ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
col diag meas ti "Фізико-математичні науки"
Вип.660 № 660, (2009) с. 49–55

JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY
"LVIVSKA POLITECHNIKA"
"Physical & mathematical sciences"
Vol.660 No 660, (2009) 49–55

ДЕЯКІ ДОСТАТНІ УМОВИ ЗБІЖНОСТІ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ ФІГУРНИХ НАБЛИЖЕНЬ ПАРНОГО І НЕПАРНОГО ПОРЯДКІВ ДЛЯ ДВОВИМІРНИХ НЕПЕРЕРВНИХ ДРОБІВ З ДІЙСНИМИ ЕЛЕМЕНТАМИ

Т.М. Антонова[a], О.М. Сусь[b]

[a] *Національний університет "Львівська політехніка"*
вул. С. Бандери 12, 79013, Львів, Україна
[b] *Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача*
вул. Наукова 3-б, 79060, Львів, Україна

(Отримано 10 жовтня 2009 р.)

Розглядаються деякі достатні умови збіжності послідовностей фігурних наближень парного і непарного порядків для двовимірних неперервних дробів з дійсними елементами. Встановлено ознаку збіжності двовимірних неперервних дробів.

Ключові слова: неперервний дріб, двовимірний неперервний дріб, фігурний підхідний дріб, послідовність наближень, збіжність.

2000 MSC: 11A95, 11J70, 30B70,65G30

УДК: 517.526

Вступ

Розглянемо нескінченний двовимірний неперервний дріб (ДНД) вигляду

$$\Phi_0 + \operatorname*{D}_{i=1}^{\infty} \frac{a_{ii}}{1+\Phi_i}, \tag{1}$$

$$\Phi_i = \operatorname*{D}_{j=1}^{\infty} \frac{a_{i+j,i}}{1} + \operatorname*{D}_{j=1}^{\infty} \frac{a_{i,i+j}}{1}, i = 0,1,2,\ldots, \tag{2}$$

де $a_{i,j}, i,j = 0,1,\ldots, i+j \geq 1$, – дійсні числа.

Означення 1. n-ми фігурними наближеннями або n-ми фігурними підхідними дробами ДНД (1), (2) називаються скінченні ДНД вигляду

$$\tilde{f}_n = \Phi_0^{(n)} + \operatorname*{D}_{i=1}^{[\frac{n}{2}]} \frac{a_{ii}}{1+\Phi_i^{(n-2i)}}, \quad n = 1,2,\ldots, \tag{3}$$

де

$$\Phi_i^{(0)} = 0, \ \ \Phi_i^{(k)} = \operatorname*{D}_{j=1}^{k} \frac{a_{i+j,i}}{1} + \operatorname*{D}_{j=1}^{k} \frac{a_{i,i+j}}{1}, \quad k = 1,2,\ldots. \tag{4}$$

Означення 2. Скінченні ДНД вигляду

$$f_n = \Phi_0^{(n)} + \operatorname*{D}_{i=1}^{n} \frac{a_{ii}}{1+\Phi_i^{(n-i)}}, \quad n = 1,2,\ldots,$$

де $\Phi_k^{(p)}, k = 0,1,\ldots,p = 0,1,\ldots,$ визначаються за формулами (4), називаються звичайними n-ми наближеннями або n-ми підхідними дробами ДНД (1), (2).

Властивості послідовностей звичайних і фігурних наближень ДНД з дійсними елементами $a_{i,j}$, $i,j = 0,1,\ldots,i+j \geq 1$, за різних умов для їх значень, розглядаються у роботах [2]–[4], [6]–[9]. Найбільше вивченими є багатовимірні узагальнення неперервних дробів з додатними елементами. Так, Д.І. Боднар в [5] та Х.Й. Кучмінська в [9] встановили, що звичайні наближення гіллястих ланцюгових дробів з додатними елементами та звичайні наближення двовимірних неперервних дробів з додатними елементами мають властивість „вилки", тобто для їх звичайних наближень справджуються нерівності

$$f_{2k} \leq f_{2k+2} \leq f_{2j+1} \leq f_{2j-1},$$

де $k, j-$ довільні натуральні числа. Виявляється, що фігурні наближення такої властивості не мають. Важливим для досліджень є також питання про еквівалентність звичайної та фігурної збіжностей. В[5] доведено, що для багатовимірних узагальнень неперервних дробів з додатними елементами, зокрема, гіллястих ланцюгових дробів та двовимірних неперервних дробів, зі звичайної збіжності випливає збіжність фігурна. Робота [2] присвячена вивченню властивостей послідовностей фігурних та звичайних наближень парного порядку для двовимірних неперервних дробів з недодатними елементами. У [3] вивчаються властивості послідовностей фігурних наближень двовимірних неперервних дробів спеціального вигляду з дійсними елементами. Питанням збіжності та еквівалентності звичайної та фігурної збіжностей двовимірних неперервних дробів з дійсними елементами присвячена робота [4].

