ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
"Фізико-математичні науки"
Вип.660 № 660, (2009) с. 68–74

JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY
"LVIVSKA POLITECHNIKA"
"Physical & mathematical sciences"
Vol.660 No 660, (2009) 68–74

МЕТОД СОКОЛОВА І ТЕОРІЯ ТА ЗАСТОСУВАННЯ ПРОЕКЦІЙНО-ІТЕРАТИВНИХ І ДВОСТОРОННІХ МЕТОДІВ У ПРАЦЯХ М.С. КУРПЕЛЯ

А.Ф. Обшта, Б.А. Шувар

Національний університет "Львівська політехніка"
вул. С. Бандери 12, 79013, Львів, Україна

(Отримано 2 грудня 2009 р.)

Подано огляд основ теорії проекційно-ітеративних методів та загальної теорії наближених методів розв'язання операторних рівнянь, створеної М.С. Курпелем (до тридцятиріччя пам'яті Миколи Степановича Курпеля).

Ключові слова: наближені методи, інтегральні рівняння, проекційно-ітеративні методи, операторні рівняння.

2000 MSC: 31B10

УДК: 517.948/517.946

У прикладних дослідженнях математичних моделей реальних явищ доводиться задовольнятися лише наближеною інформацією щодо об'єкта, який вивчають. В обидвох практикованих в математичній науці підходах для отримання такої інформації, – у кількісній і якісній теоріях, – проблемою є не наближений характер відповіді, а великий обсяг необхідних обчислень. Як зазначено, наприклад, в [1, с. 33], відповідні алгоритми прийнято називати обчислювальними або числовими методами. Важливі класи таких методів – різницеві, проекційні та ітераційні – мають широкі застосування як для обґрунтування розв'язності, так і для практичного відшукання розв'язків тих чи інших класів операторних рівнянь. Запропонований 1952 року (див. [2]) метод осереднення функціональних поправок Ю.Д. Соколова дав поштовх до створення нових способів побудови наближених методів, поєднуючи ідеї різних алгоритмів таким способом, щоб нові конструкції давали можливість використати переваги кожного з них. Дослідження цього методу в термінах операторних рівнянь належать Е.А. Чернишенко, А.Ю. Лучці [3], М.С. Курпелеві [4], а у застосуванні до окремих класів операторних рівнянь – В.І. Тивончуку, Л.Є. Кривошеїну, К.Б. Бараталієву, Б.Г. Мосолову та низці інших авторів. Первісний варіант методу осереднення функціональних поправок запропонував Ю.Д. Соколов як метод наближеного розв'язання лінійного інтегрального рівняння

$$x(t) = \varphi(t) + \int\limits_a^b K(t,s)x(s)ds. \tag{1}$$

Він описується за допомогою формул

$$x_{n+1} = \varphi(t) + \int\limits_a^b K(t,s)[x_n(s) + \alpha_{n+1}]ds, \tag{2}$$

$$\alpha_{n+1} = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b (x_{n+1}(s) - x_n(s))ds, x_0(t) = 0. \tag{3}$$

Поправку α_{n+1} на кожному кроці ітераційного процесу знаходять за формулою

$$\left(b - a - \int\limits_a^b\int\limits_a^b K(t,s)dsdt\right)\alpha_{n+1} = \int\limits_a^b \varphi(t)dt +$$

$$+ \int\limits_a^b\int\limits_a^b K(t,s)x_n(s)dsdt - \int\limits_a^b x_n(t)dt. \tag{4}$$

Для нелінійного інтегрального рівняння, записаного у вигляді

$$x(t) = \varphi(t) + \int\limits_a^b K(t,s)f[t,s,x(s)]ds, \tag{5}$$

послідовність $\{x_n(t)\}$ за методом Соколова визначають за допомогою формул (див. [4, с. 13, 14])

$$x_{n+1} = \varphi(t) + \int\limits_a^b K(t,s)f[t,s,x_n(s) + \alpha_{n+1}]ds, \tag{6}$$

де α_{n+1} та $x_0(t)$ означені за формулами (3). Для знаходження поправки α_{n+1} маємо алгебраїчне або трансцендентне рівняння

$$(b-a)\alpha_{n+1} = \int\limits_a^b \varphi(t)dt +$$

$$+ \int\limits_a^b\int\limits_a^b K(t,s)f[t,s,x_n(s) + \alpha_{n+1}]dsdt. \tag{7}$$

