

СТОХАСТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ РУЙНУВАННЯ
КРИХКИХ МАТЕРІАЛІВ

Р.І. Квіт

Національний університет “Львівська політехніка”
вул. С. Бандери 12, 79013, Львів, Україна

(Отримано 1 жовтня 2009 р.)

Виконано аналітичні та числові дослідження руйнування стохастично дефектних ізотропних пластин у разі врахування початкового напрямку поширення тріщин та ненульового порогового значення міцності. Побудовано залежності ймовірності зруйнування від прикладеного навантаження для пластин різних розмірів. Здійснено порівняння з відомими результатами, які ґрунтуються на припущенні про поширення тріщини в своїй площині.

Ключові слова: пластина, тріщина, розподіл, ймовірність зруйнування.

2000 MSC: 82B31

УДК: 539.4

Вступ

Розроблення і дослідження критеріїв міцності є актуальною проблемою для високоміцних матеріалів, схильних до крихкого руйнування. Застосування ймовірнісно-статистичних методів до розгляду дефектності та неоднорідності структури таких матеріалів дає змогу адекватніше оцінити їх безвідмовну роботу. За останні роки активно вирішували проблеми міцнісної надійності елементів конструкцій у ймовірнісному аспекті [1–6]. Метою дослідження є побудова алгоритму для визначення функції розподілу граничного навантаження та ймовірності зруйнування пластин на базі детерміністичного критерію руйнування, що враховує початковий напрямок поширення тріщини.

I. Постановка задачі

Розглядаємо пружну прямокутну пластину з ізотропного матеріалу з однаковою тріщиностійкістю, яка має товщину h та площу S . Вона перебуває в умовах всебічного розтягу – стиску під дією однорідного навантаження p та q ($q = \eta p$) (рис. 1). Сили p та q можна трактувати як головні напруження при плоскому напруженому стані. У пластині рівномірно розподілені тріщини, які пронизують по нормалі товщину та не взаємодіють між собою. Дефекти характеризуються довжиною $2l$ (l – змінна величина) і кутом нахилу α відносно напрямку дії сили p , який змінюється у межах $-\pi/2 \leq \alpha \leq \pi/2$. Ймовірнісні закони розподілу випадкових величин l та α , які є статистично незалежними, можна записати на підставі апріорних загальних міркувань або структурного

статистичного аналізу [7–8]. Для ізотропного матеріалу випадкову величину α задаємо [9] густиною рівномірного розподілу ймовірностей

$$f_1(\alpha) = 1/\pi . \tag{1}$$

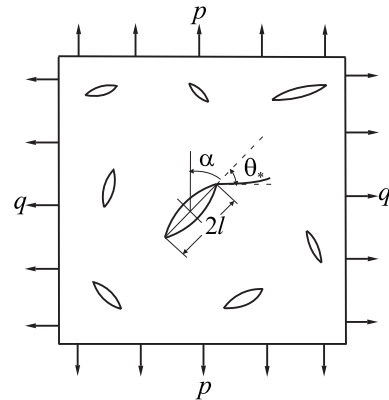


Рис. 1. Пластина з довільно орієнтованими тріщинами в умовах всебічного розтягу–стиску

Нехай параметр l є обмеженою величиною і змінюється у межах $0 \leq l \leq c$ (c – скінченна структурна характеристика). Тоді для опису випадкової величини l можна застосувати бета-розподіл, диференціальна та інтегральна функції якого запишуться відповідно

$$f_2(l) = \frac{r+1}{c} \left(1 - \frac{l}{c}\right)^r , \tag{2}$$

$$F_2(l) = 1 - \left(1 - \frac{l}{c}\right)^{r+1} , \tag{3}$$

де r – невід’ємний параметр, у разі збільшення якого зростає ймовірність випадкових величин, близьких

до нуля. Закон розподілу (2) підтверджується експериментальними дослідженнями [10].

Розглядаємо пластину як сукупність N первинних дефектних елементів (з одною тріщиною). Тоді відповідно до гіпотези найслабшої ланки Вейбула граничне (що руйнує) навантаження для пластини співпадає з граничним навантаженням для її найслабшого елемента. Граничне навантаження p_* , $q_* = \eta p_*$ для пластини з прямолінійною тріщиною за умов розтягу – стиску можна записати відповідно до

$$\varphi_1(\alpha, \eta) = \sec^2 \frac{\theta_*}{2} \left[\cos \frac{\theta_*}{2} (\sin^2 \alpha + \eta \cos^2 \alpha) - 1,5 (1 - \eta) \sin 2|\alpha| \sin \frac{\theta_*}{2} \right]^{-1}, \quad (5)$$