Ця робота є продовженням досліджень, започаткованих у роботі [2]. Надалі розглядатимемо властивості фігурних наближень ДНД (1), (2) за умови

$$a_{i,i} \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots. \tag{5}$$

I. Залишки наближень ДНД. Формула різниці двох фігурних наближень

Фігурні наближення (3), (4) ДНД (1),(2) можна подати у вигляді

$$\tilde{f}_1 = \Phi_0^{(1)}, \tilde{f}_n = \Phi_0^{(n)} + \frac{a_{1,1}}{\tilde{Q}_1^{(n-2)}}, \ \ n = 2, 3, \dots, \tag{6}$$

$$\Phi_i^{(k)} = \frac{a_{i+1,i}}{Q_{i+1,i}^{(k-1)}} + \frac{a_{i,i+1}}{Q_{i,i+1}^{(k-1)}}, i = 0, 1, \dots, k = 1, 2, \dots, \tag{7}$$

де вирази

$$\tilde{Q}_j^{(0)} = 1, \tilde{Q}_j^{(1)} = 1 + \Phi_j^{(1)}, j = 1, 2, \dots, \tag{8}$$

$$\tilde{Q}_j^{(p+2)} = 1 + \Phi_j^{(p+2)} + \frac{a_{j+1,j+1}}{\tilde{Q}_{j+1}^{(p)}}, \tag{9}$$

$$j = 1, 2, \dots, p = 0, 1, \dots,$$

називаються двовимірними залишками фігурних наближень (3), а скінченні неперервні дроби

$$Q_{i+j,j}^{(0)} = Q_{j,i+j}^{(0)} = 1, i = 1, 2, \dots, j = 0, 1, \dots,$$

$$Q_{i+j,j}^{(p+1)} = 1 + \frac{a_{i+j+1,j}}{Q_{i+j+1,j}^{(p)}}, Q_{j,i+j}^{(p+1)} = 1 + \frac{a_{j,i+j+1}}{Q_{j,i+j+1}^{(p)}}, \tag{10}$$

$$i = 1, 2, \dots, j = 0, 1, \dots, p = 0, 1, \dots,$$

називаються одновимірними залишками фігурних наближень (3).

Для дослідження властивостей послідовностей фігурних підхідних дробів ДНД (1), (2) використовується формула різниці [5]

$$\tilde{f}_n - \tilde{f}_m = \sum_{k=0}^{[\frac{m}{2}]} \frac{\left(\Phi_k^{(n-2k)} - \Phi_k^{(m-2k)}\right) \prod\limits_{j=1}^{k} (-a_{j,j})}{\prod\limits_{j=1}^{k} \tilde{Q}_j^{(m-2j)} \tilde{Q}_j^{(n-2j)}} -$$

$$- \frac{\prod\limits_{j=1}^{[\frac{m}{2}]+1} (-a_{j,j})}{\prod\limits_{j=1}^{[\frac{m}{2}]} \tilde{Q}_j^{(m-2j)} \prod\limits_{j=1}^{[\frac{m}{2}]+1} \tilde{Q}_j^{(n-2j)}} \cdot \delta_{n,m}, \ \ n > m, \tag{11}$$

$$\delta_{n,m} = \begin{cases} 0, & \text{якщо n=2r+1, m=2r, r=0,1,}\dots, \\ 1, & \text{у інших випадках,} \end{cases}$$

у припущенні, що всі $\tilde{Q}_j^{(p)} \neq 0, \ \ j = 1, 2, \dots, p = 0, 1, \dots$.

II. Властивості послідовностей фігурних наближень парного і непарного порядку

У роботі [2] доведено теорему

Теорема 1. *Нехай елементи ДНД (1), (2) задовольняють умови (5) і*

$$\phi_0 \geq \Phi_0^{(2r)}, r = 1, 2, \dots, \tag{12}$$

$$\Phi_i^{(2q+2s)} \geq \Phi_i^{(2s)}, \ q = 1, 2, \dots, i, s = 0, 1, \dots, \tag{13}$$

$$|a_{2k,2k}| \geq$$

$$\left(1 + \Phi_{2k}^{(2r)} + \frac{|a_{2k+1,2k+1}|}{g_{2k+1,2k+1}}\right) \cdot \left(1 + \Phi_{2k-1}^{(2r+2)} + g_{2k-1,2k-1}\right), \tag{14}$$

$$r, k = 1, 2, \dots,$$

де $\phi_0, g_{i,i}, i = 1, 2, \dots,$ – деякі додатні числа, а величини $\Phi_i^{(r)}, \ \ i, r = 1, 2, \dots,$ визначаються за формулами (4).

Тоді послідовність $\{\tilde{f}_{4k}\}, k = 1, 2, \dots,$ фігурних наближень ДНД (1), (2) є збіжною, і для неї виконується нерівність

$$\tilde{f}_4 \leq \tilde{f}_8 \leq \dots \leq \phi_0 + \frac{|a_{1,1}|}{g_{1,1}}.$$

Якщо, крім того

$$|a_{2k+1,2k+1}| < 1, k = 1, 2, \dots, \tag{15}$$

то послідовність $\{\tilde{f}_{2k}\}$ є збіжною і

$$\tilde{f}_{4m} \leq \tilde{f}_{4m+6} \leq \tilde{f}_{4m+8}, \ \ m = 1, 2, \dots.$$

При доведенні цієї теореми використовували такі оцінки для залишків фігурних наближень:

$$1 + \Phi_{2p}^{(4k)} \leq \tilde{Q}_{2p}^{(4k)} \leq 1 + \Phi_{2p}^{(4k)} + \frac{|a_{2p+1,2p+1}|}{g_{2p+1,2p+1}}, \tag{16}$$

$$\tilde{Q}_{2p-1}^{(4k-2)} \leq -g_{2p-1,2p-1}, \ \ p, k = 1, 2, \dots,$$

якщо виконано умови (12)-(14), а також оцінки

$$1 + \Phi_{2p}^{(4k+2)} \leq \tilde{Q}_{2p}^{(4k+2)} \leq 1 + \Phi_{2p}^{(4k+2)} + \frac{|a_{2p+1,2p+1}|}{g_{2p+1,2p+1}}, \tag{17}$$

$$\tilde{Q}_{2p-1}^{(4k)} \leq -g_{2p-1,2p-1}, 0 < \tilde{Q}_{2p}^{(2)} \leq 1 + \Phi_{2p}^{(2)},$$

$$p = 1, 2, \dots, k = 1, 2, \dots,$$

за умов (12)–(15).