Безпосередні узагальнення методу Соколова для нелінійного операторного рівняння вигляду

$$x = Tx, \tag{8}$$

у якому оператор T діє з простору E, структурно нормованого елементами архімедового K-лінеалу N, в E, досліджені М.С. Курпелем (див., зокрема, [4, с. 68–78]). Ці алгоритми описуються формулами

$$\text{а)} x_{n+1} = PTx_{n+1} + QTx_n, \tag{9}$$

$$\text{б)} x_{n+1} = T(Px_{n+1} + Qx_n), \tag{10}$$

$$\text{в)} x_{n+1} = PTx_{n+1} + QT(Px_{n+1} + Qx_n), \tag{11}$$

де P – лінійний оператор ($P = P^2$), що проектує простір E на його підпростір E_p, $Q = I - P$, I – тотожний оператор. М.С. Курпелеві належить самий термін «проекційно-ітеративні» методи. Ці методи поєднують ідеї проекційних методів, зокрема, методу Рітца, методу Гальоркіна, методу найменших квадратів, методів моментів та інших відомих і часто вживаних у теоретичних дослідженнях та при практичному розв'язанні математичних моделей прикладних наук наближених методів, відомих також, як варіаційні та як прямі методи, з ідеєю ітераційних уточнень знайдених наближень. Створений новий клас наближених методів дав можливість використовувати переваги як одних, так і інших і сприяв розширенню можливостей їх застосувань як практичних обчислювальних методів. Алгоритми (9)–(11) є прикладами проекційно-ітеративних аналогів проекційних методів вигляду

$$\text{а)} x_{n+1} = PTx_{n+1}, \tag{12}$$

$$\text{б)} x_{n+1} = TPx_{n+1}, \tag{13}$$

$$\text{в)} x_{n+1} = PTx_{n+1} + QTPx_{n+1}. \tag{14}$$

Проекційні методи (12)–(14) відрізняються від проекційно-ітеративних методів (9)–(11) насамперед тим, що знайдене наближення x_n не використовується при знаходженні наближення x_{n+1}. Це спричинює незручності при обчислювальній реалізації. Складність їх теоретичного дослідження засвідчують численні публікації у минулому столітті після появи методу Рітца 1911-го року та методу Гальоркіна 1915-го року. Дослідженню методу Рітца у застосуванні до задач математичної фізики присвячені низка праць М.М. Крилова і М.М. Боголюбова, а також Л.В. Канторовича, С.Г. Михліна та ін. Збіжність методу Гальоркіна для крайових задач досліджували М.В. Келдиш, Л.В. Канторович, С.Г. Михлін, М.І. Польський, М.А. Красносельський. Методу найменших квадратів та методу моментів присвячені роботи М.П. Кравчука та М.М. Крилова і М.М. Боголюбова, а також С.Г. Михліна, А. Лангенбаха, В.М. Фрідмана. Зазначимо, що для лінійного рівняння вигляду

$$y = Ax + b \tag{15}$$

з лінійним неперервним оператором A, який діє у банаховому просторі E, алгоритми вигляду (9)–(11) докладно досліджені у низці праць А.Ю. Лучки. Першим підсумкам дослідження цих методів і їх численним застосуванням з конкретизаціями оператора P та з виокремленням реальних класів лінійних операторів A присвячена монографія [3]. У другій половині XX століття увійшли до наукового обігу та практичного вжитку й інші «синтетичні» методи, до яких можна зарахувати, наприклад, проекційно-сіткові методи Г.І. Марчука [5], числово-аналітичні методи А.М. Самойленка [6] та ін.

Основні результати монографії [4] стосуються побудови загальної теорії проекційно-ітеративних методів для операторних рівнянь в абстрактних метричних і нормованих просторах, що вписуються в достатньо загальну схему теорії наближених методів з використанням спеціально розробленого в [4] апарату мажорантної методики дослідження збіжності та отримання оцінок похибок досліджуваних методів. З-поміж ітераційних методів розв'язання рівняння (8), наведемо задля прикладу алгоритм

$$x_{n+1} = T_{n+1}(x_{n+1}, x_n) \quad (n = 0, 1, \ \ldots), \tag{16}$$

де T_n – деякі оператори, що діють з $E \times E$ в E, причому E є простором, що нормований елементами архімедового лінеалу N, $x_0 \in E$. Припускаємо, що на множині розв'язків x рівняння (8), які належать до деякої замкненої множини D простору E, справджується умова

$$\lim_{n\to\infty} \|T_n(x,x) - Tx\| = 0, \tag{17}$$

де під збіжністю розуміємо рівномірну збіжність в E з нормою $\|\cdot\|$, яка є елементом архімедового лінеалу N. Має місце такий результат.