де $\theta = \theta_*$ (рис.1) – кут, що визначає початковий напрямок поширення тріщини і має аналітичне представлення

$$\theta_* = 2 \arctg \frac{1 - \sqrt{1 + 8b^2}}{4b}; \quad b = \frac{(1 - \eta) \sin 2|\alpha|}{2 (\sin^2 \alpha + \eta \cos^2 \alpha)} \quad (6)$$

σ_n – нормальні до лінії тріщини напруження ($\sigma_n = p \sin^2 \alpha + q \cos^2 \alpha$);

б) для закритих тріщин, $\sigma_n < 0$

$$\varphi_2(\alpha, \eta, \rho) = 0,25\sqrt{3}[(1 - \eta) \sin 2|\alpha| + 2\rho \operatorname{sign} p (\sin^2 \alpha + \eta \cos^2 \alpha)]^{-1}. \quad (7)$$

II. Функція розподілу граничного навантаження

Застосуємо методику, запропоновану у [12] до знаходження функції розподілу граничного навантаження для пластини з випадковими тріщинами у плоскому полі напружень на базі детерміністичного розв'язку (4)– (7), що враховує початковий напрямок поширення тріщини.

З випадковості величин α та l впливає випадковість граничного навантаження p за заданого η на інтервалі $|p_{min}| < |p| < \infty$, де порогове значення міцності відповідно до формули (4) записується у вигляді $|p_{min}| = K c^{-0,5} \varphi_i(\alpha, \eta, \rho)_{min_\alpha} > 0$.

Функція розподілу граничного навантаження для елемента пластини з одним дефектом записується [12]:

$$F_1(|p|, \eta) = \int_{D_\alpha} f_1(\alpha) [1 - F_2(K^2 p^{-2} \varphi_i^2(\alpha, \eta, \rho))] d\alpha, \quad (8)$$

де D_α – множина можливих значень α , для яких за заданих p та η виконується умова

$$0 \leq K^2 p^{-2} \varphi_i^2(\alpha, \eta, \rho) \leq c. \quad (9)$$

Встановимо область допустимих значень α при $p > 0$. Мінімальне значення граничного навантаження p_{min} визначається структурною характеристикою

результатів [11] у вигляді

$$|p_*| = K l^{-0,5} \varphi_i(\alpha, \eta, \rho), \quad K = \pi^{-0,5} K_{Ic} \quad (i = 1, 2) \quad (4)$$

де K_{Ic} – коефіцієнт інтенсивності напружень (стала, що характеризує опір матеріалу поширенню тріщини), ρ – коефіцієнт тертя між її берегами ($0 \leq \rho \leq 1$).

Функція $\varphi_i(\alpha, \eta, \rho)$ залежно від типу тріщини записується:

а) для відкритих тріщин, $\sigma_n \geq 0$

c та кутом $0 \leq \alpha_*^{(i)} \leq \pi/2$ ($i = 1, 2$), за якого для заданого η досягає мінімуму функція $\varphi_1(\alpha, \eta)$ або $\varphi_2(\alpha, \eta, \rho)$. Отже, величина $\alpha_*^{(i)}$ є критичною точкою функції $\varphi_i(\alpha, \eta, \rho)$ ($i = 1, 2$) та повинна задовольняти необхідну і достатню умови існування її екстремуму.

Розглянемо випадок $0 \leq \eta \leq 1$ ($\sigma_n \geq 0$). Тоді $\alpha_*^{(1)}$ визначається з умови $(\varphi_1(\alpha, \eta))'_\alpha = 0$. Числовим методом встановлюємо $\alpha_*^{(1)} = \pi/2$, $\varphi_1(\alpha, \eta)_{min_\alpha} = \varphi_1(\pi/2, \eta) = 1$ та $p_{min} = K c^{-0,5}$. Відповідно до умови (4) отримаємо інтервал зміни навантаження $K c^{-0,5} \leq p \leq K \eta^{-1} c^{-0,5}$ ($\eta \neq 1$). Тоді на основі формули (8) отримаємо функцію розподілу

$$F_1(p, \eta) = \int_{-\pi/2}^{-\alpha_1} f_1(\alpha) [1 - F_2(K^2 p^{-2} \varphi_1^2(\alpha, \eta))] d\alpha + \int_{\alpha_1}^{\pi/2} f_1(\alpha) [1 - F_2(K^2 p^{-2} \varphi_1^2(\alpha, \eta))] d\alpha, \quad (10)$$

де $\alpha_1 \in (0; \pi/2)$ – розв'язок рівняння $K^2 p^{-2} \varphi_1^2(\alpha, \eta) = c$, який шукаємо числовим методом.