За схемою доведення теореми 1, доведемо наступну теорему.

Теорема 2. *Нехай елементи ДНД (1), (2) задовольняють умови (5) і*

$$\phi_0 \geq \Phi_0^{(2r-1)}, 1+\Phi_k^{(2r-1)} > 0, \quad k, r = 1, 2, \ldots, \quad (18)$$

$$\Phi_i^{(2s+5)} \geq \Phi_i^{(2s+1)}, \quad i, s = 0, 1, \ldots, \quad (19)$$

$$|a_{2k,2k}| \geq \left(1+\Phi_{2k}^{(2r-1)} + \frac{|a_{2k+1,2k+1}|}{g'_{2k+1,2k+1}}\right) \cdot$$

$$\cdot \left(1+\Phi_{2k-1}^{(2r+1)} + g'_{2k-1,2k-1}\right), \quad r, k = 1, 2, \ldots, \quad (20)$$

де $\phi_0, g'_{i,i}, i = 1, 2, \ldots,$ – деякі додатні числа, а величини $\Phi_i^{(r)}, \quad i, r = 0, 1, \ldots,$ визначаються за формулами (4).

Тоді послідовність $\{\tilde{f}_{4k+1}\}, \quad k = 0, 1, \ldots,$ фігурних наближень ДНД (1), (2) є збіжною, і для неї виконується нерівність

$$\tilde{f}_1 \leq \tilde{f}_5 \leq \ldots \leq \phi_0 + \frac{|a_{1,1}|}{g'_{1,1}}. \quad (21)$$

Якщо, крім того,

$$1+\Phi_{2k}^{(3)} + \frac{a_{2k+1,2k+1}}{1+\Phi_{2k+1}^{(1)}} > 0, \ k = 1, 2, \ldots, \quad (22)$$

то послідовність $\{\tilde{f}_{4k-1}\}, \ k = 1, 2, \ldots,$ є збіжною і

$$\tilde{f}_3 \leq \tilde{f}_7 \leq \ldots \leq \phi_0 + \frac{|a_{1,1}|}{g'_{1,1}}. \quad (23)$$

□ *Доведення.* Покажемо, що послідовність $\{\tilde{f}_{4k+1}\}, \quad k = 0, 1, \ldots,$ є збіжною. Для цього розглянемо формулу (11) для $n = 4p+5$ та $m = 4p+1$, $p = 0, 1, \ldots,$

$\tilde{f}_{4p+5} - \tilde{f}_{4p+1} =$

$$= \sum_{k=0}^{2p} \frac{\left(\Phi_k^{(4p+5-2k)} - \Phi_k^{(4p+1-2k)}\right) \prod\limits_{j=1}^{k}(-a_{j,j})}{\prod\limits_{j=1}^{k} \tilde{Q}_j^{(4p+5-2j)} \tilde{Q}_j^{(4p+1-2j)}} -$$

$$- \frac{\prod\limits_{j=1}^{2p+1}(-a_{j,j})}{\prod\limits_{j=1}^{2p+1} \tilde{Q}_j^{(4p+5-2j)} \prod\limits_{j=1}^{2p} \tilde{Q}_j^{(4p+1-2j)}} \quad (24)$$

і покажемо, що за умов теореми (5),(18)–(20), послідовність $\{\tilde{f}_{4k+1}\}, \ k = 0, 1, \ldots,$ є неспадною.

Спочатку оцінимо значення залишків $\tilde{Q}_k^{(2p-1)}$, $k, p = 1, 2, \ldots$. Враховуючи означення залишків (8), (9) і умови (5), (18)–(20) теореми, маємо

$$\tilde{Q}_{2p}^{(1)} = 1 + \Phi_{2p}^{(1)} > 0,$$

$$-\tilde{Q}_{2p-1}^{(3)} = \frac{|a_{2p,2p}|}{Q_{2p}^{(1)}} - \left(1+\Phi_{2p-1}^{(3)}\right) =$$

$$= \frac{|a_{2p,2p}|}{1+\Phi_{2p}^{(1)}} - \left(1+\Phi_{2p-1}^{(3)}\right) \geq g'_{2p-1,2p-1},$$

$$\tilde{Q}_{2p-2}^{(5)} = 1+\Phi_{2p-2}^{(5)} - \frac{|a_{2p-1,2p-1}|}{\tilde{Q}_{2p-1}^{(3)}} = 1+\Phi_{2p-2}^{(5)} +$$

$$+ \frac{|a_{2p-1,2p-1}|}{-\tilde{Q}_{2p-1}^{(3)}} \leq 1+\Phi_{2p-2}^{(5)} + \frac{|a_{2p-1,2p-1}|}{g'_{2p-1,2p-1}},$$

$$-\tilde{Q}_{2p-3}^{(7)} = \frac{|a_{2p-2,2p-2}|}{\tilde{Q}_{2p-2}^{(5)}} - \left(1+\Phi_{2p-3}^{(7)}\right) \geq$$

$$\geq \frac{|a_{2p-2,2p-2}|}{1+\Phi_{2p-2}^{(5)} + \dfrac{|a_{2p-1,2p-1}|}{g'_{2p-1,2p-1}}} - \left(1+\Phi_{2p-3}^{(7)}\right) \geq g'_{2p-3,2p-3}.$$

