ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
"Фізико-математичні науки"
Вип.660 № 660, (2009) с. 56–60

JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY
"LVIVSKA POLITECHNIKA"
"Physical & mathematical sciences"
Vol.660 No 660, (2009) 56–60

СТОХАСТИЧНІ ЕВОЛЮЦІЙНІ СИСТЕМИ З ІМПУЛЬСНИМИ ЗБУРЕННЯМИ

С.А. Семенюк[a], Я.М. Чабанюк[a]

[a] *Національний університет "Львівська Політехніка"*
(79013, Львів, вул. С.Бандери 12)

(Отримано 20 жовтня 2009 р.)

Встановлено асимптотичні властивості еволюційних систем з марковськими імпульсними збуреннями. При виконанні умов балансу встановлено слабку збіжність збуреної еволюції до детермінованої. Для цього побудовано генератор граничного процесу, розв'язуючи проблему сингулярного збурення для вихідної системи з врахуванням асимптотичної нормальності імпульсних збурень. В подальшому це дасть змогу розглядати проблеми стохастичної апроксимації та оптимізації таких систем.

Ключові слова: еволюційна система, процес Маркова, імпульсні збурення

2000 MSC: 60K37,60G51,60J25

УДК: 519.21

ВСТУП

Еволюційні системи використовуються для опису широкого класу природніх процесів у багатьох областях наук. Поряд з цим важливим є дослідження поведінки динамічних систем у випадковому середовищі (яке може утворюватися як самим середовищем, так сукупним впливом умов які важко врахувати поодинці, так і похибками обчислень). Вивченню таких систем присвячена велика кількість робіт відомих вчених (Скороход, Гіхман, Боголюбов та ін.). Зокрема в роботах Королюка В.С., Лімніуса Н. [1, 3] розглядається випадок асимптотично дифузійного збурення динамічної системи. Природнім узагальненням є випадок, коли збурення системи визначається імпульсним процесом.

I. Постановка задачі та позначення

Стохастична еволюційна система в ергодичному марковському середовищі задається еволюційним рівнянням:

$$du^\varepsilon(t) = C(u^\varepsilon(t), x(t/\varepsilon^4))dt + \varepsilon d\eta^\varepsilon(t), \quad u^\varepsilon(t) \in R. \quad (1)$$

Марковський процес $x(t), t \geq 0$ в стандартному фазовому просторі $(X, \boldsymbol{X})$ задається генератором:

$$\mathbf{Q}\varphi(x) = q(x) \int_X P(x, dy) \left[\varphi(y) - \varphi(x)\right], \quad \varphi \in \mathbf{B}(X),$$

де $\mathbf{B}(X)$ - банаховий простір дійсних обмежених функцій з супремум - нормою $||\varphi|| = \max_{x \in X} |\varphi(x)|$.

Стохастичне ядро $P(x, B), x \in X, B \in \boldsymbol{X}$, визначає рівномірно ергодичний вкладений ланцюг Маркова $x_n = x(\tau_n)$, $n \geq 0$, зі стаціонарним розподілом $\rho(B), B \in \boldsymbol{X}$. Стаціонарний розподіл $\pi(B), B \in \boldsymbol{X}$, марковського процесу $x(t), t \geq 0$, визначається співвідношенням:

$$\pi(dx)q(x) = q\rho(dx), \ q = \int_X \pi(dx)q(x).$$

Позначимо через R_0 - потенціальний оператор генератора $\mathbf{Q}$, що визначається рівністю [1] : $R_0 = \Pi - (\Pi + \mathbf{Q})^{-1}$, де $\Pi\varphi(x) = \int_X \pi(dy)\varphi(y)$ - проектор на підпростір $N_Q = \{\varphi : \mathbf{Q}\varphi = 0\}$ нулів оператора $\mathbf{Q}$.