При $K \eta^{-1} c^{-0,5} \leq p < \infty$ ($\eta \neq 0$) функція розподілу $F_1(p, \eta)$ запишеться так:

$$F_1(p, \eta) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f_1(\alpha) [1 - F_2(K^2 p^{-2} \varphi_1^2(\alpha, \eta))] d\alpha. \quad (11)$$

Розглянемо частковий випадок двовісного симетричного розтягу ($p = q > 0$, $\eta = 1$). Тоді $\theta_* = 0$, $\varphi_1(\alpha, 1) = 1$. З представлення (11) отримаємо вираз для функції розподілу

$$F_1(p, 1) = 1 - F_2(K^2 p^{-2}), \quad K c^{-0,5} \leq p < \infty. \quad (12)$$

Перейдемо до умов розтягу – стиску ($p > 0$, $q < 0$, $\eta < 0$). Дослідимо область визначення функції $\varphi_2(\alpha, \eta, \rho)$. Відповідно до умови (4) $\varphi_2(\alpha, \eta, \rho)$ не може набувати від'ємних значень. Тому $\alpha_2 < |\alpha| \leq \alpha_0 = \arctg \sqrt{-\eta}$, де α_0 визначається з умови $\sigma_n \leq 0$, α_2 – додатний корінь рівняння $(1 - \eta) \sin 2\alpha + 2\rho(\sin^2 \alpha + \eta \cos^2 \alpha) = 0$. Звідси

$$\alpha_2 = \arctg \left[(\eta - 1 + \sqrt{(1 - \eta)^2 - 4\eta\rho^2}) / 2\rho \right]. \quad (13)$$

При $|\alpha| \leq \alpha_2$ тріщина не може поширюватися (граничні напруження нескінченні).

З умови $(\varphi_2(\alpha, \eta, \rho))'_\alpha = 0$ знаходимо критичну точку $\alpha_*^{(2)} = \pi/2 - 0,5 \arctg \rho^{-1}$. Тоді

$$\varphi_2(\alpha_*^{(2)}, \eta, \rho) = 0, 25\sqrt{3} \left[(1-\eta)\sqrt{1+\rho^2} + \rho(1+\eta) \right]^{-1}. \quad (14)$$

Із врахуванням вказаної вище області існування коефіцієнта ρ отримаємо інтервал для критичної точки $\pi/4 \leq \alpha_*^{(2)} \leq 3\pi/8$.

Розглянемо випадок $-1 \leq \eta < 0$. Тоді матимемо $\alpha_*^{(2)} \geq \alpha_0$ та

$$\varphi_2(\alpha, \eta, \rho)_{min_\alpha} = \varphi_2(\alpha_0, \eta, \rho) = 0, 125\sqrt{3}/\sqrt{|\eta|}. \quad (15)$$

Для $-\infty < \eta < -1$ отримаємо

$$\varphi_2(\alpha, \eta, \rho)_{min_\alpha} = \begin{cases} 0, 125\sqrt{3}/\sqrt{|\eta|}, & \alpha_*^{(2)} \geq \alpha_0 \\ 0, 25\sqrt{3} \left[(1-\eta)\sqrt{1+\rho^2} + \rho(1+\eta) \right]^{-1}, & \end{cases} \quad (16)$$

якщо $\alpha_*^{(2)} \leq \alpha_0$.

Звідси

$$\alpha_3 = \arctg \frac{(1-\eta)p\sqrt{c} - \sqrt{(1-\eta)^2 p^2 c - 4(0, 125\sqrt{3}K - \rho p\sqrt{c})(0, 125\sqrt{3}K - \rho\eta p\sqrt{c})}}{2(0, 125\sqrt{3}K - \rho p\sqrt{c})}. \quad (21)$$

Для $\phi_1(\eta)Kc^{-0,5} \leq p < \infty$ матимемо таку функцію розподілу:

$$F_1(p, \eta) = \int_{-\pi/3}^{-\alpha_0} f_1(\alpha) [1 - F_2(K^2 p^{-2} \varphi_1^2(\alpha, \eta))] d\alpha + \int_{-\alpha_0}^{-\alpha_3} f_1(\alpha) [1 - F_2(K^2 p^{-2} \varphi_2^2(\alpha, \eta, \rho))] d\alpha + \int_{\alpha_3}^{\alpha_0} f_1(\alpha) [1 - F_2(K^2 p^{-2} \varphi_2^2(\alpha, \eta, \rho))] d\alpha + \int_{\alpha_0}^{\pi/3} f_1(\alpha) [1 - F_2(K^2 p^{-2} \varphi_1^2(\alpha, \eta))] d\alpha. \quad (22)$$

Нехай $-\infty < \eta < -1$. Тоді отримаємо два інтервали зміни параметра η , $-(\rho + \sqrt{1+\rho^2})^2 \leq \eta < -1$ та $-\infty < \eta \leq -(\rho + \sqrt{1+\rho^2})^2$.