Використовуючи метод математичної індукції, неважко переконатись у правильності нерівностей

$$1+\Phi_{2p}^{(4k+1)} \leq \tilde{Q}_{2p}^{(4k+1)} \leq 1+\Phi_{2p}^{(4k+1)} + \frac{|a_{2p+1,2p+1}|}{g'_{2p+1,2p+1}}, \quad (25)$$

$$\tilde{Q}_{2p-1}^{(4k+3)} \leq -g'_{2p-1,2p-1}, \quad k = 0, 1, \ldots, \ p = 1, 2, \ldots.$$

Якщо ж виконуються умови (5), (18)–(20), (22), то для залишків $\tilde{Q}_k^{(2p-1)}, \quad k, p = 1, 2, \ldots,$ маємо

$$\tilde{Q}_{2p+1}^{(1)} = 1 + \Phi_{2p+1}^{(1)} > 0,$$

$$\tilde{Q}_{2p}^{(3)} = 1 + \Phi_{2p}^{(3)} - \frac{|a_{2p+1,2p+1}|}{1+\Phi_{2p+1}^{(1)}} > 0,$$

$$-\tilde{Q}_{2p-1}^{(5)} = \frac{|a_{2p,2p}|}{\tilde{Q}_{2p}^{(3)}} - \left(1+\Phi_{2p-1}^{(5)}\right) \geq$$

$$\geq \frac{|a_{2p,2p}|}{1+\Phi_{2p}^{(3)} + \dfrac{|a_{2p+1,2p+1}|}{g'_{2p+1,2p+1}}} -$$

$$- \left(1+\Phi_{2p-1}^{(5)}\right) \geq g'_{2p-1,2p-1},$$

$$\tilde{Q}_{2p-2}^{(7)} = 1+\Phi_{2p-2}^{(7)} - \frac{|a_{2p-1,2p-1}|}{\tilde{Q}_{2p-1}^{(5)}} = 1+\Phi_{2p-2}^{(7)} +$$

$$+ \frac{|a_{2p-1,2p-1}|}{-\tilde{Q}_{2p-1}^{(5)}} \leq 1+\Phi_{2p-2}^{(7)} + \frac{|a_{2p-1,2p-1}|}{g'_{2p-1,2p-1}}.$$

Отже, аналогічно як у попередньому випадку, маємо виконання нерівностей

$$\tilde{Q}_{2p}^{(3)} = 1 + \Phi_{2p}^{(3)} - \frac{|a_{2p+1,2p+1}|}{1+\Phi_{2p+1}^{(1)}} > 0,$$

$$1+\Phi_{2p}^{(4k-1)} \leq \tilde{Q}_{2p}^{(4k-1)} \leq 1+\Phi_{2p}^{(4k-1)} + \frac{|a_{2p+1,2p+1}|}{g'_{2p+1,2p+1}}, \quad (26)$$

$$-\tilde{Q}_{2p-1}^{(4k+1)} \leq -g'_{2p-1,2p-1},$$

$$k = 1, 2, \ldots, \ p = 1, 2, \ldots.$$

Оцінимо різниці $\tilde{f}_{4p+5}-\tilde{f}_{4p+1}$, $p=0,1,\ldots.$ З нерівностей (25) випливає

$$\prod_{j=1}^{i}\tilde{Q}_j^{(4p+5-2j)}\tilde{Q}_j^{(4p+1-2j)}>0, i=1,\ldots,2p. \qquad (27)$$

Враховуючи умови (5), одержимо, що

$$\prod_{j=1}^{2p+1}\tilde{Q}_j^{(4p+5-2j)}=(-1)^{p+1}\prod_{j=1}^{2p+1}|\tilde{Q}_j^{(4p+5-2j)}|,$$
$$\prod_{j=1}^{2p}\tilde{Q}_j^{(4p+1-2j)}=(-1)^{p}\prod_{j=1}^{2p}|\tilde{Q}_j^{(4p+1-2j)}|. \qquad (28)$$

Використовуючи формулу (24), умови (5), (19), нерівності (27) та вирази (28), доходимо висновку, що

$$\tilde{f}_{4p+5}-\tilde{f}_{4p+1}\geq 0, p=0,1,\ldots.$$

Отже, послідовність $\{\tilde{f}_{4k+1}\}$, $k=0,1,\ldots,$ є неспадною. З формули (6), умов (18) теореми та оцінки (25), випливає обмеженість зверху послідовності $\{\tilde{f}_{4k+1}\}$, $k=0,1,\ldots.$

Таким чином, послідовність $\{\tilde{f}_{4k+1}\}, k=0,1,\ldots$ є збіжною.