Теорема 1. [4, стор. 52–59]. *Нехай рівняння (8) має розв'язок x, що належить до множини D, а рівняння (16) при кожному $n = 0, 1, \ \ldots$ має розв'язок x_{n+1}, що належить до тієї самої множини D. Нехай оператори T_n мають ту властивість, що для всіх $x, y, z, t \in D$ справджуються нерівності*

$$\|T_n(x,y) - T_n(z,t)\| \le M_n \|x - z\| + K_n \|y - t\|$$

і при кожному $a \in N$ збігаються рівномірно ряди $\sum\limits_{i=0}^{\infty} M_i a$ та $\sum\limits_{i=0}^{\infty} P_i a$ з операторами M і P, для яких маємо $M_n \le M$, $K_n \le K$, $P = (I - M)^{-1}K$ (тут I – тотожний оператор). Тоді рівняння (8) має єдиний розв'язок у множині D і для збіжності послідовності $\{x_n\}$, утвореної за допомогою формул (16), до розв'язку рівняння (8) з будь-яким початковим наближенням $x_0 \in D$ умова (17) є необхідною і достатньою. При тому мають місце такі оцінки похибки n-го наближення:

$$\|x - x_n\| \le (I - M_n)^{-1} K_n \|x - x_{n-1}\| + (I - M_n)^{-1} a_n$$

та

$$\|x - x_n\| \le P^n \|x - x_0\| + \sum_{i=0}^{n-1} P^i (I - M)^{-1} a_{n-1},$$

де $a_k = \|T_k(x,x) - Tx\|$.

Ця теорема є частковим випадком загальнішого результату М.С. Курпеля, встановленого в [4]. З іншого боку, вона охоплює низку результатів Й. Шмідта, Й. Шредера, Л.В. Канторовича як частинні випадки. Зокрема, істотно спрощуються щойно наведені оцінки похибок, якщо оператори T_n задовольняють співвідношення $x = T_n(x,x)$ при $x \in D$, бо $a_n = \theta$ $(n = 0,1,...)$, де θ – нульовий елемент в N. В тому випадку, коли рівність (17) має вигляд $\lim\limits_{n\to\infty} \|T_n(x_{n-1},x_{n-1}) - Tx_{n-1}\| = 0$, отримується один з результатів Й. Шмідта (див. [4, с. 55–57]). Якщо замість нестаціонарного ітераційного процесу розглядається стаціонарний алгоритм, який відрізняється від алгоритму (16) тим, що оператор T_{n+1} є одним і тим самим при кожному $n = 0,1,...$, з наведеного результату отримується низка відомих результатів, чимало з яких наведені в [4].

Для ілюстрації наведеного розглянемо приклад, коли рівняння (8) має вигляд (див. [4, стор. 63, 64])

$$x = F(x,x)$$

і для $(i = \overline{2,k})$ приймемо

$$T_1(x,y) = F(x,y), T_i(x,y) = T(x, T_{i-1}(x,y)).$$

Припускаємо, що на деякій замкненій множині D простору E, який є структурно нормованим за допомогою архімедового K-лінеалу N, справджується умова

$$\|F(x,y) - F(z,t)\| \le M\|x-z\| + L\|y-t\|,$$

де M і L є лінійними неперервними додатними операторами в архімедовому K-лінеалі N. Якщо при кожному $n = 1,2,...$ рівняння (16) має розв'язок $x_{n+1} \in D$ і при всякому $a \in N$ рівномірно збігаються ряди $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \Delta_k^i a$, $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \gamma_k^i a$, де

$$\Delta_k = \sum_{i=0}^{k-1} L^i M, \gamma_k = (I - \Delta_k)^{-1} L^k,$$

то послідовність $\{x_n\}$ цих розв'язків збігається до єдиного на множині D розв'язку x^* рівняння

$$x = T_n(x,x)$$

при будь-якому $x_0 \in D$. При $(1 \le p \le n)$ має місце оцінка

$$\|x - x_n\| \le (1-\gamma_k)^{-1}\gamma^{n-p-1}\|x_p - x_{p-1}\|.$$

Очевидно, що з існування розв'язку рівняння (8) випливає також, що він єдиний і його можемо ототожнити з x^*. З низки числових ілюстративних прикладів із [4] подаємо приклад 9 із [4, стор. 203]. Нелінійне інтегральне рівняння

$$x(t) = -\frac{1}{20}t + \int_0^1 [x^2(s) + \frac{1}{10}tsx(s)]ds$$

має два розв'язки $x^*(t) = 1$ та $x^{**}(t) = -\frac{183}{3541}t + \frac{3}{3541}$. Для наближеного розв'язання цього рівняння застосуємо наведений спосіб побудови ітерацій, прийнявши

$$F(x,y) = -\frac{1}{20}t + \int_0^1 [x^2(s) + \frac{1}{10}t \cdot s \cdot y(s)]ds.$$