При $-(\rho + \sqrt{1+\rho^2})^2 \leq \eta < -1$ маємо $p_{min} = 0, 125\sqrt{3}K(|\eta|c)^{-0,5}$.

Для $0, 125\sqrt{3}K(|\eta|c)^{-0,5} \leq p \leq \phi_2(\eta)Kc^{-0,5}$ функцію розподілу знаходимо за формулою (19).

Для $\phi_2(\eta)Kc^{-0,5} \leq p < \infty$ функція розподілу $F_1(p, \eta)$ записується так:

$$F_1(p, \eta) = \int_{-\alpha_1}^{-\alpha_0} f_1(\alpha) [1 - F_2(K^2 p^{-2} \varphi_1^2(\alpha, \eta))] d\alpha +$$

Умови $\alpha_*^{(2)} \leq \alpha_0$ та $\alpha_*^{(2)} \geq \alpha_0$ еквівалентні відповідно нерівностям $\eta \leq -(\rho + \sqrt{1+\rho^2})^2$ та $\eta \geq -(\rho + \sqrt{1+\rho^2})^2$.

Мінімальні значення функції $\varphi_1(\alpha, \eta)$ такі:

$$\varphi_1(\alpha, \eta)_{min_\alpha} = \varphi_1(\pi/3, \eta) = \phi_1(\eta) \text{ для } -1 \leq \eta < 0; \quad (17)$$

$$\varphi_1(\alpha, \eta)_{min_\alpha} = \varphi_1(\alpha_0, \eta) = \phi_2(\eta) \text{ для } -\infty < \eta < -1. \quad (18)$$

Нехай $-1 \leq \eta < 0$. Тоді відповідно до умови (4) $p_{min} = 0, 125\sqrt{3}K(|\eta|c)^{-0,5}$. При $0, 125\sqrt{3}K(|\eta|c)^{-0,5} \leq p \leq \phi_1(\eta)Kc^{-0,5}$ ($\eta \neq -1$) функцію розподілу $F_1(p, \eta)$ знаходимо за формулою

$$F_1(p, \eta) = \int_{-\pi/3}^{-\alpha_3} f_1(\alpha) [1 - F_2(K^2 p^{-2} \varphi_2^2(\alpha, \eta))] d\alpha + \int_{\alpha_3}^{\pi/3} f_1(\alpha) [1 - F_2(K^2 p^{-2} \varphi_2^2(\alpha, \eta, \rho))] d\alpha, \quad (19)$$

де $\alpha_3 > 0$ – менший корінь рівняння

$$K^2 p^{-2} \varphi_2^2(\alpha, \eta, \rho) = c. \quad (20)$$

$$+ \int_{-\alpha_0}^{-\alpha_3} f_1(\alpha) [1 - F_2(K^2 p^{-2} \varphi_2^2(\alpha, \eta, \rho))] d\alpha + \int_{\alpha_3}^{\alpha_0} f_1(\alpha) [1 - F_2(K^2 p^{-2} \varphi_2^2(\alpha, \eta, \rho))] d\alpha + \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} f_1(\alpha) [1 - F_2(K^2 p^{-2} \varphi_1^2(\alpha, \eta))] d\alpha. \quad (23)$$

При $-\infty < \eta \leq -(\rho + \sqrt{1+\rho^2})^2$ $p_{min} = p_1 = 0, 25\sqrt{3}Kc^{-0,5}[(1-\eta)\sqrt{1+\rho^2} + \rho(1+\eta)]^{-1}$.

Тоді для $p_1 \leq p \leq 0, 125\sqrt{3}K(|\eta|c)^{-0,5}$ функція розподілу є

$$F_1(p, \eta) = \int_{-\alpha_4}^{-\alpha_3} f_1(\alpha) [1 - F_2(K^2 p^{-2} \varphi_2^2(\alpha, \eta, \rho))] d\alpha + \int_{\alpha_3}^{\alpha_4} f_1(\alpha) [1 - F_2(K^2 p^{-2} \varphi_2^2(\alpha, \eta, \rho))] d\alpha, \quad (24)$$

де α_4 – більший корінь рівняння (20),

$$\alpha_4 = \operatorname{arctg} \frac{(1-\eta)p\sqrt{c} + \sqrt{(1-\eta)^2 p^2 c - 4(0,125\sqrt{3}K - \rho p\sqrt{c})(0,125\sqrt{3}K - \rho\eta p\sqrt{c})}}{2(0,125\sqrt{3}K - \rho p\sqrt{c})}. \quad (25)$$

Для $0,125\sqrt{3}K(|\eta|c)^{-0,5} \leq p \leq \phi_2(\eta)Kc^{-0,5}$ функція розподілу $F_1(p, \eta)$ задається виразом (19).

