ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
"Фізико-математичні науки"
Вип.660 № 660, (2009) с. 46–48

JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY
"LVIVSKA POLITECHNIKA"
"Physical & mathematical sciences"
Vol.660 No 660, (2009) 46–48

АНАЛОГИ ОЦІНОК ВІМАНА-ВАЛІРОНА ДЛЯ ЦІЛИХ ГАРМОНІЙНИХ В $\mathbb{R}^n$ ФУНКЦІЙ

О.В. Веселовська

Національний університет "Львівська політехніка"
вул. С. Бандери 12, 79013, Львів, Україна

(Отримано 28 листопада 2009 р.)

Отримано аналоги оцінок Вімана-Валірона для цілих гармонійних в $\mathbb{R}^n (n \geq 3)$ функцій.

Ключові слова: ціла гармонійна функція, максимум модуля, максимальний член, центральний індекс.

2000 MSC: 2000: 31B05

УДК: 517.572

Позначимо через $S^n = \{y \in \mathbb{R}^n : |y| = 1\}$ одиничну сферу в просторі $\mathbb{R}^n$ з центром у початку координат, а через ω_n – площу її поверхні.

Нехай u – гармонійна у всьому просторі $\mathbb{R}^n$ функція, яка називається цілою гармонійною. Тоді вона розкладається в ряд [1, с. 94]

$$u(rx) = \sum_{k=0}^{\infty} Y^{(k)}(x; u)\ r^k, \tag{1}$$

де $r > 0, x \in S^n$, а $Y^{(k)}$ – сферичні гармоніки або сферичні функції Лапласа степеня k, які є звуженням на одиничну сферу S^n однорідного гармонійного многочлена степеня k [2, с. 157–174], [3].

При $n = 2$ сферичні гармоніки зводяться до звичайних тригонометричних функцій кута. При $n \geq 3$ мають складнішу структуру і зв'язані з деякими многочленами спеціального вигляду.

Нехай $\lambda = \dfrac{n-2}{2}, n \geq 3$. Тоді [3, с. 206]

$$Y^{(k)}(x; u) = \frac{\Gamma(\lambda)(k+\lambda)}{2\pi^{\lambda+1} r^k} \int_{S^n} C_k^{\lambda}[(x, y)]\ u(ry)\, dS(y), \tag{2}$$

де $k \in Z_+,\ x \in S^n,\ (\cdot,\cdot)$ – скалярний добуток в $\mathbb{R}^n$, а C_k^{λ} – многочлени Гегенбауера степеня k та порядку λ, які визначаються із співвідношення

$$\frac{1-\tau^2}{(1-2\tau t+\tau^2)^{\lambda+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+\lambda}{\lambda} C_k^{\lambda}(t)\ \tau^k,$$

$|t| \leq 1,\ 0 \leq \tau < 1.$

У випадку тривимірного простору сферичні гармоніки, крім того, можуть бути виражені через многочлени Лежандра $P_k = P_k^0$ та приєднані многочлени Лежандра P_k^j (див., наприклад, [4. с. 151–155], [5, с. 179–184])

$$Y^{(k)}(x; u) = Y^{(k)}(\theta, \varphi; u) = \sum_{j=0}^{k} \left(a_{kj}^{(1)} \cos j\varphi + a_{kj}^{(2)} \sin j\varphi\right) P_k^j(\cos\theta), \tag{3}$$

де $k \in \mathbb{Z}_+, \quad \theta, \varphi$ – сферичні координати точки $x \in S^3,\ a_{kj}^{(i)},\ i = 1, 2,$ – постійні числа.

Нехай $f(z) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} c_j z^j$ – ціла у площині функція. Оскільки при фіксованому r члени $|c_j| r^j$ при $j \to \infty$ прямують до нуля, то серед цих членів існує принаймні один найбільший. Якщо таких членів декілька, то будемо розглядати той із них, який має найбільший індекс $j = \nu(r) = \nu(r, f)$. Індекс $\nu(r, f)$ називається центральним індексом, а $\mu(r, f) = |c_{\nu(r)}| r^{\nu(r)}$ – максимальним членом ряду функції f на колі $S_r^2 = \{z \in C : |z| = r\}$.

Позначимо через $M(r, f) = \max\limits_{|z|=r} |f(z)|,\ r > 0,$ – максимум модуля функції f.

У разі цілої функції f однієї комплексної змінної Віман та Валірон встановили нерівність [6, с. 22]

$$M(r, f) < \mu(r, f) \cdot [\ln \mu(r, f)]^{\frac{1}{2}+\varepsilon}, \tag{4}$$

справедливу для будь-якого $\varepsilon > 0$ і при всіх r ззовні деякої множини скінченної логарифмічної міри.

У цій роботі розглядається аналогічне питання для гармонійної у просторі $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, функції. У зв'язку з тим, що в тривимірному просторі для цілої гармонійної функції поряд із розкладом (1) має місце розклад у ряд за многочленами Лежандра, то окремо розглядатимемо два випадки: загальний $n \geq 3$, обумовлений розкладом (1), і частинний $n = 3$, який відповідає специфічному розкладу функції u у ряд (1) з огляду на (3) і не випливає із загального випадку.