Доведемо збіжність послідовності $\{\tilde{f}_{4k-1}\}$, $k=1,2,\ldots.$ Розглянемо різницю $\tilde{f}_{4p+7}-\tilde{f}_{4p+3}$, $p=0,1,\ldots.$ З нерівностей (26) випливає, що

$$\prod_{j=1}^{i}\tilde{Q}_j^{(4p+7-2j)}\tilde{Q}_j^{(4p+3-2j)}>0, i=1,\ldots,2p.$$

Оскільки

$$\prod_{j=1}^{2p+1}\tilde{Q}_j^{(4p+3-2j)}=(-1)^{p}\prod_{j=1}^{2p+1}|\tilde{Q}_j^{(4p+3-2j)}|,$$

$$\prod_{j=1}^{2p+1}\tilde{Q}_j^{(4p+7-2j)}=(-1)^{p+1}\prod_{j=1}^{2p+1}|\tilde{Q}_j^{(4p+7-2j)}|,$$

тому з урахуванням нерівності (26) та умов (18)–(20), (22), одержимо

$$\tilde{f}_{4p+7}-\tilde{f}_{4p+3}=$$
$$=\sum_{k=0}^{2p}\frac{\left(\Phi_k^{(4p+7-2k)}-\Phi_k^{(4p+3-2k)}\right)\prod\limits_{j=1}^{k}|a_{j,j}|}{\prod\limits_{j=1}^{k}|\tilde{Q}_j^{(4p+7-2j)}\tilde{Q}_j^{(4p+3-2j)}|}+$$
$$+\frac{\prod\limits_{j=1}^{2p+1}|a_{j,j}|}{\prod\limits_{j=1}^{2p+1}|\tilde{Q}_j^{(4p+7-2j)}\tilde{Q}_j^{(4p+3-2j)}|}\cdot$$
$$\cdot\left(\frac{|a_{2p+2,2p+2}|}{\tilde{Q}_{2p+2}^{(3)}}-\Phi_{2p+1}^{(5)}+\Phi_{2p+1}^{(1)}\right).$$

Оцінимо вираз

$$\frac{|a_{2p+2,2p+2}|}{\tilde{Q}_{2p+2}^{(3)}}-\Phi_{2p+1}^{(5)}+\Phi_{2p+1}^{(1)}=$$
$$=\frac{|a_{2p+2,2p+2}|}{\tilde{Q}_{2p+2}^{(3)}}-1-\Phi_{2p+1}^{(5)}+1+\Phi_{2p+1}^{(1)}>$$
$$>\frac{|a_{2p+2,2p+2}|}{1+\Phi_{2p+2}^{(3)}}-1-\Phi_{2p+1}^{(5)}\geq g'_{2p+1,2p+1}>0,$$
$$p=0,1,\ldots.$$

Отже,

$$\tilde{f}_{4p+7}-\tilde{f}_{4p+3}\geq 0,\ \ p=0,1,\ldots.$$

Нерівність (23) справджується, послідовність $\{\tilde{f}_{4k+3}\}, k=0,1,\ldots,$ збігається. ■

Зауваження. Якщо умови (19) замінити умовами

$$\Phi_i^{(2s+3)}\geq\Phi_i^{(2s+1)}, i=0,1,\ldots,s=0,1,\ldots, \qquad (29)$$

тоді за допомогою аналогічних міркувань можна показати, що

$$\tilde{f}_{4p+7}-\tilde{f}_{4p+1}\geq 0,\ \ \tilde{f}_{4p+9}-\tilde{f}_{4p+7}\geq 0,\ \ p=0,1,\ldots,$$

звідки з урахуванням збіжності послідовності $\{\tilde{f}_{4k+1}\}, k=0,1,\ldots$ випливає збіжність послідовності $\{\tilde{f}_{2k+1}\}, k=0,1,\ldots.$

Теорема 3. *Нехай елементи ДНД (1), (2) задовольняють умови (5), (12), (14), (15),(18), (20), (22) і*

$$\Phi_i^{(q+s)}\geq\Phi_i^{(s)}, q=2,3,\ldots,i,s=0,1,\ldots \qquad (30)$$

Тоді ДНД (1), (2) збігається.

□ *Доведення.* За теоремами 1, 2 послідовності наближень парного і непарного порядків ДНД (1), (2) збігаються. Залишається розглянути різниці $\tilde{f}_{4p+5}-\tilde{f}_{4p}$, $\tilde{f}_{4p+8}-\tilde{f}_{4p+5}$, $p=0,1,\ldots.$ Враховуючи нерівності (16),(17), (25), (26), умови теореми (30) маємо

$$\tilde{f}_{4p+5}-\tilde{f}_{4p}=$$
$$=\sum_{k=0}^{2p}\frac{\left(\Phi_k^{(4p+5-2k)}-\Phi_k^{(4p-2k)}\right)\prod\limits_{j=1}^{k}(-a_{j,j})}{\prod\limits_{j=1}^{k}\tilde{Q}_j^{(4p+5-2j)}\tilde{Q}_j^{(4p-2j)}}-$$
$$-\frac{\prod\limits_{j=1}^{2p+1}(-a_{j,j})}{\prod\limits_{j=1}^{2p+1}\tilde{Q}_j^{(4p+5-2j)}\prod\limits_{j=1}^{2p}\tilde{Q}_j^{(4p-2j)}}=$$
$$=\sum_{k=0}^{2p}\frac{\left(\Phi_k^{(4p+5-2k)}-\Phi_k^{(4p-2k)}\right)\prod\limits_{j=1}^{k}|a_{j,j}|}{\prod\limits_{j=1}^{k}|\tilde{Q}_j^{(4p+5-2j)}\tilde{Q}_j^{(4p-2j)}|}+$$

$$+\frac{\prod\limits_{j=1}^{2p+1}|a_{j,j}|}{\prod\limits_{j=1}^{2p+1}|\tilde{Q}_j^{(4p+5-2j)}|\prod\limits_{j=1}^{2p}|\tilde{Q}_j^{(4p-2j)}|}\geq 0,$$