Імпульсний процес збурень (ІПЗ) $\eta^\varepsilon(t), t \geq 0$, задається співвідношеннями:

$$\eta^\varepsilon(t) = \int_0^t \eta^\varepsilon(ds; x(s/\varepsilon^4)); \quad (2)$$

де сімейство процесів з незалежними приростами $\eta^\varepsilon(t, x), t \geq 0, x \in X$, задається генераторами

$$\mathbf{\Gamma}^\varepsilon(x)\varphi(w) = \varepsilon^{-4} \int_R [\varphi(w + \varepsilon^2 v) - \varphi(w)]\Gamma(dv; x), x \in X. \quad (3)$$

Нехай при цьому виконується умова балансу

$$\Pi b_1(x) = \int_X \pi(dx)b_1(x) = 0; \quad b_1(x) = \int_R v\Gamma(dv; x). \quad (4)$$

II. Імпульсний процес збурень

Розглянемо асимптотичні властивості збурюючого процесу.

Теорема 1. *За умови балансу (4) має місце слабка збіжність*

$$\eta^\varepsilon(t) \to \eta^0(t), \qquad \varepsilon \to 0.$$

Граничний процес $\eta^0(t)$ визначається генератором

$$\mathbf{\Gamma}\varphi(w) = \frac{1}{2}B\varphi''(w),$$

де

$$\begin{aligned} B &= B_1 + B_2; \\ B_1 &= 2\Pi b_1(x)R_0 b_1(x) = 2\int_X \pi(dx)b_1(x)R_0 b_1(x); \\ B_2 &= \Pi b_2(x) = \int_X \pi(dx)b_2(x); \quad b_2(x) = \int_R v^2\Gamma(dv;x). \end{aligned}$$

Граничний процес $\eta^0(t)$ визначається рівністю

$$\eta^0(t) = \sigma W(t),$$

де $\sigma^2 = B$; $W(t)$ - вінерівський процес.

Доведення теореми.

Лема 1. *Генератори сімейства процесів з незалежними приростами $\eta^\varepsilon(t,x)$, $t \geq 0$, $x \in X$, на тест-функціях $\varphi(w) \in C^3(R)$ допускають асимптотичне предсталення:*

$$\mathbf{\Gamma}^\varepsilon(x)\varphi(w) = \varepsilon^{-2}\mathbf{\Gamma_1}(x)\varphi(w) + \mathbf{\Gamma_2}(x)\varphi(w) + \gamma^\varepsilon(x)\varphi(w), \tag{5}$$

де

$$\begin{aligned} \mathbf{\Gamma_1}(x)\varphi(w) &= b_1(x)\varphi'(w); \\ \mathbf{\Gamma_2}(x)\varphi(w) &= \frac{1}{2}b_2(x)\varphi''(w); \end{aligned}$$

а залишковий член такий, що $||\gamma^\varepsilon(x)\varphi(w)|| \to 0$ при $\varepsilon \to 0$; $\varphi(w) \in C^3(R)$.

□ *Доведення.* Використовуючи розклад функції $\varphi(w)$ в ряд Тейлора, проведемо перетворення генератора (3):

$$\mathbf{\Gamma}^\varepsilon(x)\varphi(w) = \varepsilon^{-4}\int_R [\varphi(w+\varepsilon^2 v) - \varphi(w)]\Gamma(dv;x) =$$

$$= \varepsilon^{-4}\int_R [\varphi(w+\varepsilon^2 v) - \varphi(w) - \varepsilon^2 v\varphi'(w) -$$

$$-\frac{1}{2}\varepsilon^4 v^2\varphi''(w)]\Gamma(dv;x) +$$

$$+\varepsilon^{-2}b_1(x)\varphi'(w) + \frac{1}{2}b_2(x)\varphi''(w) =$$

$$= \varepsilon^{-2}b_1(x)\varphi'(w) + \frac{1}{2}b_2(x)\varphi''(w) + \gamma^\varepsilon(x)\varphi(w).$$