Матимемо

$$T_k(x,y) = -\frac{3}{58}(1 - \frac{1}{30^k})t + \\ + \int_0^1 [[1 + \frac{3}{58}(1 - \frac{1}{30^{k-1}})t]x^2(s) + \\ + \frac{1}{10 \cdot 30^{k-1}} tsy(s)]ds.$$

Ітераційний процес (16) матиме вигляд

$$x_n(t) = -\frac{3}{58}(1 - \frac{1}{30^k})t + \\ + \int_0^1 [[1 + \frac{3}{58}(1 - \frac{1}{30^{k-1}})t]x_n^2(s) + \\ + \frac{1}{10 \cdot 30^{k-1}} tsx_{n-1}(s)]ds.$$

Вибравши за початкове наближення $x_0(t) = 0$, отримаємо дві послідовності ітерацій, одна з яких збігається до розв'язку $x^*(t) = 0$, а друга – до розв'язку $x^{**}(t) = -\frac{183}{3541}t + \frac{3}{3541}$. Зазначимо, що звичайний метод послідовних наближень $x_{n+1} = F(x_n, x_n)$ при $x_0(t) = 0$ генерує послідовність наближень, яка збігається до $x^{**}(t)$.

М.С. Курпелеві належить низка нових двосторонніх методів апроксимації розв'язків операторного рівняння (8) у термінах напівупорядкованих просторів за припущень, які не вимагають монотонності та опуклості оператора в рівнянні (8). Більшість з цих результатів використовує поняття крайнього розв'язку системи рівнянь

$$y = F_1(y,z), z = F_2(z,y), \tag{18}$$

запроваджене М.С. Курпелем. Нехай E – напівупорядкований простір і $F_1(y,z)$, $F_2(y,z)$, E_1 – деяка множина в E. Розв'язок (y^*, z^*) системи (18) названо М.С. Курпелем крайнім в E_1 розв'язком її, якщо $y^*, z^* \in E_1$ і для всякого іншого розв'язку (y,z) $(y^*, z^* \in E_1)$ мають місце співвідношення

$$y^* \le y \le z^*, y^* \le z \le z^*.$$

Курпелеве поняття крайнього розв'язку системи (18) узагальнює поняття нижнього y^* та верхнього z^* розв'язків рівняння (8) так, що компоненти крайнього розв'язку системи (18) є відповідно нижнім і верхнім розв'язками рівняння (8), якщо це рівняння має нижній і верхній розв'язки (див., напр. [7, 8]).

Один з найзагальніших двосторонніх методів М.С. Курпеля для, взагалі кажучи, нелінійного рівняння (8) з немонотонним оператором T можна описати як ітераційний алгоритм, побудований за допомогою формул

$$y_{u+1} = T_1(y_{u+1}, z_{u+1}, y_n, z_u),\\ z_{u+1} = T_2(z_{u+1}, y_{n+1}, z_u, y_n) \ \ (n = 0, 1, ...) \tag{19}$$

за таких припущень. Нехай

$$E_1 = \{x : a \le x \le b, x, a, b \in E\}$$

є відрізком в правильно частково упорядкованому просторі E. Позначаємо також $E_1 = [a; b]$. Рівняння (8) розглянемо, вважаючи, що існують оператори $T_1(p, q, y, z)$, $T_2(p, q, y, z)$:$E_1 \times E_1 \times E_1 \times E_1 \to E_1$, для яких при $x \in E_1$ мають місце співвідношення

$$T_1(x, x, x, x) \le Tx \le T_2(x, x, x, x). \tag{20}$$

Нехай справджуються такі вимоги: 1) із співвідношень

$$p_n \uparrow p, \ q_n \downarrow q, \ y_n \uparrow y, \ z_n \downarrow z\\ (p, q, y, z, p_n, q_n, y_n, z_n \in E_1 \, \forall n = 1, 2, ...)$$

