ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
"Фізико-математичні науки"
Вип.660 № 660, (2009) с. 28–33

JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY
"LVIVSKA POLITECHNIKA"
"Physical & mathematical sciences"
Vol.660 No 660, (2009) 28–33

КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ ЛІНІЙНОГО ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ЗІ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

С.М. Репетило

Національний університет "Львівська політехніка"
вул. С. Бандери 12, 79013, Львів, Україна

(Отримано 30 березня 2009 р.)

Досліджено крайову задачу (з даними на всій границі області) для лінійного неоднорідного гіперболічного рівняння другого порядку зі змінними за просторовими координатами коефіцієнтами. Встановлено умови коректності задачі та побудовано розв'язок у вигляді ряду за системою ортогональних функцій. Для оцінок знизу малих знаменників, що виникли при побудові розв'язку задачі, використано метричний підхід.

Ключові слова: крайова задача, гіперболічні рівняння,метод Фур'є, малі знаменники, метричний підхід, міра Лебега.

2000 MSC: 35L20

УДК: 517.956.32

Крайові задачі для гіперболічних рівнянь з даними на всій границі області є, взагалі, умовно коректними, а їх розв'язність пов'язана з проблемою малих знаменників (див. [1, 2, 8, 16, 19, 21, 22] і бібліографію там). У працях [3, 4, 5, 6, 7, 12, 16, 17, 18] досліджено коректність крайових задач типу Діріхле для гіперболічних та безтипних рівнянь і систем рівнянь високого порядку (лінійних і слабко нелінійних) зі сталими та змінними коефіцієнтами. Питання стійкості та побудови наближених розв'язків задач такого типу з наближеними вихідними даними для гіперболічних рівнянь вивчались у [13, 20, 23].

У цій праці, яка розвиває результати [6], досліджено коректність у $(p+1)$-вимірній циліндричній області, $p \geq 2$, крайової задачі для гіперболічного рівняння другого порядку зі змінними за просторовими координатами коефіцієнтами, коли на нижній та верхній основах циліндра задано локальні крайові умови третього роду, а на бічній поверхні циліндра – умови першого роду.

I.

Надалі використовуємо такі позначення: Z_+^p — множина точок R^p з цілими невід'ємними координатами; $s=(s_1,\dots s_p)\in \mathrm{Z}_+^p$; $|s|=|s_1|+\dots+|s_p|$; $\hat{s}=(s_0,s_1,\dots s_p)\in \mathrm{Z}_+^{p+1}$; $|\hat{s}|=|s_0|+|s_1|+\dots+|s_p|$; $x=(x_1,\dots,x_p)\in \mathrm{R}^p$; c_j, $j=0,1,\dots,8$, — додатні сталі, які не залежать від λ_k; $\Omega\subset \mathrm{R}^p$ — обмежена однозв'язна область з гладкою межею $\partial\Omega=\Gamma$; $D=\{(t,x):0<t<\mathrm{T},\ x\in\Omega\}$; $\Sigma=\Gamma\times[0,\mathrm{T}]$; $C^{j,\nu}$, $0<\nu<1$, — клас визначених в $\overline{\Omega}$ функцій, j–ті похідні яких задовольняють в $\overline{\Omega}$ умову Гельдера з показником ν; $A^{j,\nu}$ — клас замкнених областей, для яких функції, що задають у локальних координатах рівняння межових поверхонь цих областей, належать класу $C^{j,\nu}$; $C^r(\overline{\Omega})$ — банахів простір функцій $\upsilon(x):=\upsilon(x_1,...,x_p)$, неперервних із усіма похідними до порядку r включно в $\overline{\Omega}$, $\|\upsilon\|_{C^r(\overline{\Omega})}:=\sum\limits_{|s|\leq r}\max\limits_{x\in\overline{\Omega}}\left|\partial^{|s|}\upsilon(x)/(\partial x_1^{s_1}\cdots\partial x_p^{s_p})\right|$; $C^{(q,r)}(\overline{D})$ — банахів простір функцій $\upsilon(t,x):=\upsilon(t,x_1,...,x_p)$, які в області $\overline{D}$ q раз неперервно диференційовні за t та r раз неперервно диференційовні за x, $\|\upsilon\|_{C^{(q,r)}(\overline{D})}:=\sum\limits_{\substack{|s|\leq r,\\ s_0\leq q}}\max\limits_{(t,x)\in\overline{D}}\left|\partial^{|\hat{s}|}\upsilon(t,x)/(\partial t^{s_0}\partial x_1^{s_1}\cdots\partial x_p^{s_p})\right|$; $L_2(\Omega)$ — простір функцій $\upsilon(x):=\upsilon(x_1,...,x_p)$, модулі квадратів яких інтегровні в області Ω, $\|\upsilon\|_{L_2(\Omega)}:=\left(\int\limits_{\Omega}|\upsilon(x)|^2\,dx\right)^{1/2}$.