$$\tilde{f}_{4p+8}-\tilde{f}_{4p+5}=$$

$$=\sum_{k=0}^{2p+2}\frac{\left(\Phi_k^{(4p+8-2k)}-\Phi_k^{(4p+5-2k)}\right)\prod\limits_{j=1}^{k}(-a_{j,j})}{\prod\limits_{j=1}^{k}\tilde{Q}_j^{(4p+8-2j)}\tilde{Q}_j^{(4p+5-2j)}}-$$

$$-\frac{\prod\limits_{j=1}^{2p+3}(-a_{j,j})}{\prod\limits_{j=1}^{2p+3}\tilde{Q}_j^{(4p+8-2j)}\prod\limits_{j=1}^{2p+2}\tilde{Q}_j^{(4p+5-2j)}}=$$

$$=\sum_{k=0}^{2p}\frac{\left(\Phi_k^{(4p+8-2k)}-\Phi_k^{(4p+5-2k)}\right)\prod\limits_{j=1}^{k}|a_{j,j}|}{\prod\limits_{j=1}^{k}|\tilde{Q}_j^{(4p+8-2j)}\tilde{Q}_j^{(4p+5-2j)}|}+$$

$$+\frac{\prod\limits_{j=1}^{2p+3}|a_{j,j}|}{\prod\limits_{j=1}^{2p+3}|\tilde{Q}_j^{(4p+8-2j)}|\prod\limits_{j=1}^{2p+2}|\tilde{Q}_j^{(4p+5-2j)}|}\geq 0.$$

З урахуванням збіжності послідовності $\{\tilde{f}_{4k}\}$ доходимо висновку про збіжність ДНД (1), (2). ■

III. Умови для елементів $a_{i,j}, i\neq j$.

У теоремах 1, 2 попереднього розділу сформульовані умови щодо значень величин $\Phi_k^{(p)}, k=0,1,\ldots$, $p=1,2,\ldots$, та частинних чисельників $a_{i,i}$, $i=1,2,\ldots$. Виникає питання, якими повинні бути значення частинних чисельників $a_{i,j}$, $i\neq j$, $i,j=0,1,\ldots$, щоб виконувались умови цих теорем? Розглянемо деякі випадки.

1. Нехай

$$a_{i,j}\geq 0, i\neq j, i,j=0,1,\ldots. \tag{31}$$

У цьому випадку $\Phi_i, i=0,1,\ldots$ – суми звичайних неперервних дробів з невід'ємними елементами. Тому

$$0=\Phi_k^{(0)}\leq\Phi_k^{(2)}\leq\ldots\leq\Phi_k^{(2p)}\leq a_{k+1,k}+a_{k,k+1},$$

$$k=0,1,\ldots,p=1,2,\ldots.$$

Із нерівності

$$a_{2k,2k}+\left(1+a_{2k+1,2k}+a_{2k,2k+1}-\frac{a_{2k+1,2k+1}}{g_{2k+1,2k+1}}\right)\cdot$$

$$\cdot(1+a_{2k,2k-1}+a_{2k-1,2k}+g_{2k-1,2k-1})\leq 0, \tag{32}$$

випливає умова (14). Отже, правильною є

Теорема 1. *Сукупність умов (5), (31), (15), (32) достатня для збіжності послідовності фігурних наближень парного порядку ДНД (1), (2).*

2. Нехай

$$a_{i,j}\leq 0, i\neq j, i,j=0,1,\ldots. \tag{33}$$

Для оцінки значень $\Phi_k^{(p)}, k=0,1,\ldots,p=1,2,\ldots$, використаємо теореми, доведені у [1].

Теорема 2. *Нехай елементи ДНД (1), (2) задовольняють умови (5),(15), (33), а також*

$$\left(1-\frac{a_{i+2k+1,i}}{g_{i+2k+1,i}}\right)(1+a_{i+2k-1,i})+a_{i+2k,i}\leq 0, \tag{34}$$

$$\left(1-\frac{a_{i,i+2k+1}}{g_{i,i+2k+1}}\right)(1+a_{i,i+2k-1})+a_{i,i+2k}\leq 0,$$

$$i=0,1,\ldots,k=1,2,\ldots,$$

$$a_{2k,2k}+\left(1-\frac{a_{2k+1,2k}}{g_{2k+1,2k}}-\frac{a_{2k,2k+1}}{g_{2k,2k+1}}-\frac{a_{2k+1,2k+1}}{g_{2k+1,2k+1}}\right)\cdot$$

$$\left(1-\frac{a_{2k,2k-1}}{g_{2k,2k-1}}-\frac{a_{2k-1,2k}}{g_{2k-1,2k}}+g_{2k-1,2k-1}\right)\leq 0, \tag{35}$$

де $g_{i,j}, i,j=0,1,\ldots,i+j\geq 1$, – деякі додатні числа. Тоді послідовність фігурних наближень парного порядку ДНД (1), (2) збігається. Якщо виконуються ще й умови

$$1+a_{i+2k-1,i}>0, 1+a_{i,i+2k-1}>0, \tag{36}$$

$i=0,1,\ldots,k=2,3,\ldots,$

$$1+a_{2i+1,2i}+a_{2i,2i+1}>0, \tag{37}$$

$$1+a_{2i+2,2i+1}+a_{2i+1,2i+2}+a_{2i+1,2i+1}>0,$$

$$i=0,1,\ldots,$$

то ДНД (1), (2) збігається.