При $\phi_2(\eta)Kc^{-0,5} \leq p < \infty$ функція розподілу $F_1(p, \eta)$ визначається за формулою (23).

В отриманні вирази функції розподілу $F_1(p, \eta)$ під-

ставимо функції $f_1(\alpha)$, $F_2(l)$ відповідно до формул (1), (3), де параметр l визначається з критерію (4)–(7).

Для випадку $0 \leq \eta \leq 1$ ($p > 0$) за формулами (10), (11) функція розподілу набуде вигляду

$$F_1(p, \eta) = \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\pi/2} \left\{ 1 - \frac{K^2}{p^2 c} \sec^4 \frac{\theta_*}{2} \left[\cos \frac{\theta_*}{2} (\sin^2 \alpha + \eta \cos^2 \alpha) - 1,5(1-\eta) \sin 2\alpha \sin \frac{\theta_*}{2} \right]^{-2} \right\}^{r+1} d\alpha, \quad Kc^{-0,5} \leq p \leq K\eta^{-1}c^{-0,5} \quad (\eta \neq 1), \quad (26)$$

$$F_1(p, \eta) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left\{ 1 - \frac{K^2}{p^2 c} \sec^4 \frac{\theta_*}{2} \left[\cos \frac{\theta_*}{2} (\sin^2 \alpha + \eta \cos^2 \alpha) - 1,5(1-\eta) \sin 2\alpha \sin \frac{\theta_*}{2} \right]^{-2} \right\}^{r+1} d\alpha, \quad K\eta^{-1}c^{-0,5} \leq p < \infty \quad (\eta \neq 0). \quad (27)$$

Зокрема, при двовісному симетричному розтягу ($p = q > 0$, $\eta = 1$)

$$F_1(p, 1) = \left[1 - \frac{K^2}{p^2 c} \right]^{r+1} \quad Kc^{-0,5} \leq p < \infty. \quad (28)$$

Розглянемо випадок $-1 \leq \eta < 0$ ($p > 0$, $q < 0$). При $0,125\sqrt{3}K(|\eta|c)^{-0,5} \leq p \leq \phi_1(\eta)Kc^{-0,5}$ ($\eta \neq -1$) функція розподілу $F_1(p, \eta)$ визначається відповідно до формули (19) так:

$$F_1(p, \eta) = \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_3}^{\pi/3} \left\{ 1 - \frac{K^2}{p^2 c} 0,1875 [(1-\eta) \sin 2\alpha + 2\rho(\sin^2 \alpha + \eta \cos^2 \alpha)]^{-2} \right\}^{r+1} d\alpha. \quad (29)$$

При $\phi_1(\eta)Kc^{-0,5} \leq p < \infty$ функція розподілу $F_1(p, \eta)$ запишеться відповідно до виразу (22) у вигляді

$$F_1(p, \eta) = \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_3}^{\alpha_0} \left\{ 1 - \frac{K^2}{p^2 c} 0,1875 [(1-\eta) \sin 2\alpha + 2\rho(\sin^2 \alpha + \eta \cos^2 \alpha)]^{-2} \right\}^{r+1} d\alpha + \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\pi/3} \left\{ 1 - \frac{K^2}{p^2 c} \sec^4 \frac{\theta_*}{2} \left[\cos \frac{\theta_*}{2} (\sin^2 \alpha + \eta \cos^2 \alpha) - 1,5(1-\eta) \sin 2\alpha \sin \frac{\theta_*}{2} \right]^{-2} \right\}^{r+1} d\alpha. \quad (30)$$

Зокрема, при розтягу і рівному йому стиску ($p = -q > 0$, $\eta = -1$) отримаємо

$$F_1(p, -1) = \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_3^{(1)}}^{\pi/4} \left\{ 1 - \frac{K^2}{p^2 c} \frac{3}{64} [\sin 2\alpha - \rho \cos 2\alpha]^{-2} \right\}^{r+1} d\alpha + \frac{2}{\pi} \int_{\pi/4}^{\pi/3} \left\{ 1 - \frac{K^2}{p^2 c} \sec^4 \frac{\theta_*}{2} \left[\cos \frac{\theta_*}{2} \cos 2\alpha + 3 \sin 2\alpha \sin \frac{\theta_*}{2} \right]^{-2} \right\}^{r+1} d\alpha, \quad (31)$$

де кут

$$\theta_* = 2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1 + 8 \operatorname{tg}^2 2\alpha} - 1}{4 \operatorname{tg} 2\alpha}.$$