Зважаючи на те, що $\gamma^\varepsilon(x)\varphi(w) = O(\varepsilon^2)$, $\varphi(w) \in C^3(R)$ отримуємо представлення (5). ■

Лема 2. *Генератор двокомпонентного марковського процесу $\eta^\varepsilon(t)$, $x(t/\varepsilon^4)$, $t \geq 0$ має вигляд:*

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}^\varepsilon(x)\varphi(w,x) &= \varepsilon^{-4}\mathbf{Q}\varphi(w,x) + \varepsilon^{-2}\mathbf{\Gamma_1}(x)\varphi(w,x) + \\ &+ \mathbf{\Gamma_2}(x)\varphi(w,x) + \gamma^\varepsilon(x)\varphi(w,x), \end{aligned} \tag{6}$$

де оператори $\mathbf{\Gamma_1}(x), \mathbf{\Gamma_2}(x)$ визначаються в Лемі 1, а залишковий член такий, що $||\gamma^\varepsilon(x)\varphi(w,x)|| \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, $\varphi(w,\cdot) \in C^3(R)$.

□ *Доведення.* Доведення проводиться з використанням означення генератора марковського процесу та вигляду відповідних генераторів процесів $\eta^\varepsilon(t)$ та $x(t/\varepsilon^4)$. ■

Зрізаний оператор має вигляд [2]:

$$\begin{aligned} \mathbf{\Gamma}_0^\varepsilon(x)\varphi(w) &= \varepsilon^{-4}\mathbf{Q}\varphi(w,x) + \varepsilon^{-2}\mathbf{\Gamma_1}(x)\varphi(w,x) + \\ &+ \mathbf{\Gamma_2}(x)\varphi(w,x). \end{aligned} \tag{7}$$

Лема 3. *За умови балансу (4) розв'язок проблеми сингулярного збурення для зрізаного оператора (7) на тест-функціях*

$$\varphi^\varepsilon(w,x) = \varphi(w) + \varepsilon^2\varphi_2(w,x) + \varepsilon^4\varphi_0(w,x)$$

реалізується співвідношенням:

$$\mathbf{\Gamma}_0^\varepsilon(x)\varphi^\varepsilon(w,x) = \mathbf{\Gamma}\varphi(w) + \varepsilon^2\theta_\eta^\varepsilon(x)\varphi(w), \tag{8}$$

де залишковий член $\theta_\eta^\varepsilon(x)\varphi(w)$ рівномірно обмежений по x.

Граничний оператор $\mathbf{\Gamma}$ визначається форомулою:

$$\mathbf{\Gamma}\Pi = \Pi\mathbf{\Gamma_2}(x)\Pi + \Pi\mathbf{\Gamma_1}(x)R_0\mathbf{\Gamma_1}(x)\Pi. \tag{9}$$

□ *Доведення.* Для виконання рівності (8) необхідно, щоб коефіцієнти при однакових степенях ε зліва і справа співпадали. Обчислимо:

$$\begin{aligned} &\mathbf{\Gamma}_0^\varepsilon(x)\varphi^\varepsilon(w,x) = \varepsilon^{-4}\mathbf{Q}\varphi(w) + \varepsilon^{-2}[\mathbf{Q}\varphi_2(w,x) + \\ &+\mathbf{\Gamma_1}(x)\varphi(w)] + [\mathbf{Q}\varphi_0(w,x) + \mathbf{\Gamma_1}(x)\varphi_2(w,x) + \\ &+\mathbf{\Gamma_2}(x)\varphi(w)] + \varepsilon^2[\mathbf{\Gamma_1}(x)\varphi_0(w,x) + \\ &+\mathbf{\Gamma_2}(x)\varphi_2(w,x)] + \varepsilon^4\mathbf{\Gamma_2}(x)\varphi_0(w,x). \end{aligned}$$

