\mu_0^{it} = 3 \cdot 10^{1-2 \cdot it}$ – регуляризаційний параметр, встановлений експериментально; $meps$ – машинний епсилон ($meps = 10^{-15}$).

Потім здійснюємо зворотне перетворення і знаходимо провідності:

$$\gamma_j = \frac{1}{\rho_j}. \quad (27)$$

5. Числове моделювання. Моделювання виконане для об'єкта, дискретизованого 96 апроксимаційними елементами із заданим початковим значенням провідності 1 См. Початкове значення провідності об'єкта, яке задано таким, що дорівнює $g_{m0} = 0,001$ См, збільшується на 100 % для елементів із номерами 0, 12, 36 та 54.

Визначені максимальні похибки знаходження значень провідності для елементів із вказаними номерами за виразом:

$$\gamma_{gi\max} = \left| \frac{g_{rec,it} - g_{mi}}{g_{m0}} \cdot 100\% \right|, \quad (28)$$

де $g_{rec,it}$ – реконструйоване значення провідності на ітерації з номером it ; g_{mi} – значення провідності i -го елемента об'єкта.

Графічні залежності значень похибок на кожній ітерації наведено на рис. 3 та 4.

Дослідження для інших випадків дали подібні результати.

Метод безпосереднього визначення провідності, внаслідок того, що початкове наближення приймається таким, що дорівнює 1 См, яке є у 1000 більшим за про-

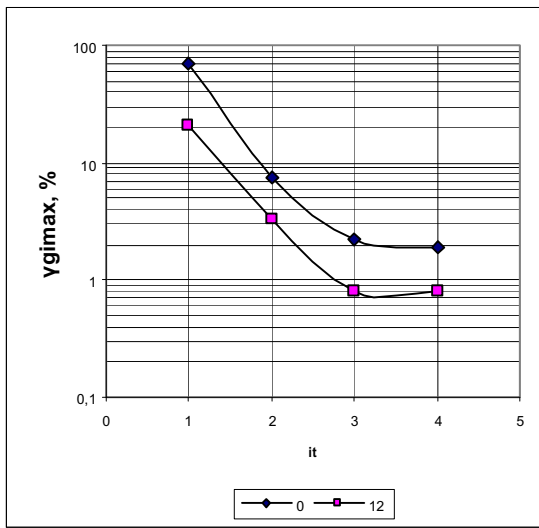


Рис. 3. Максимальні похибки знаходження значень провідності для елементів із номерами 0, 12

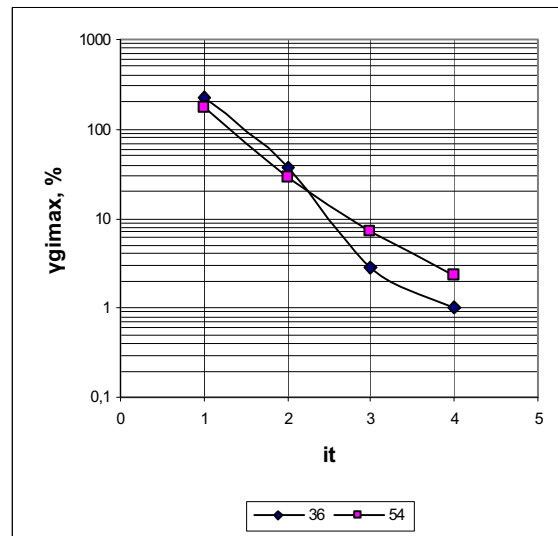


Рис. 4. Максимальні похибки знаходження значень провідності для елементів із номерами 36, 54

відність об'єкта (0,001 См), не забезпечує автоматичного відтворення. Для цього слід використовувати спеціальні заходи, наприклад, визначати середнє значення

відношення $\frac{U_{measi}}{U_{calci}}$ і, відповідно, змінити початкове

наближення провідності. Інший спосіб полягає у застосуванні на першій ітерації опосередкованого методу, а на наступних – прямого, з використанням як початкового наближення результату першої ітерації.

Однак і у цьому випадку, якщо стрибок провідності стає великим (у дослідженнях електричної томографії приймають до 100–200 %), то відтворення провідності може знову перестати бути збіжним.

Натомість відтворення резистивності, завдяки більшій лінійності змін вимірюваних напруг до змін резистивності елементів, дає кращий результат з погляду швидкості збіжності.

6. Висновки. Опосередкований метод відтворення провідності, із проміжним відтворенням резистивності, забезпечує кращу збіжність ітераційних процедур розв'язання оберненої задачі томографії провідності. Це

зумовлено лінійнішою залежністю змін вимірюваних напруг до змін резистивності досліджуваного об'єкта.

1. Дорожовець М.М. Використання теореми варіацій для розрахунку матриці Якобі для оберненої задачі електричної томографії // Вісник Держ. ун-ту "Львівська політехніка", "Електроенергетичні та електромеханічні системи". – № 479. – 2003. – С. 67–71. 2. Brydak K., Dorozhovets M. Szybka metoda rozwiązania zagadnienia odwrotnego tomografii elektrycznej // Pomiar, Automatyka, Kontrola. N9_bis, 2007, T.II, s.425–428. 3. Дорожовець М.М., Ковальчик А., Петровська І. Вісник Держ. ун-ту "Львівська політехніка", "Комп'ютерна інженерія та інформаційні технології". – №4 68. – 2002. С. 139–145. 4. Дорожовець М.М. Дослідження властивостей нелінійних функцій, які описують обернену задачу електричної томографії // Вимірювальна техніка та метрологія. – № 58. – 2001. – С. 16–19. 5. Дорожовець М.М. Математичні проблеми реконструкції образів в технічній томографії // Вимірювальна техніка та метрологія. – № 53. – 1998. – С. 3–18.