□ *Доведення.* Позначимо

$$\phi_{k,1}^{(p)}=\underset{j=1}{\overset{(p)}{\mathrm{D}}}\frac{a_{k+j,k}}{1},\quad \phi_{k,2}^{(p)}=\underset{j=1}{\overset{(p)}{\mathrm{D}}}\frac{a_{k,k+j}}{1}, \tag{38}$$

$$k=0,1,\ldots,p=1,2,\ldots.$$

За умов (33),(34) справджуються нерівності [1]

$$0=\phi_{k,1}^{(0)}\leq\phi_{k,1}^{(2)}\leq\ldots\leq\phi_{k,1}^{(2n)}\leq\ldots\leq-\frac{a_{k+1,k}}{g_{k+1,k}},$$

$$0=\phi_{k,2}^{(0)}\leq\phi_{k,2}^{(2)}\leq\ldots\leq\phi_{k,2}^{(2n)}\leq\ldots\leq-\frac{a_{k,k+1}}{g_{k,k+1}},$$

тому

$$0=\Phi_k^{(0)}\leq\Phi_k^{(2)}\leq\ldots\leq\Phi_k^{(2n)}\leq\ldots\leq-\frac{a_{k+1,k}}{g_{k+1,k}}-\frac{a_{k+1,k}}{g_{k+1,k}}.$$

Із умови (35) випливає умова (14).

За умов (36) маємо

$$\phi_{k,1}^{(2p-2)}\leq\phi_{k,1}^{(2p+1)}\leq\phi_{k,1}^{(2p)},\phi_{k,2}^{(2p-2)}\leq\phi_{k,2}^{(2p+1)}\leq\phi_{k,2}^{(2p)},$$

$k=0,1,\ldots,p=1,2,\ldots,$

$$\phi_{k,1}^{(1)}=a_{k+1,k}<0,\ \ \phi_{k,2}^{(1)}=a_{k,k+1}<0,$$

звідки випливає

$$\Phi_k^{(2p-1)}\le\Phi_k^{(2p-2)}\le\Phi_k^{(2p+1)}\le\Phi_k^{(2p)}\le-\frac{a_{k+1,k}}{g_{k+1,k}}-\frac{a_{k+1,k}}{g_{k+1,k}},$$

$k=0,1,\ldots,p=1,2,\ldots.$ Отже, виконується умова (30).

Крім того, враховуючи умови (36), маємо

$$1+\Phi_k^{(1)}=1+a_{k+1,k}+a_{k,k+1}>0, k=0,1,\ldots,$$

$$1+\Phi_{2k}^{(3)}+\frac{a_{2k+1,2k+1}}{1+\Phi_{2k+1}^{(1)}}\ge 1+\frac{a_{2k+1,2k+1}}{1+\Phi_{2k+1}^{(1)}}=$$

$$=1+\frac{a_{2k+1,2k+1}}{1+a_{2k+2,2k+1}+a_{2k+1,2k+2}}>0, k=1,2,\ldots,$$

тобто виконуються умови (18), (25). Із урахуванням умови (35) справджується умова (20). Отже, виконуються всі умови теореми 3 з розділу П. Тому ДНД (1), (2) збігається. ■

Теорема 3. *Нехай елементи ДНД (1), (2) задовольняють умови (5), (33), а також*

$$1+a_{k+1,k}+a_{k,k+1}>0, k=1,2,\ldots, \tag{39}$$

$$\left(1-\frac{a_{i+2k,i}}{g_{i+2k,i}}\right)(1+g_{i+2k-2,i})+a_{i+2k-1,i}\le 0,$$

$$\left(1-\frac{a_{i,i+2k}}{g_{i,i+2k}}\right)(1+g_{i,i+2k-2})+a_{i,i+2k-1}\le 0, \tag{40}$$

$i=0,1,\ldots,k=1,2,\ldots,$

$$\left(1-\frac{a_{2k+1,2k+1}}{g_{2k+1,2k+1}}\right)(1+g_{2k-1,2k-1})+a_{2k,2k}\le 0, \tag{41}$$

$$k=1,2,\ldots,$$

де $g_{i,j}, i,j=0,1,\ldots,i+j\ge 1,$ – деякі додатні числа. Тоді послідовність $\{\tilde f_{4k+1}\}$ наближень ДНД (1), (2) збігається.

Якщо, крім того,

$$1+\frac{a_{2k+1,2k}g_{2k+2,2k}}{g_{2k+2,2k}-a_{2k+2,2k}}+\frac{a_{2k,2k+1}g_{2k,2k+2}}{g_{2k,2k+2}-a_{2k,2k+2}}+$$

$$+\frac{a_{2k+1,2k+1}}{1+a_{2k+2,2k+1}+a_{2k+1,2k+2}}>0, \tag{42}$$

$$k=1,2\ldots,$$

то послідовність $\{\tilde f_{2k+1}\}$ фігурних наближень непарного порядку ДНД (1),(2) збігається.