Оскільки $\varphi(w)$ не залежиить від x то

$$\mathbf{Q}\varphi(w) = 0, \Leftrightarrow \varphi(w) \in N_{\mathbf{Q}}.$$

Умова балансу (4) є умовою розв'язності рівняння

$$\mathbf{Q}\varphi_2(w,x) + \mathbf{\Gamma_1}(x)\varphi(w) = 0.$$

Тому

$$\varphi_2(w,x) = R_0\mathbf{\Gamma_1}(x)\varphi(w). \tag{10}$$

Рівняння

$$\mathbf{Q}\varphi_0(w,x) + \mathbf{\Gamma_1}(x)\varphi_2(w,x) + \mathbf{\Gamma_2}(x)\varphi(w) = \mathbf{\Gamma}\varphi(w)$$

з використанням (10) можна звести до вигляду

$$\mathbf{Q}\varphi_0(w,x) + \mathbf{\Gamma_1}(x)R_0\mathbf{\Gamma_1}(x)\varphi(w) + \mathbf{\Gamma_2}(x)\varphi(w) = \mathbf{\Gamma}\varphi(w)$$

Умова розв'язності останнього рівняння і дає граничний оператор $\mathbf{\Gamma}$ в формі (9).

Тоді

$$\varphi_0(w,x) = R_0[\mathbf{\Gamma_1}(x)R_0\mathbf{\Gamma_1}(x) + \mathbf{\Gamma_2}(x) - \mathbf{\Gamma}]\varphi(w). \tag{11}$$

Використовуючи (10) та (11), решту членів розкладу можна звести до вигляду

$$\begin{aligned} &\varepsilon^2[\mathbf{\Gamma_1}(x)\varphi_0(w,x) + \mathbf{\Gamma_2}(x)\varphi_2(w,x)]+ \\ &+\varepsilon^4\mathbf{\Gamma_2}(x)\varphi_0(w,x) = \varepsilon^2[\mathbf{\Gamma_1}(x)R_0[\mathbf{\Gamma_1}(x)R_0\mathbf{\Gamma_1}(x)+ \\ &+\mathbf{\Gamma_2}(x) - \mathbf{\Gamma}] + \mathbf{\Gamma_2}(x)R_0\mathbf{\Gamma_1}(x)]\varphi(w)+ \\ &+\varepsilon^4\mathbf{\Gamma_2}(x)R_0[\mathbf{\Gamma_1}(x)R_0\mathbf{\Gamma_1}(x)+\mathbf{\Gamma_2}(x)]\varphi(w)= \\ &= \varepsilon^2\theta_\eta^\varepsilon(x)\varphi(w). \end{aligned}$$

Обмеженість $\theta^{\varepsilon}_{\eta}\varphi(w)$ випливає з вигляду операторів $\mathbf{\Gamma_1}(x)$, $\mathbf{\Gamma_2}(x)$ та R_0. ■

Завершення доведення теореми. Проводиться з використанням результатів Леми 3 та теореми 4.2 в [3].

III. Поведінка динамічної системи

Розглянемо асимптотичні властивості вихідної еволюційної системи (1).

Теорема 1. *За умови балансу (4) має місце слабка збіжність*

$$(u^{\varepsilon}(t), \eta^{\varepsilon}(t) \to (\hat{u}(t), \sigma W(t)), \qquad \varepsilon \to 0$$

Граничний процес $(\hat{u}(t), \sigma W(t))$ визначається генератором

$$\mathbf{L}\varphi(u,w) = \hat{C}(u)\varphi'_u(u,w) + \frac{1}{2}B\varphi''_w(u,w), \qquad (12)$$

де

$$\hat{C}(u) = \Pi\mathbf{C}(x) = \int_X \pi(dx)C(u,x);$$
$$B = B_1 + B_2;$$
$$B_1 = 2\Pi b_1(x)R_0b_1(x) = 2\int_X \pi(dx)b_1(x)R_0b_1(x);$$
$$B_2 = \Pi b_2(x) = \int_X \pi(dx)b_2(x).$$

тут $\sigma^2 = B$; $W(t)$ - вінерівський процес.