випливають співвідношення

$$T_1(p_n, q_n, y_n, z_n) \uparrow T_1(p, q, y, z),$$

$$T_2(q_n, p_n, z_n, y_n) \downarrow T_2(q, p, z, y),$$

де співвідношення $x_n \uparrow x$ та $x_n \downarrow x$ розумітимемо як збіжність монотонно зростаючої та відповідно монотонно спадаючої послідовності $\{x_n\}$ у трактуванні збіжності у правильно частково упорядкованих просторах; 2) якщо $p, q, y, z \in E_1$, то

$$T_1(p, q, y, z) \le T_2(p, q, y, z).$$

Умова 1) справджується, зокрема, якщо оператори $T_1\,(p,\, q,\, y,\, z), T_2\,(p,\, q,\, y,\, z)$, є неперервними за сукупністю аргументів і при цьому з нерівностей $p_1 \le p_2$, $q_1 \ge q_2$, $y_1 \le y_2$, $z_1 \ge z_2$ $(p_i,\, q_i,\, y_i,\, z_i \in E_1;\, i = 1,\, 2)$ випливають нерівності

$$T_i\,(p_1,\, q_1,\, y_1,\, z_1) \le T_i\,(p_2,\, q_2,\, y_2,\, z_2) \quad (i = 1,\, 2)\,.$$

Для алгоритму (19) за виконання зазначених припущень і при виборі $x_0 = a$, $y_0 = b$, має місце такий результат М.С. Курпеля.

Теорема 2. [8, с. 57, 58]. *Для кожного n=0, 1, ... існує крайній на відрізку $[y_n,\, z_n]$ розв'язок $(y_{n+1},\, z_{n+1})$ системи рівнянь (19). Послідовності $\{y_n\}$, $\{z_n\}$, побудовані за формулами (19) з початковим наближенням $x_0 = a$, $y_0 = b$, збігаються відповідно до компонент y^*, z^*, крайнього на відрізку $[a,\, b]$ розв'язку $(y^*,\, z^*)$ системи рівнянь*

$$y = T_1\,(y,\, z,\, y,\, z)\,,$$

$$z = T_2\,(z,\, y,\, z,\, y)$$

і справджується співвідношення

$$y_n \le y_{n+1} \le y^* \le x \le z^* \le z_{n+1} \le z_n\,(n = 0,\, 1,\, ...)\,,$$

якщо тільки x є розв'язком рівняння (8), який належить до відрізка $[a,\, b]$.

Відмітимо майже очевидний факт, що у випадку, коли оператори T_1 і T_2 є ідентичними при p=q=y=z=x, то з теореми 2 неважко отримати наслідки, які гарантують існування розв'язку рівняння (8). Зазначимо також, що М.С. Курпель дослідив алгоритми вигляду (19), у яких замість операторів T_1 і T_2 фігурують ітеровані оператори $T_1^{(k)}$, $T_2^{(k)}$. Це дозволяє покращити збіжність ітерацій. Курпелеві алгоритми вигляду (19) та інші двосторонні методи, досліджені М.С. Курпелем, при обґрунтуванні не потребують монотонності оператора $F\,(x,\, x)$ щодо x.

Запропоновані в [9–12] та у низці інших праць двосторонні алгоритми обґрунтовуються з використанням спеціальних тверджень, відомих як теореми про операторні нерівності, зокрема, як теореми про диференціальні та теореми про інтегральні нерівності (див., напр., [13–19]). Ці теореми мають численні застосування в теорії двосторонніх і монотонних ітераційних методів, в теорії асимптотичних методів розв'язання диференціальних рівнянь (див., напр. [15]), в теорії числово-аналітичних методів А.М. Самойленка (див. [6]) тощо. Інтегральні та диференціальні нерівності є одним з основних інструментів якісної теорії диференціальних рівнянь. Найістотнішою в теорії операторних нерівностей є вимога монотонності оператора T у рівнянні $x = Tx$. Двостороннім операторним нерівностям з немонотонним оператором присвячена ініційована М.С. Курпелем монографія [8], у якій ці нерівності систематично використовуються для обґрунтування двосторонніх ітераційних методів. Започатковані в [8] дослідження двосторонніх методів та двосторонніх операторних нерівностей продовжені у низці досліджень учнів і послідовників М.С. Курпеля, зокрема, у [20, 21], а також в [22–26]. Ці результати є новими як щодо структури і теорії алгоритмів двосторонніх методів, зокрема, щодо обґрунтування їх збіжності, так і щодо тверджень про загальні двосторонні операторні нерівності та їх конкретизації для окремих класів операторів. Зокрема, новими є досліджені в [21, 25] двосторонні алгоритми для крайових задач.