□ *Доведення.* За умов (40) справджуються такі нерівності [1]

$$a_{k+1,k}\le\phi_{k,1}^{(1)}\le\phi_{k,1}^{(3)}\le\ldots\le\phi_{k,1}^{(2n-1)}\le\ldots\le\frac{a_{k+1,k}}{1-\dfrac{a_{k+2,k}}{g_{k+2,k}}},$$

$$a_{k,k+1}\le\phi_{k,2}^{(1)}\le\phi_{k,2}^{(3)}\le\ldots\le\phi_{k,2}^{(2n-1)}\le\ldots\le\frac{a_{k,k+1}}{1-\dfrac{a_{k,k+2}}{g_{k,k+2}}},$$

$$k=0,1,\ldots,$$

де $\phi_{k,1}^{(p)},\phi_{k,2}^{(p)}$ визначаються за формулами (38). Тому

$$a_{k+1,k}+a_{k,k+1}\le\Phi_k^{(1)}\le\Phi_k^{(3)}\le\ldots\le\Phi_k^{(2n-1)}\le\ldots\le$$

$$\le\frac{a_{k+1,k}}{1-\dfrac{a_{k+2,k}}{g_{k+2,k}}}+\frac{a_{k,k+1}}{1-\dfrac{a_{k,k+2}}{g_{k,k+2}}},$$

звідки з урахуванням умов (39), (41) доходимо висновку, що виконуються умови (18), (20), (29).

Крім того, враховуючи умови (42), маємо

$$1+\Phi_{2k}^{(3)}+\frac{a_{2k+1,2k+1}}{1+\Phi_{2k+1}^{(1)}}=1+\frac{a_{2k+1,2k}}{1-\dfrac{a_{2k+2,2k}}{g_{2k+2,2k}}}+$$

$$+\frac{a_{2k,2k+1}}{1-\dfrac{a_{2k,2k+2}}{g_{2k,2k+2}}}+\frac{a_{2k+1,2k+1}}{1+a_{2k+2,2k+1}+a_{2k+1,2k+2}}>0,$$

$$k=1,2,\ldots,$$

тобто виконується умова (25). Збіжність послідовності фігурних наближень непарного порядку ДНД (1), (2) випливає з теореми 2 розділу П і зауваження до неї. ■

Висновки

Робота присвячена вивченню властивостей послідовностей фігурних наближень парного і непарного порядків двовимірних неперервних дробів з дійсними елементами. Розглянуто випадки, коли елементи ДНД (1) $a_{i,i}, i=1,2,\ldots$ задовольняють умови (5), а елементи $a_{i+j,i},\ \ a_{j,i+j},\ \ i=0,1,\ldots,\ \ j=1,2,\ldots$ можуть бути або недодатними, або невід'ємними. Встановлено також нову ознаку збіжності таких двовимірних неперервних дробів. Запропонована в роботі методика дослідження властивостей фігурних наближень двовимірних неперервних дробів може бути використана і для досліджень інших послідовностей як фігурних, так і звичайних наближень ДНД з дійсними та комплексними елементами.

Література

[1] Антонова Т.М. Деякі властивості гіллястих ланцюгових дробів з недодатними частинними чисельниками // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2002. – Т.45, № 1. – С.11-15.

[2] Антонова Т.М., Сусь О.М. Про властивості деяких послідовностей наближень парного порядку двовимірних неперервних дробів // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. Математика і інформатика. – 2006. – Вип. 12–13. – С. 4–9.

[3] Антонова Т.М., Сусь О.М. Про властивості послідовностей фігурних наближень двовимірних неперервних дробів спеціального вигляду з дійсними елементами // Наук. вісник НТШ. – 2007. – Т. 4. – С.5–16.

[4] Антонова Т.М., Сусь О.М. Деякі достатні умови збіжності двовимірних неперервних дробів з дійсними елементами // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. Математика і інформатика. – 2008. – Вип.16. – С.5–15.

[5] Боднар Д.И. Ветвящиеся цепные дроби. – К.: Наукова думка, 1986. – 176 с.

[6] Боднар Д.І., Кучмінська Х.Й. Параболічна область збіжності для двовимірних неперервних дробів // Матем. студії. – 1995. – № 4. – С.29–36.

[7] Боднар Д.І., Кучмінська Х.Й. Аналог теореми Ван Флека для двовимірних неперервних дробів // Мат. методи та фіз.-мех. поля.– 1999. – Т.42, № 4. – С.55–61.

[8] Кучмінська Х.Й. Про збіжність двовимірних неперервних дробів // Теорія наближення функцій та її застосування. Пр. Ін-ту математики НАН України. – 2000. – Т. 31. – С. 282–296.

[9] Kuchmins'ka Kh. On the "fork"property for two-dimensional continued fractions // Communications in the analytic theory of continued fractions. – 1997. – **7**. – P. 32–35.

CERTAIN SUFFICIENT CONDITIONS OF THE CONVERGENCE FOR SEQUENCES OF FIGURED APPROXIMANTS OF EVEN AND ODD ORDERS FOR TWO-DIMENSIONAL CONTINUED FRACTIONS WITH REAL ELEMENTS

T.N. Antonova[a], O.N. Sus'[b]

[a] *National University "Lvivska Politechnika"*
12 S. Bandera Str., 79013, Lviv, Ukraine
[b] *Pidstryhach Institute of Aplied Problems of Mechanics and Mathematics*
3-b Naukova Str., 79060 , Lviv, Ukraine

The sufficient conditions of the convergence for sequences of figured approximants of even and odd orders for two-dimensional continued fractions with real elements are considered. The theorem of convergence for two-dimensional continued fractions with real elements is proved.

Keywords: continued fraction, two-dimensional continued fraction, figured approximant, sequences of approximants, convergence.

2000 MSC: 11A95, 11J70, 30B70,65G30

УДК: 517.526