Нижня межа інтегрування $\alpha_3^{(1)}$ відповідно до виразу (21) запишеться так:

$$\alpha_3^{(1)} = \operatorname{arctg} \frac{p\sqrt{c} - \sqrt{p^2c(1 + \rho^2) - 3K^2/64}}{0,125\sqrt{3}K - \rho p\sqrt{c}}. \quad (32)$$

Розглянемо випадок $-\infty < p < -1$. Тоді відповідно до зроблених досліджень при $-(\rho + \sqrt{1 + \rho^2})^2 \leq \eta < -1$ функція розподілу $F_1(p, \eta)$ для $0,125\sqrt{3}K(|\eta|c)^{-0,5} \leq p \leq \phi_2(\eta)Kc^{-0,5}$ запишеться за формулою (19) так:

$$F_1(p, \eta) = \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_3}^{\pi/3} \left\{ 1 - \frac{K^2}{p^2c} 0,1875 [(1 - \eta)\sin 2\alpha + 2\rho(\sin^2\alpha + \eta\cos^2\alpha)]^{-2} \right\}^{r+1} d\alpha. \quad (33)$$

Для $\phi_2(\eta)Kc^{-0,5} \leq p < \infty$ функція розподілу $F_1(p, \eta)$ записується відповідно до виразу (23) у вигляді

$$F_1(p, \eta) = \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_3}^{\alpha_0} \left\{ 1 - \frac{K^2}{p^2c} 0,1875 [(1 - \eta)\sin 2\alpha + 2\rho(\sin^2\alpha + \eta\cos^2\alpha)]^{-2} \right\}^{r+1} d\alpha + \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \left\{ 1 - \frac{K^2}{p^2c} \sec^4 \frac{\theta_*}{2} \left[\cos \frac{\theta_*}{2} (\sin^2\alpha + \eta\cos^2\alpha) - 1,5(1 - \eta)\sin 2\alpha \sin \frac{\theta_*}{2} \right]^{-2} \right\}^{r+1} d\alpha. \quad (34)$$

При $-\infty < \eta \leq -(\rho + \sqrt{1 + \rho^2})^2$ функція розподілу $F_1(p, \eta)$ для $p_1 \leq p \leq 0,125\sqrt{3}K(|\eta|c)^{-0,5}$ запишеться відповідно до формули (24) так:

$$F_1(p, \eta) = \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_3}^{\alpha_4} \left\{ 1 - \frac{K^2}{p^2c} 0,1875 [(1 - \eta)\sin 2\alpha + 2\rho(\sin^2\alpha + \eta\cos^2\alpha)]^{-2} \right\}^{r+1} d\alpha. \quad (35)$$

Для $0,125\sqrt{3}K(|\eta|c)^{-0,5} \leq p \leq \phi_2(\eta)Kc^{-0,5}$ функція розподілу $F_1(p, \eta)$ записується виразом (33).

У випадку $\phi_2(\eta)Kc^{-0,5} \leq p < \infty$ функція розподілу $F_1(p, \eta)$ визначається за формулою (34).

Якщо $1 < \eta < \infty$ ($p > 0$) або $-\infty < \eta < 0$ ($q > 0$), то заміною p на q та η на $\eta_1 = 1/\eta$ у відповідних виразах для $F_1(p, \eta)$ отримаємо функцію $F_1(q, \eta_1)$.

Функція розподілу $F_1(p, \eta)$ є базовою складовою для статистичних характеристик міцності пластини: середнього і найімовірнішого значення, дисперсії, коефіцієнта варіації граничного навантаження тощо.

III. Імовірність зруйнування пластини

Для пластини, що містить N ізольованих дефектів, функція розподілу граничного навантаження має вигляд [12]

$$F_N(p, \eta) = 1 - [1 - F_1(p, \eta)]^N. \quad (36)$$

Зафіксувавши p та η визначимо ймовірність зруйнування такої пластини:

$$P_f = F_N(p, \eta). \quad (37)$$

Використовуючи отримані аналітичні представлення (26) – (35) функції розподілу $F_1(p, \eta)$ та вирази (36), (37), можна визначити ймовірність зруйнування пластини з N тріщинами за різних співвідношень прикладеного навантаження p та q з урахуванням початкового напрямку поширення тріщин. Ця ймовірнісна характеристика міцності залежить від величини навантаження p , виду напруженого стану (від η), закону розподілу розміру тріщин (зокрема, від параметра r , що характеризує структуру матеріалу), кількості N тріщин у пластині (тобто від розмірів пластини, якщо вважати кількість тріщин пропорційною до її площі S) та кута θ_* , що визначає початковий напрямок поширення тріщин.