М.С. Курпелеві належить новий метод двосторонньої апроксимації розв'язку задачі Коші для звичайного диференціального рівняння

$$x'\,(t) = f\,(t,\, x\,(t))\,, x\,(t_0) = x_0,$$

опублікований 1969 року [9] і трактований М.С. Курпелем як узагальнення відомого двостороннього методу Чаплигіна, котрий, як встановив 1951 року М.М. Лузін, має квадратичний характер збіжності. Метод Курпеля в абстрактному викладі докладно досліджено в [10] (див. також [8]) для операторного рівняння вигляду

$$Lx = T\,(x,\, x) \tag{21}$$

з умовою
$$Sx = r \tag{22}$$
за припущення, що $L : D \to E_1$, $S : D \to E_2$, $T(y, z) : D \times D \to E_1$, $D \subseteq E$ – опукла підмножина простору E, оператори L, S є лінійними неперервними в області D. Припустимо, що існує лінійний неперервний обернений оператор L^{-1}. Вважаємо, що E, E_1, E_2 є напівупорядкованими просторами. Нехай, крім того, простори E_1 і E_2– структурно нормовані за допомогою архімедових лінеалів N і N_1 відповідно. Припустимо, що нелінійний оператор $T(y, z)$ є неперервним за сукупністю аргументів y, z в області $D \times D$ і має перші похідні за y і за z, які позначимо відповідно через $T_1(y, z)$ і $T_2(y, z)$, причому оператори $T_1(y, z)\, w$, $T_2(y, z)\, w$ як лінійні оператори щодо w є лінійними обмеженими (неперервними) операторами при будь-яких y, $z \in D$. Означимо послідовні наближення y_{n+1}, z_{n+1} до розв'язку рівняння (21) з умовою (22) за допомогою формул
$$\begin{aligned} Ly_{n+1} = T_1(y_n, y_n)(y_{n+1} - y_n) + \\ +T_2(y_n, y_n)(z_{n+1} - z_n) + T(y_n, z_n), \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} Lz_{n+1} = T_1(y_n, y_n)(z_{n+1} - z_n) + \\ +T_2(y_n, y_n)(y_{n+1} - y_n) + T(z_n, y_n), \end{aligned} \tag{23}$$
$$Sy_{n+1} = Sz_{n+1} = r \qquad (r \in E_2), \tag{24}$$
де y_0, $z_0 \in D$ задовольняють співвідношення
$$\begin{aligned} Ly_0 \le T(y_0, z_0), \\ Lz_0 \ge T(z_0, y_0) \end{aligned} \tag{25}$$
та $Sy_0 = Sz_0 = r$. Має місце таке твердження.

Теорема 3. [8, с. 81–83]. *Нехай y_0, z_0 вибрані зазначеним способом і при виконанні сформульованих вимог щодо просторів і операторів, про які йдеться в алгоритмі (23), (24), справджуються припущення: А) якщо x, y, $z \in D$, $Sx = Sy = Sz = r$, то*
$$T(x, z) - T(y, z) \ge T_1(y, z)(x - y),$$
$$T(z, x) - T(z, y) \le T_2(z, y)(x - y);$$
Б) оператор $T_1(y, z)$ не спадає щодо y і z, а оператор $T_2(y, z)$ не зростає щодо y і z; В) якщо x, y, z, $t \in D$ задовольняють рівності $Sx = Sy = \theta_1$, $Sz = St = r$, де θ – нульовий елемент простору E_1, то з нерівностей
$$Lx \ge T_1(z, t)\, x - T_2(z, t)\, y,$$
$$Ly \ge T_1(t, z)\, y - T_2(t, z)\, x$$
випливає, що $x \ge \theta_1$, $y \ge \theta_1$. Тоді з розв'язності задачі (23), (24) для кожного $n = 0, 1, \ldots$ випливають співвідношення
$$Ly_{n+1} \le T(y_{n+1}, z_{n+1}),$$
$$Lz_{n+1} \ge T(z_{n+1}, y_{n+1})$$
та $y_0 \le y_1 \le \ldots \le y_n \le \ldots \le z_n \le \ldots \le z_1 \le z_0$. Якщо, крім того, існує розв'язок x^* задачі (21), (22), який належить до області D, то матимемо $y_0 \le y_1 \le \ldots \le y_n \le \ldots \le x^* \le \ldots \le z_n \le \ldots \le z_1 \le z_0$.

Зазначимо, що твердження цієї теореми залишається незмінним, якщо елементи $y_0, z_0 \in D$ задовольняють співвідношення $u_0 \le x \le v_0$ за припущення, що розв'язок $x \in D$ рівняння (21) існує, й елементи y_1, z_1 визначені за (23), (24), задовольняють співвідношення $y_0 \le y_1$, $z_0 \ge z_1$. Оцінки збіжності ітераційного процесу (23), (24) можна отримати, доєднавши до вимог попередньої теореми додаткові припущення. Нехай простори E, E_1 є структурно нормованими за допомогою архімедових лінеалів N, N_1 відповідно і норма $\|x\| \in N$ додатніх елементів $x \in E$ монотонна. Нехай, крім того, в N і N_1 означений добуток елемента на елемент.