II.

В області D розглядаємо задачу[1]

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2}-Lu(t,x)=f(t,x),(t,x)\in D, \qquad (1)$$

$$\begin{cases} a_1 u(0,x)+a_2\dfrac{\partial u(0,x)}{\partial t}=\varphi_1(x), \\ b_1 u(T,x)+b_2\dfrac{\partial u(T,x)}{\partial t}=\varphi_2(x), \end{cases} \quad x\in\bar{\Omega}, \qquad (2)$$

$$u\,|_{\Sigma}=0,\ (t,x)\in\Sigma, \qquad (3)$$

де $a_j,b_j\in\mathbb{R}$, $a_1^2+a_2^2\neq 0$, $b_1^2+b_2^2\neq 0$, $L:=\sum\limits_{i,j=1}^{p}\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(p_{ij}(x)\dfrac{\partial}{\partial x_j}\right)-q(x)$ — еліптичний в області Ω диференціальний вираз з дійснозначними достатньо гладкими в $\overline{\Omega}$ коефіцієнтами $p_{ij}(x)$ та

[1]Робота підтримана Державним фондом фундаментальних досліджень України (проект № 25.1/080)

$q(x) \geq 0$, $q(x) \neq 0$. Якщо $a_2{=}b_2{=}0$, то задача (1)–(3) є частинним випадком задачі, розглянутої в [6].

Нехай $\Lambda = \{\lambda_k, k \in \mathbb{N}\}$ та $Y = \{X_k(x), k \in \mathbb{N}\}$ – множини власних чисел та власних (нормованих) функцій задачі

$$LX(x) = -\lambda X(x), \tag{4}$$

$$X(x)|_{\Gamma} = 0, \tag{5}$$

Відомо [10, 14], що якщо $\overline{\Omega} \in A^{2,\nu}$, $p_{ij}(x) \in C^{1,\nu}$; $i,j = 1,...,p$, $q(x) \in C^{0,\nu}$, то Y є повною ортонормованою системою функцій у просторі $L_2(\Omega)$, а власні значення λ_k, $k \in \mathbb{N}$, є різними і додатними; до того ж $X_k(x) \in C^2(\bar{\Omega})$, $k \in \mathbb{N}$, і справедливі оцінки

$$c_0 k^{2/p} \leq \lambda_k \leq c_1 k^{2/p},\ 0 < c_0 \leq c_1,\ k \in \mathbb{N}, \tag{6}$$

$$\max_{x\in\bar{\Omega}} \left|\partial^{|s|} X_k(x) / \left(\partial x_1^{s_1} \cdots \partial x_p^{s_p}\right)\right| \leq c_2 \lambda_k^{p/4+|s|/2}, \quad |s| = 0,1,2. \tag{7}$$

Розв'язок задачі (1)–(3) шукаємо у вигляді ряду

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) X_k(x). \tag{8}$$

Нехай

$$\varphi_j(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{jk} X_k(x),\ j = 1,2, \tag{9}$$

$$f(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) X_k(x), \tag{10}$$

де

$$\varphi_{jk} = \int_{\Omega} \varphi_j(x) X_k(x)\, dx,\ j = 1,2, \tag{11}$$

$$f_k(t) = \int_{\Omega} f(t,x) X_k(x)\, dx. \tag{12}$$

Кожна з функцій $u_k(t)$, $k \in \mathbb{N}$, є розв'язком такої задачі:

$$u_k''(t) + \lambda_k u_k(t) = f_k(t), \tag{13}$$

$$\begin{cases} a_1 u_k(0) + a_2 \dfrac{\partial u_k(0)}{\partial t} = \varphi_{1k}, \\ b_1 u_k(T) + b_2 \dfrac{\partial u_k(T)}{\partial t} = \varphi_{2k}, \end{cases} \tag{14}$$

До того ж

$$u_k(t) = V_k(t) + W_k(t), \tag{15}$$

де $V_k(t)$ — розв'язок рівняння (13), що задовольняє умови

$$\begin{cases} a_1 u_k(0) + a_2 \dfrac{\partial u_k(0)}{\partial t} = 0, \\ b_1 u_k(T) + b_2 \dfrac{\partial u_k(T)}{\partial t} = 0, \end{cases} \tag{14$'$}$$

а $W_k(t)$ — розв'язок задачі з умовами (14) для рівняння

$$u_k''(t) + \lambda_k u_k(t) = 0. \tag{13$'$}$$

III.