На рис. 2–4 побудовано залежності ймовірності зруйнування P_f від безвимірною навантаження $p\sqrt{c}/K$ для одновісного розтягу ($\eta = 0$) та чистого зсуву ($\eta = -1$). Суцільні лінії відповідають випадку врахування початкового напрямку поширення тріщин, а штрихові – без врахування. Криві, які відповідають випадку поширення тріщин у своїх площинах, побудовано на базі аналітичних представлень, отриманих у [12], де зокрема розглянуто критерії руйнування пластин при рівномірному ($r = 0$) та лінійно спадному ($r = 1$) розподілах параметра l тріщин.

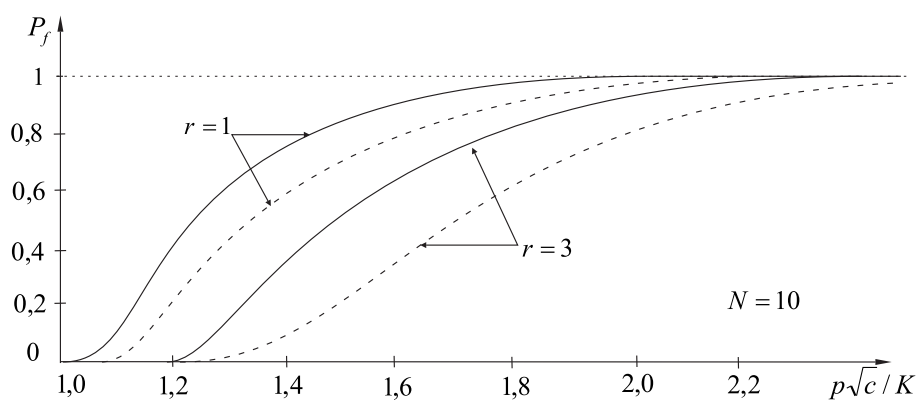


Рис. 2. Імовірність зруйнування при одновісному розтягу ($\eta = 0$) для різної неоднорідності матеріалу

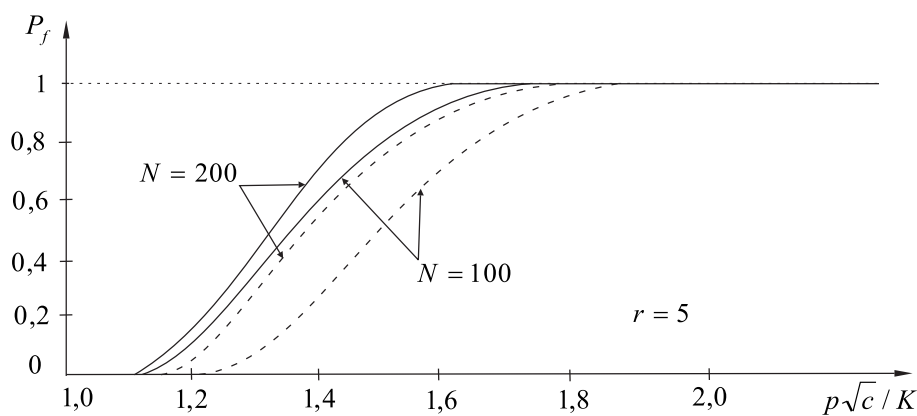


Рис. 3. Імовірність зруйнування при одновісному розтягу ($\eta = 0$) для пластин різних розмірів

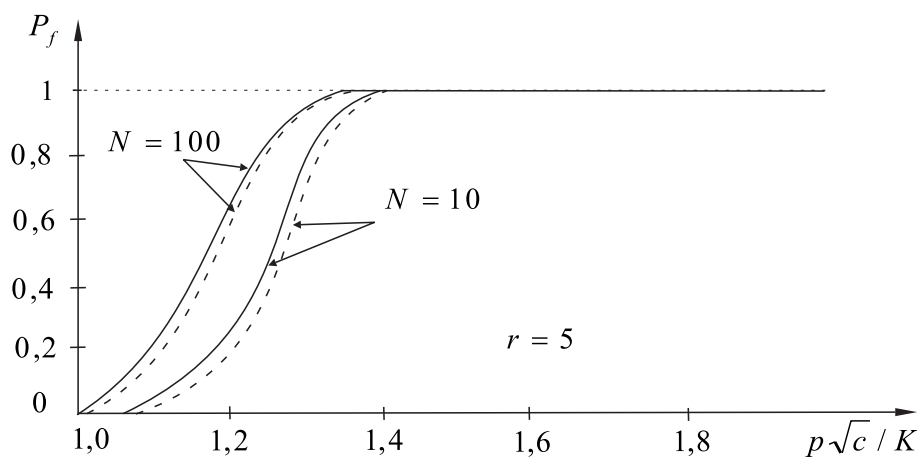


Рис. 4. Імовірність зруйнування при чистому зсуві ($\eta = -1, \rho = 0,5$)