Граничний процес $\hat{u}(t)$ визначається розв'язком диференціального рівняння

$$d\hat{u}(t) = \hat{C}(\hat{u}(t))dt. \qquad (13)$$

Доведення теореми.

Лема 1. *Генератор трьохкомпонентного марковського процесу $u^{\varepsilon}(t)$, $\eta^{\varepsilon}(t)$, $x(t/\varepsilon^4)$, $t \geq 0$ має вигляд:*

$$\mathbf{L}^{\varepsilon}(x)\varphi(u,w,x) = \varepsilon^{-4}\mathbf{Q}\varphi(u,w,x) + \mathbf{\Gamma}^{\varepsilon}(x)\varphi(u,w,x) + \mathbf{C}(x)\varphi(u,w,x) + \varepsilon\mathbf{\Gamma}^{\varepsilon}_u(x)\varphi(u,w,x) + \theta^{\varepsilon}_u(x)\varphi(u,w,x), \quad (14)$$

де $\mathbf{\Gamma}^{\varepsilon}(x)$ - генератор сімейства процесів з незалежними приростами (3),

$$\mathbf{C}(x)\varphi(u,w,x) = C(u,x)\varphi'_u(u,w,x),$$

$\mathbf{\Gamma}^{\varepsilon}_u(x)$ - генератор, аналогічний (3), проте діє по першому параметру функції $\varphi(u,w,x)$ (в той час, як $\mathbf{\Gamma}^{\varepsilon}(x)$ діє по другому).

Залишковий член такий, що $||\theta^{\varepsilon}_u(x)\varphi(v,w,x)|| \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

□ *Доведення.* Ввівши позначення $u^{\varepsilon}(t) = u_t$, $\eta^{\varepsilon}(t) = w_t$, $x(t/\varepsilon^4) = x_t$, згідно означення генератора марковського процесу

$$\mathbf{L}^{\varepsilon}(x)\varphi(u,w,x) =$$
$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E[\varphi(u^{\varepsilon}(t+\Delta), \eta^{\varepsilon}(t+\Delta), x((t+\Delta)/\varepsilon^4)) -$$
$$-\varphi(u^{\varepsilon}(t), \eta^{\varepsilon}(t), x(t/\varepsilon^4))]=$$
$$= \lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E[\varphi(u_{t+\Delta}, w_{t+\Delta}, x_{t+\Delta}) - \varphi(u,w,x)] =$$
$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E[\varphi(u_{t+\Delta}, w_{t+\Delta}, x_{t+\Delta}) - \varphi(u, w_{t+\Delta}, x_{t+\Delta})] +$$
$$+ \lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E[\varphi(u, w_{t+\Delta}, x_{t+\Delta}) - \varphi(u,w,x)]$$

Оскільки, згідно (1): $u(t+\Delta) = u + C(u,x)\Delta + \varepsilon\Delta w + o(\Delta)$, тому

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E[\varphi(u_{t+\Delta}, w_{t+\Delta}, x_{t+\Delta}) - \varphi(u, w_{t+\Delta}, x_{t+\Delta})]=$$
$$= \lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E[\varphi(u + C(u,x)\Delta + \varepsilon\Delta w + o(\Delta),$$
$$w_{t+\Delta}, x_{t+\Delta}) - \varphi(u, w_{t+\Delta}, x_{t+\Delta})].$$

В останній границі додамо та віднімемо $\varphi(u + C(u,x)\Delta + o(\Delta), w_{t+\Delta}, x_{t+\Delta})$. Отже, одержимо:

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E[\varphi(u_{t+\Delta}, w_{t+\Delta}, x_{t+\Delta}) - \varphi(u, w_{t+\Delta}, x_{t+\Delta})]=$$
$$= \lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E[\varphi(u + C(u,x)\Delta + \varepsilon\Delta w + o(\Delta), w_{t+\Delta},$$
$$x_{t+\Delta}) - \varphi(u + C(u,x)\Delta + o(\Delta), w_{t+\Delta}, x_{t+\Delta})] +$$
$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E[\varphi(u + C(u,x)\Delta + o(\Delta), w_{t+\Delta}, x_{t+\Delta}) -$$
$$\varphi(u, w_{t+\Delta}, x_{t+\Delta})].$$

Оскільки, згідно означення генератора $\mathbf{\Gamma}^{\varepsilon}(x)$: $\mathbf{\Gamma}^{\varepsilon}(x)\varphi(u) = \lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E[\varphi(u+\Delta w) - \varphi(u)]$, і провівши заміну $v = u + C(u,x)\Delta + o(\Delta)$ (зауважимо, що $v \to u$ при $\Delta \to 0$), одежимо наступний вигляд для першої границі:

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E[\varphi(v + \varepsilon\Delta w, w_{t+\Delta}, x_{t+\Delta}) -$$
$$-\varphi(v, w_{t+\Delta}, x_{t+\Delta})] = \varepsilon\mathbf{\Gamma}^{\varepsilon}_u(x)\varphi(u,w,x).$$

Після перетворень друга границя набуде вигляду:

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E[\varphi(u + C(u,x)\Delta + o(\Delta), w_{t+\Delta}, x_{t+\Delta})$$
$$-\varphi(u, w_{t+\Delta}, x_{t+\Delta})] =$$
$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E[\varphi'_u(u, w_{t+\Delta}, x_{t+\Delta})(C(u,x)\Delta + o(\Delta))] =$$
$$= C(u,x)\varphi'_u(u,w,x).$$

А, врахувавши, що згідно [3]

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}E[\varphi(u, w_{t+\Delta}, x_{t+\Delta}) - \varphi(u,w,x)] =$$
$$= \hat{\Gamma}^{\varepsilon}(x)\varphi(u,w,x) = \varepsilon^{-4}\mathbf{Q}\varphi(u,w,x) + \mathbf{\Gamma}^{\varepsilon}(x)\varphi(u,w,x),$$

то, просумувавши ці границі, отримаємо (14). ■

Лема 2. *Генератор $\mathbf{L}^\varepsilon(x)$ допускає асимптотичне представлення*

$$\mathbf{L}^\varepsilon(x)\varphi(u,w,x) = \varepsilon^{-4}\mathbf{Q}\varphi(u,w,x) + \varepsilon^{-2}\mathbf{\Gamma_1}(x)\varphi(u,w,x) + \varepsilon^{-1}\mathbf{\Gamma_1^u}(x)\varphi(u,w,x) + + [\mathbf{C}(x) + \mathbf{\Gamma_2}(x)]\,\varphi(u,w,x) + \hat{\theta}_u^\varepsilon(x)\varphi(u,w,x), \tag{15}$$

де

$$\hat{\theta}_u^\varepsilon(x) = \gamma^\varepsilon + \theta_u^\varepsilon(x) + \varepsilon\mathbf{\Gamma_2^u}(x).$$

Генератори $\mathbf{\Gamma_1}(x), \mathbf{\Gamma_2}(x)$ визначені в лемі 1.

$$\mathbf{\Gamma_1^u}(x)\varphi(u,w,x) = b_1(x)\varphi_u'(u,w,x);$$
$$\mathbf{\Gamma_2^u}(x)\varphi(u,w,x) = \frac{1}{2}b_2(x)\varphi_u''(u,w,x);$$

Також залишковий член такий, що $||\hat{\theta}_u^\varepsilon(x)\varphi(u,w,x)|| \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

□ *Доведення.* Доведення проводиться із використанням представлення оператора $\mathbf{\Gamma}^\varepsilon(x)$ (5) та результатів леми 1. ■