Нехай $M(r, u) = \max\limits_{x \in S^n} |u(rx)|,\ \ r > 0,$ – максимум модуля цілої гармонійної функції u.

I. Випадок $n \geq 3$

Позначимо

$$A_k = \max_{x \in S^n} \left| Y^{(k)}(x, u) \right|,$$

де $Y^{(k)}$ задані співвідношенням (2).

Теорема 1.1. *Нехай u – ціла гармонійна в $\mathbb{R}^n$ функція, яка задана рядом* (1). *Тоді функція*

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \; z^k$$

– ціла, і для будь-якого $\varepsilon > 0$ при всіх r ззовні деякої множини скінченної логарифмічної міри виконуються нерівності

$$\frac{C \cdot \mu(r, g)}{[\ln \mu(r, g)]^{\lambda + \varepsilon}} < M(r, u) < \mu(r, g) \cdot [\ln \mu(r, g)]^{\frac{1}{2} + \varepsilon}, \tag{5}$$

де C – додатна стала, $\lambda = \dfrac{n-2}{2}$.

Для доведення цієї теореми нам потрібні леми.

Нехай

$$B_k = \sqrt{\frac{(2\lambda)!}{2}} \frac{1}{(k + 2\lambda)^{\lambda}} A_k, \tag{6}$$

де $\lambda = \dfrac{n-2}{2}$.

Лема 1.1. Для цілої гармонійної в $\mathbb{R}^n$ функції u, яка задана рядом (1), справедливі нерівності

$$B_k \leq M(r, u) \cdot r^{-k}$$

при всіх $r > 0$ і $k \in \mathbb{Z}_+$.

Ця лема доведена в [7].

Лема 1.2. Нехай

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \; z^k, \quad f_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} l_k b_k z^k,$$

$$f_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{l_k} \cdot z^k$$

– цілі у площині функції, $b_k > 0,\ l_k > 0$. Тоді

$$\mu(r, f) \geq \frac{1}{l_{\nu_1(r)}} \mu(r, f_1), \tag{7}$$

$$\mu(r, f) \geq l_{\nu_2(r)} \mu(r, f_2), \tag{8}$$

$$\mu(r, f_1) \geq l_{\nu(r)} \mu(r, f), \tag{9}$$

$$\mu(r, f_1) \geq l^2_{\nu_2(r)} \mu(r, f_2), \tag{10}$$

$$\mu(r, f_2) \geq \frac{1}{l_{\nu(r)}} \mu(r, f), \tag{11}$$

$$\mu(r, f_2) \geq \frac{1}{l^2_{\nu_1(r)}} \mu(r, f_1), \tag{12}$$

де $\nu(r)$, $\nu_1(r)$, $\nu_2(r)$ – центральні індекси степеневих рядів функцій f, f_1, f_2 відповідно.

□ *Доведення.* Оскільки $\nu(r), \nu_1(r), \nu_2(r)$ – центральні індекси степеневих рядів функцій f, f_1, f_2 відповідно, то

$$b_{\nu(r)} r^{\nu(r)} \geq b_{\nu_1(r)} r^{\nu_1(r)}, \tag{13}$$

$$b_{\nu(r)} r^{\nu(r)} \geq b_{\nu_2(r)} r^{\nu_2(r)}, \tag{14}$$

$$l_{\nu_1(r)} b_{\nu_1(r)} r^{\nu_1(r)} \geq l_{\nu(r)} b_{\nu(r)} r^{\nu(r)}, \tag{15}$$

$$l_{\nu_1(r)} b_{\nu_1(r)} r^{\nu_1(r)} \geq l_{\nu_2(r)} b_{\nu_2(r)} r^{\nu_2(r)}, \tag{16}$$

$$\frac{1}{l_{\nu_2(r)}} b_{\nu_2(r)} r^{\nu_2(r)} \geq \frac{1}{l_{\nu(r)}} b_{\nu(r)} r^{\nu(r)}, \tag{17}$$

$$\frac{1}{l_{\nu_2(r)}} b_{\nu_2(r)} r^{\nu_2(r)} \geq \frac{1}{l_{\nu_1(r)}} b_{\nu_1(r)} r^{\nu_1(r)}. \tag{18}$$

Помноживши нерівність (13) на $l_{\nu_1(r)}$, отримаємо нерівність (7). Поділивши нерівність (14) на $l_{\nu_2(r)}$, одержимо нерівність (8). Нерівності (9), (11) безпосередньо випливають з нерівностей (15), (17). Помноживши та поділивши праву частину нерівності (16) на $l_{\nu_2(r)}$, одержуємо нерівність (10). За аналогією отримуємо нерівність (12) із нерівності (18). ■

□ *Доведення теореми 1.1.* Введемо функцію

$$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \; z^k,$$

де B_k визначаються співвідношенням (6). На підставі леми 1.1 функції g та G – цілі.

Доведемо нерівності (5). Із розкладу (1) випливає, що

$$M(r, u) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \max_{x \in S^n} \left| Y^{(k)}(x; u) \right| \; r^k = \sum_{k=0}^{\infty} A_k r^k.$$

Отже, $M(r, u) \leq M(r, g)$.