Постулюємо припущення: *Г) для кожного $x \in D$ існує обернений оператор $A(x) = (L - T_1(x,x) + T_2(x,x))^{-1}$, причому оператор $A(x)$ є ліпшицієм з оператором Ліпшиця $Q : N \to N$; Д) при всіх $x, y, z \in D$, $sx = s_y = sz = rQ : N \to N$, оператори T_1, T_2 задовольняють умови Ліпшиця*
$$\|T_1(x,z) - T_1(y,z)\| \le L_1 \|x - y\|,$$
$$\|T_2(z,x) - T_2(z,y)\| \le L_2 \|x - y\|,$$
де L_1, $L_2 : N \to N$; Е) послідовність $\{\sigma_n\}$, для якої
$$\sigma_n = B\sigma_n^2 \quad (n = 1, 2, \ldots),$$
$\sigma_0 = \|y_0 - z_0\|$; $B = \frac{1}{2}Q(L_1 + L_2)$, збігається рівномірно в N, причому
$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \theta_N.$$
Тут θ_N – нульовий елемент в N. Виконання умов А) – Е) забезпечує рівномірну збіжність послідовностей $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ до розв'язку x^* задачі (21), (22), а також є підставою для оцінок похибки
$$\|x^* - y_n\| \le \sigma_n,\ \|z_n - x^*\| \le \sigma_n \quad (n = 0, 1, \ldots).$$
Якщо простори E і E_1 є банаховими, то оператори L_1, L_2, Q та B позначають дію множення дійсних чисел. У цьому випадку отримані оцінки тривіальним способом призводять до оцінок
$$\|x^* - y_n\| \le B^{2^n - 1} \|z_0 - y_0\|,$$
$$\|z_n - x^*\| \le B^{2^n - 1} \|z_0 - y_0\|.$$
Для збіжності процесу у цій ситуації достатньо нерівності $B\|z_0 - y_0\| \le q < 1$. Крім алгоритму (23), (24), під двосторонніми методами Курпеля розуміємо й інші алгоритми, які узагальнюють метод Чаплигіна. Одним з різновидів методів Курпеля є алгоритм, коли замість (23) використовуються формули
$$\begin{aligned} Ly_{n+1} = T_1(z_n, z_n)(z_{n+1} - z_n) + \\ +T_2(z_n, z_n)(y_{n+1} - y_n) + T(z_n, y_n), \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} Lz_{n+1} = T_1(z_n, z_n)(y_{n+1} - y_n) + \\ +T_2(z_n, z_n)(z_{n+1} - z_n) + T(y_n, z_n) \end{aligned} \tag{26}$$

разом з формулами (24). Використовуються відповідні корективи в умовах, що забезпечують потрібні властивості алгоритму (26), (24). Зокрема, у формулах (26) оператор $T_1(x, y)$ не зростає щодо x, y. Докладний аналіз загальніших за метод Курпеля двосторонніх алгоритмів зроблено в [20] та [21]. Характерною відмінністю методу Курпеля від узагальнень методу Чаплигіна, що належать іншим авторам, є те, що метод Курпеля як і метод Чаплигіна має квадратичну швидкість збіжності. Зокрема, відповідні алгоритми В. Кваде [11], алгоритм Б.Н. Бабкіна [12] та інших авторів характеризуються лінійною швидкістю збіжності.

Зазначимо, що 1978 року видавництвом Academic Press виданий переклад англійською мовою монографії [4], а в монографії [18] вміщений повний переклад польською мовою статті [27]. Низка досліджень М.С. Курпеля стосується також застосування наближених методів до диференціальних рівнянь з відхиленням аргументу як з післядією, так і з аргументом, який не є запізненням.

М.С. Курпель приклав чимало зусиль щодо підготовки наукової молоді. Зокрема, під його керівництвом проводили наукові дослідження Ф. Мигович, Т.С. Курченко, Г.О. Шпортюк, В.І. Гречко, І.М. Майборода, В.І. Охрончук, низка інших учнів і співробітників.

Література

[1] Тихонов А.Н., Костомаров Д.П. Вводные лекции по прикладной математике. – М.: Наука, 1984. – 190 с.

[2] Соколов Ю.Д. Метод осреднения функциональных поправок. – К.: Наук. думка. – 1967.

[3] Лучка А.Ю. Теория и применение метода осреднения функциональных поправок. – К.: Изд-во АН УССР. – 1963.

[4] Курпель Н.С. Проекционно-итеративные методы решения оперативных уравнений. – К.: Наук. думка, 1968. – 243 с.

[5] Марчук Г.И., Агошков В.И. Введение в проекционно-сеточные методы. – М.: Наука, 1981. – 416с.