Зрізаний оператор має вигляд:

$$\mathbf{L}_0^\varepsilon(x)\varphi = \varepsilon^{-4}\mathbf{Q}\varphi + \varepsilon^{-2}\mathbf{\Gamma_1}(x)\varphi + \varepsilon^{-1}\mathbf{\Gamma_1}^u(x)\varphi(u,w,x) + [\mathbf{C}(x) + \mathbf{\Gamma_2}(x)]\,\varphi. \tag{16}$$

Лема 3. *За умови балансу (4) розв'язок проблеми сингулярного збурення для зрізаного оператора (16) на тест-функціях*

$$\varphi^\varepsilon(u,w,x) = \varphi(u,w) + \varepsilon^2\varphi_2(u,w,x) + \varepsilon^3\varphi_1(u,w,x) + \varepsilon^4\varphi_0(u,w,x)$$

реалізується співвідношенням:

$$\mathbf{L}_0^\varepsilon(x)\varphi^\varepsilon(u,w,x) = \mathbf{L}\varphi(u,w) + \varepsilon^2\theta_u^\varepsilon(x)\varphi(u,w), \tag{17}$$

де залишковий член $\theta_u^\varepsilon(x)$ рівномірно обмежений по x.

Граничний оператор $\mathbf{L}$ визначається формулою:

$$\mathbf{L}\Pi = \Pi[\mathbf{C}(x) + \mathbf{\Gamma_1}(x)R_0\mathbf{\Gamma_1}(x) + \mathbf{\Gamma_2}(x)]\Pi. \tag{18}$$

□ *Доведення.* Для виконання рівності (17) необхідно, щоб коефіцієнти при однакових степенях ε зліва і справа співпадали. Для цього обчислимо:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{L}_0^\varepsilon(x)\varphi^\varepsilon(u,w,x) = \varepsilon^{-4}\mathbf{Q}\varphi(u,w) + \\
&\varepsilon^{-2}[\mathbf{Q}\varphi_2(u,w,x) + \mathbf{\Gamma_1}(x)\varphi(u,w)] + \\
&+\varepsilon^{-1}[\mathbf{Q}\varphi_1(u,w,x) + \mathbf{\Gamma_1}^u(x)\varphi(u,w)] + \\
&+[\mathbf{Q}\varphi_0(u,w,x) + \mathbf{\Gamma_1}(x)\varphi_2(u,w) + \\
&+(\mathbf{C}(x) + \mathbf{\Gamma_2}(x))\varphi(u,w)] + \\
&+\varepsilon[\mathbf{\Gamma_1}(x)\varphi_1(v,w,x) + \mathbf{\Gamma_1^u}(x)\varphi_2(v,w,x)] + \\
&+\varepsilon^2[\mathbf{\Gamma_1}(x)\varphi_0(v,w,x) + \mathbf{\Gamma_1^u}(x)\varphi_1(v,w,x) + \\
&+(\mathbf{C}(x) + \mathbf{\Gamma_2}(x))\varphi_2(v,w,x)] \\
&+\varepsilon^3[\mathbf{\Gamma_1^u}(x)\varphi_0(v,w,x) + (\mathbf{C}(x) + \mathbf{\Gamma_2}(x))\varphi_1(v,w,x)] + \\
&+\varepsilon^4[\mathbf{C}(x) + \mathbf{\Gamma_2}(x))\varphi_0(v,w,x)].
\end{aligned}$$

Оскільки $\varphi(u,w)$ не залежиить від x то

$$\mathbf{Q}\varphi(u,w) = 0, \Leftrightarrow \varphi(u,w) \in N_Q.$$

Умова балансу (4) є умовою розв'язності рівнянь

$$\mathbf{Q}\varphi_2(u,w,x) + \mathbf{\Gamma_1}(x)\varphi(u,w) = 0.$$

та

$$\mathbf{Q}\varphi_1(u,w,x) + \mathbf{\Gamma_1^u}(x)\varphi(u,w) = 0.$$

Тому

$$\varphi_2(u,w,x) = R_0\mathbf{\Gamma_1}(x)\varphi(u,w).$$
$$\varphi_1(u,w,x) = R_0\mathbf{\Gamma_1^u}(x)\varphi(u,w).$$