Висновки

З аналізу побудованих діаграм випливає, що існує певний діапазон навантаження, для якого дуже мала ймовірність зруйнування P_f . Як видно з рис. 2, ймовірність зруйнування зменщується при підвищенні однорідності матеріалу (при збільшенні параметра r зростає ймовірність існування в матеріалі малих тріщин). Зі зростанням кількості тріщин N у пластині (збільшенням її розмірів) підвищується ймовірність зруйнування при одноосному розтягу (рис. 3) та чистому зсуві (рис. 4), причому це підвищення залежить від виду напруженого стану (від η). Якщо зафіксувати величину навантаження, то ймовірність зруйнування пластин однакової розмірів є більшою

при розтягу і стиску ($\eta = -1$), ніж при одноосному розтягу ($\eta = 0$). Незалежно від виду напруженого стану, величини навантаження, розмірів пластини, неоднорідності матеріалу та інших характеристик цієї моделі, врахування початкового напрямку поширення тріщин (кут θ_*) веде до збільшення ймовірності зруйнування P_f , що доводить переваги визначення граничного навантаження за формулами (4)–(7).

Отже, узагальнюючи отримані результати, можна зробити висновок, що врахування початкового напрямку поширення тріщин, тобто залучення до методів ймовірнісної механіки руйнування критерію міцності, запропонованого в [11], дає змогу здійснити точнішу оцінку надійності конструкційних елементів з урахуванням стохастичності їх структури.

Література

- [1] Nicholson D., Ni P. Extreme value probabilistic theory for mixed-mode brittle fracture // Eng. Fract. Mech. – 1997. – Vol. 58, №1–2. – P.121–132.
- [2] Игнатович С.Р., Нинасвинча Сото Ф. Стохастическая модель неоднородности размеров рассеянных трещин. Сообщ.1. Стационарный рост трещин // Пробл. прочности. – 1999. – №3. – С.104–113.
- [3] Сосновский Л.А., Корешков В.П. Статистическая модель деформируемого твердого тела с опасным объемом и некоторые ее приложения. Сообщ. 4. // Пробл. прочности. – 1999. – №6. – С.42–49.
- [4] B.Strnadel, I.Nedbal, C.Prioul, N.Shiratory Statistical aspects of brittle fracture in low-alloyed steels // JSME Int. J. Ser. A. – 2002. – Vol. 45, №2. – P.319–326.
- [5] Bazant Z.P. Probability distribution of energetic-statistical size effect in quasibrittle fracture // Probab. Eng. Mech. – 2004. – №19. – P.307–319.
- [6] Kassem H., Kadry S. Stochastic fatigue of a mechanical system based on the technique of probabilistic transformation // Eur. J. Sci. Research. – 2009. – Vol. 29, №2. – P.147–156.
- [7] Сызранцев В.Н., Невелев Я.П., Голофаст С.Л. Адаптивные методы восстановления функции плотности распределения вероятности // Изв. вузов. Машиностроение. – 2006. – №12. – С.3–11.
- [8] Лемешко Б.Ю., Огурцов Д.В. Статистическое моделирование как эффективный инструмент для исследования законов распределения функций случайных величин // Метрология. – 2007. – №5. – С.3–13.
- [9] Витвицький П.М., Квіт Р.І. Імовірнісні критерії міцності для тіл зі стохастично розподіленими дископодібними тріщинами при осесиметричному напруженому стані // ФХММ. – 1990. – №3. – С.53–58.
- [10] Cheng A.S., Laird C. Fatigue life behaviour of copper single crystals. Part II: Model for crack nucleation in persistent slip bands // Fatigue Eng. Mater. Struct. – 1981. – Vol. 4, №4. – P.343–353.
- [11] Панасюк В.В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. – К.: Наук. думка, 1968. – 246 с.
- [12] Витвицький П.М., Попина С.Ю. Прочность и критерии хрупкого разрушения стохастически дефектных тел. – К.: Наук. думка, 1980. – 186 с.

A STOCHASTIC SIMULATION OF BRITTLE MATERIALS FAILURE

R.I. Kvit

*National University "Lvivska Politechnika"
12 S. Bandera Str., 79013, Lviv, Ukraine*

In this paper the analytical and numerical investigations of stochastic defect plates failure under initial direction of crack propagation accounting and non-vanishing threshold strength value are carrying out. The connection of failure probability from applied loading for different size plates is constructed. The comparison with familiar results which based on the assumption of crack propagation in its plane is realized.

Keywords: plate, crack, distribution, probability of failure.

2000 MSC: 82B31

УДК: 539.4