[6] Самойленко А.М., Ронто Н.И. Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных диференциальных уравнений. – К.: Наук. думка, 1992. – 277 с.

[7] Курпель Н.С., Курченко Т.С. Двусторонние методы решения систем уравнений. – К.: Наук. думка, 1975. – 184 с.

[8] Курпель Н.С., Шувар Б.А. Двусторонние операторные неравенства и их применения. – К.: Наук. думка.– 1980.– 267 с.

[9] Курпель М.С. Про деякі модифікації методу С.О. Чаплигіна наближеного інтегрування диференціальних рівнянь // Доп. АН УРСР. Сер А. – 1969. – № 4. – С. 303–306.

[10] Курпель Н.С. Некоторые обобщения и модификации метода С.А. Чаплыгина // Приближенные и качественные методы теории дифференциальных и интегральных уравнений. – К.: Ин-т математики АН УССР. – 1971. – С.51–72.

[11] Quade W. Ein neues Verfahren der schrittweisen Näherungen zur Lösung von $y' = f(x, y)$ // Math. Zeit. – 1942. – V. 28. – S. 724–808.

[12] Бабкин Б.Н. Об одной модификации метода С.А.Чаплыгина приближенного интегрирования // ДАН СССР. – 1949. – Т.67, № 2. – С.213–216.

[13] Беккенбах Э., Беллман Р. Неравенства. – М.: Мир, 1965. – 276 с.

[14] Далецкий Ю.А., Крейн М.Г. Устойчивость решений диффеенциальных уравнений в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1970. – 534 с.

[15] Филатов А.Н., Шарова Л.В. Интегральные неравенства и теория нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1976. – 152 с.

[16] Walter W. Differential and integral inequalities. – Berlin etc.: Springer, 1970. – 355 p.

[17] Szarski J. Differential inequalities. – Warszawa: PWN, 1965. – 248 p.

[18] Rabczuk R. Elementy nierówności rózniczkowych. – Warszawa: PWN, 1976. – 276 s.

[19] Lakshmikantham V., Leela S. Differential and integral inequalities: Theorie and applications. Vol. 1. – New York: Akad. Press, 1969. – 390 p.

[20] Шувар Б.А. Двусторонние итерационные методы решения нелинейных уравнений в полупорядочных пространствах // Второй симпозиум по методам решения нелинейных уравнений и задач оптимизации АН ЭССР. – 1981. – С. 68–73.

[21] Шувар Б.А., Копач М.І., Ментинський С.М., Обшта А.Ф. Двосторонні наближені методи. – Івано-Франківськ: Вид-во Прикарпатського нац. ун-ту ім. В.Стефаника, 2007. – 516 с.

[22] Шувар Б.А., Дудка Н.А. О двухсторонних дифференциальных неравенствах для дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом // ДАН УССР. Сер. А. – 1980. – № 11. – С. 15–17.

[23] Шувар Б.А., Копач М.И. О двусторонних интегральных неравенствах типа Вольтерра со многими независимыми перменными // Укр. мат. журн. – 1981. – Т.33, № 6. – С. 848–853.

[24] Шувар Б.А., Копач М.И. Двусторонние операторные неравенства с немонотонными операторами // Дифференц. уравнения. – 2006. – Т.42, № 4. – С. 549–552.

[25] Шувар Б.А., Копач М.И. Об одном достаточном условии существования решения уравнения с немонотонными операторами // Изв. вузов Математика. – 2006. – Т. 526, № 3. – С. 59–61.

[26] Шувар Б.А., Ментинський С.М. Двостороння апроксимація розв'язків крайових задач. // Укр. мат. журн. – 2005. – Т.57, № 2.– С. 284–288.

[27] Курпель Н.С., Шувар Б.А. Об операторных и интегральных неравенствах // Укр. Мат. журн. – 1973. – Т.25, № 3. – С. 386–390.

THE SOKOLOV METHOD, THEORY AND APPLICATION OF PROECTIVE-ITERATIVE AND TWO – SIDED METHODS IN THE WORKS OF M.S. KURPEL

A.F. Obshta, B.A. Shuvar

National University "Lvivska Politechnika"
12 S. Bandera Str., 79013, Lviv, Ukraine

Survey of proective-iterative methods and general theory of approximation methods of operatory equations solving, which was created by M.S. Kyrpel is discussed in this work (in honour of 30-th anniversary of Mykola Stepanovuch Kurpel's memory).

Keywords: approximation methods, integral equations, proective-iterative methods, operator equations.

2000 MSC: 31B10

УДК: 517.948/517.946