Останнє рівняння

$$\mathbf{Q}\varphi_0(u,w,x) + \mathbf{\Gamma_1}(x)\varphi_2(u,w) + [\mathbf{C}(x) + \mathbf{\Gamma_2}(x)]\varphi(u,w) = \mathbf{L}\varphi(u,w)$$

з використанням вигляду $\varphi_2(u,w,x)$ можна представити

$$\mathbf{Q}\varphi_0(u,w,x) + \mathbf{\Gamma_1}(x)R_0\mathbf{\Gamma_1}(x)\varphi(u,w) + [\mathbf{C}(x) + \mathbf{\Gamma_2}(x)]\varphi(u,w) = \mathbf{L}\varphi(u,w).$$

Умова розв'язності останнього рівняння і дає граничний оператор $\mathbf{L}$ в формі (18). ■

Завершення доведення теореми.

Використовуючи означення операторів при обчисленні правої частини (18) одержимо

$$\begin{aligned}
&\mathbf{L}\varphi(u,w) = \Pi[\mathbf{C}(x) + \mathbf{\Gamma_1}(x)R_0\mathbf{\Gamma_1}(x) + \mathbf{\Gamma_2}(x)]\varphi(u,w) = \\
&= \int_X \pi(dx)C(u,x)\varphi_u'(u,w) + \frac{1}{2}\int_X \pi(dx)b_2(x)\varphi_w''(u,w) + \\
&+ \int_X \pi(dx)b_1(x)R_0b_1(x)\varphi_w''(u,w).
\end{aligned}$$

І в результаті одержимо:

$$\mathbf{L}\varphi(u,w) = \hat{C}(u)\varphi_u'(u,w) + \frac{1}{2}B\varphi_w''(u,w).$$

Закінчення доведення теореми проводиться по схемі доведення теореми 4.2 в [3].

Висновки

Отже, граничний процес для стохастичної еволюційної системи на зростаючих інтервалах часу визначається розв'язком детермінованого диференціального рівняння [4]. Одержаний результат дозволяє досліджувати швидкість збіжності збуреного процесу до граничного, а також розглядати процедури стохастичної апроксимації та оптимізації для задач, в яких система описується еволюційним рівнянням з марковськими імпульсними збуреннями.

Література

[1] Korolyuk V.S., Korolyuk V.V. Stochastic Models of Systems, Kluwer, Dordrecht. – 1999.

[2] Чабанюк Я.М. *Апроксимація дифузійним процесом в схемі усереднення*, Доп. НАН України. (2004). – № 12. – С. 35–40.

[3] Korolyuk V.S, Limnius N. Stochastic Systems in Merging Phase Space, World Scientific, 2005.

[4] S.A. Semenyuk, Ya.M. Chabanyuk *Fluctuations of the evolution system with Markov impulsive perturbations*, Matematychni Studii, (2009). – V. 32. – №. 2. – C. 198–204.

STOCHASTIC EVOLUTION SYSTEMS WITH IMPULSIVE PERTURBATIONS

S.A. Semenyuk[a], Ya.M. Chabanyuk[a]

[a] *National University "Lvivska Politehnika"*
(12 S.Bandera Str., 79013, Lviv, Ukraine)

In this paper we discussed asymptotic properties of the evolution system with Markov impulsive perturbations. Under the balance conditions perturbed evolution converges weakly to the deterministic one. To achieve this we build generator for the limit process solving the singular perturbation problem for the original system and taking into account the asymptotic normality of impulsive perturbation. As a result it will allow to consider stochasctic approximation and optimization of such systems.

Keywords: fluctuations, stochastic approximation procedure, Markov process, impulsive perturbations

2000 MSC: 60K37,60G51,60J25

УДК: 519.21