Використовуючи відому оцінку (4), знаходимо, що

$$M(r, g) < \mu(r, g) [\ln \mu(r, g)]^{\frac{1}{2} + \varepsilon}$$

для довільного $\varepsilon > 0$ і всіх r, крім виняткової множини скінченної логарифмічної міри. Для тих самих значень r має місце нерівність [6, с. 22]

$$\nu(r, g) < [\ln \mu(r, g)]^{1 + \varepsilon}. \tag{19}$$

Враховуючи нерівності (11) та (19), маємо

$$\mu(r, G) \geq \sqrt{\frac{(2\lambda)!}{2}} \frac{1}{[\nu(r, g) + 2\lambda]^{\lambda}} \mu(r, g) >$$

$$> C \frac{\mu(r, g)}{[\ln \mu(r, g)]^{\lambda + \varepsilon}},$$

де C – додатна стала.

Оскільки за лемою 1.1 $\mu(r, G) \leq M(r, u)$, то нерівності (5) доведені. ■

II. Випадок $n = 3$

Позначимо

$$D_k = \frac{1}{2\sqrt{2k+1}} \max_{j,i} \left(\left| a_{kj}^{(i)} \right| \sqrt{\frac{(k+j)!}{(k-j)!}} \right), \tag{20}$$

де $a_{kj}^{(i)}$ визначені співвідношенням (3).

Лема 2.1. Якщо u – ціла гармонійна в $\mathbb{R}^3$ функція, задана рядом (1) з використанням (3), то

$$D_k \le M(r,u) \cdot r^{-k}$$

при всіх $r > 0$ і $k \in Z_+$.

Доведення леми наведено в [8].

Теорема 2.1. Нехай u – ціла гармонійна в $\mathbb{R}^3$ функція, яка задана рядом (1) з використанням (3). Тоді функція

$$h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} 2(2k+1)^2 D_k \ z^k$$

– ціла, і для будь-якого $\varepsilon > 0$ при всіх r ззовні деякої множини скінченної логарифмічної міри виконуються нерівності

$$\frac{K \cdot \mu(r,h)}{[\ln \mu(r,h)]^{2+\varepsilon}} < M(r,u) < \mu(r,h) \cdot [\ln \mu(r,h)]^{\frac{1}{2}+\varepsilon}, \tag{21}$$

де K – додатна стала.

□ *Доведення теореми 2.1.* Введемо функцію $H(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} D_k \ z^k$.

У роботі [7] доведено нерівність $M(r,u) < M(r,h)$, де $M(r,h) = \max\limits_{|z|=r} |h(z)|$, $r > 0$. На підставі відомої оцінки (4), знаходимо

$$M(r,h) < \mu(r,h) [\ln \mu(r,h)]^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$$

для довільного $\varepsilon > 0$ і всіх r, крім виняткової множини скінченної логарифмічної міри.

Враховуючи нерівності (7) та (19), отримаємо

$$\mu(r,H) \ge \frac{1}{2[2\nu(r,h)+1]^2} \mu(r,h) > K \frac{\mu(r,h)}{[\ln \mu(r,h)]^{2+\varepsilon}}.$$

Оскільки на підставі леми 2.1 $\mu(r,H) \le M(r,u)$, то нерівності (21) доведені.

Нерівності (5) та (21) можна розглядати як аналоги нерівностей Вімана-Валірона, в яких максимум модуля цілої функції однієї комплексної змінної оцінюється через її максимальний член.

Література

[1] Тиман А.Ф., Трофимов В.Н. Введение в теорию гармонических функций. – М.: Наука, 1968. – 208 с.

[2] Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. – М.: Мир, 1974. – 336 с.

[3] Berens H., Butzer P.L., Pawelke S. Limitierungs verfahren von Reihen mehrdimensionaler Kugelfunktionen und deren Saturationsverhalten // Publs. Res. Inst. Math. Sci., 1968, 201 – 268.

[4] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 1. – 2-е изд. – М.: Наука, 1973. – 296 с.

[5] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 2. – 2-е изд. – М.: Наука, 1974. – 296 с.

[6] Виттих Г.В. Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям. – М.: Физматгиз, 1960. – 320 с.

[7] Веселовская О.В. О росте целых гармонических в R^n функций // Изв. вузов. Матем., №10, 1983. – С. 13–17.

[8] Fryant Allan J. Growth of entire harmonic function in R^3 // J. of Math. Analysis and appl., 1978, v.12, №3. – P. 599 – 605.

THE ANALOGS OF VIMAN-VALIRON ESTIMATES FOR ENTIRE HARMONIC FUNCTIONS IN $\mathbb{R}^n$

O.V. Veselovska

National University "Lvivska Politechnika"
12 S. Bandera Str., 79013, Lviv, Ukraine

We get the analogs of Viman-Valiron estimates for entire harmonic functions in $\mathbb{R}^n$, $n \ge 3$.

Keywords: entire harmonic function, maximum of modulus, central index.

2000 MSC: 2000: 31B05

УДК: 517.572