Для кожного $\lambda_k \in \Lambda$ рівняння $(13')$ має таку фундаментальну систему розв'язків: $\left\{\cos\left(\sqrt{\lambda_k} t\right), \sin\left(\sqrt{\lambda_k} t\right)\right\}$.

Характеристичний визначник $\Delta(\lambda_k) := \Delta(T,\lambda_k)$ задачі (13), (14) має вигляд [15]

$$\Delta(\lambda_k) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2\sqrt{\lambda_k} \\ \left(b_1\cos\left(\sqrt{\lambda_k}T\right) - b_2\sqrt{\lambda_k}\sin\left(\sqrt{\lambda_k}T\right)\right) & \left(b_1\sin\left(\sqrt{\lambda_k}T\right) + b_2\sqrt{\lambda_k}\cos\left(\sqrt{\lambda_k}T\right)\right) \end{vmatrix} \tag{16}$$

і обчислюється за формулою

$$\Delta(\lambda_k) = (a_1 b_1 + a_2 b_2 \lambda_k)\sin\left(\sqrt{\lambda_k}T\right) + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\sqrt{\lambda_k}\cos\left(\sqrt{\lambda_k}T\right). \tag{17}$$

Розглянемо однорідне рівняння

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} - Lu(t,x) = 0,\ (t,x) \in D, \tag{1$'$}$$

та однорідні умови

$$\begin{cases} a_1 u(0,x) + a_2 \dfrac{\partial u(0,x)}{\partial t} = 0, \\ b_1 u(T,x) + b_2 \dfrac{\partial u(T,x)}{\partial t} = 0, \end{cases} \quad x \in \bar{\Omega}. \tag{2$'$}$$

Задача (1)–(3) не має двох різних розв'язків тоді і лише тоді, коли задача $(1')$, $(2')$, (3) має лише тривіальний розв'язок.

Теорема 1. *Для єдиності розв'язку задачі (1)–(3) у просторі $C^2(\overline{D})$ необхідно і досить, щоб виконувалась умова*

$$(\forall \lambda_k \in \Lambda) \qquad \Delta(\lambda_k) \neq 0. \tag{18}$$

Доведення виконують за схемою доведення теореми 3.1 в [16, гл.2].

Наслідок 1. Якщо $\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$, то для єдиності розв'язку задачі (1)–(3) у просторі $C^2(\overline{D})$ необхідно і досить, щоб виконувалась умова

$$(\forall \lambda_k \in \Lambda, \forall n \in \mathbb{Z}_+)\ \sqrt{\lambda_k}T - \varphi_k \neq \pi/2 + n\pi, \tag{19}$$

де

$$\varphi_k = \operatorname{arctg}(a_1 b_1 + a_2 b_2 \lambda_k)(a_1 b_2 - b_1 a_2)^{-1} \lambda_k^{-1/2}. \tag{20}$$

□ *Доведення.* За умови визначник (17) можна записати у вигляді

$$\Delta(\lambda_k) = \sqrt{(a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2)\lambda_k + a_1^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2 \lambda_k^2} \times \times \cos\left(\sqrt{\lambda_k} T - \varphi_k\right). \tag{21}$$

Очевидно, що

$$\sqrt{(a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2)\lambda_k + a_1^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2 \lambda_k^2} \neq 0$$

для довільного $\lambda_k \in \Lambda$. Із теореми 1 та формули (21) випливає доведення наслідку. ■

Наслідок 2. Якщо $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$, то для єдиності розв'язку задачі (1)–(3) у просторі $C^2\left(\overline{D}\right)$ необхідно і досить, щоб виконувалась умова

$$(\forall \lambda_k \in \Lambda,\ \forall n \in \mathbb{N}) \qquad \sqrt{\lambda_k} T - n\pi \neq 0. \tag{22}$$

□ *Доведення.* Розглянемо кожен з випадків, коли виконуються умови такого наслідку.

1. Якщо $a_1 = b_1 = 0$, то $\Delta(\lambda_k) = a_2 b_2 \lambda_k \sin\left(\sqrt{\lambda_k} T\right)$, причому $a_2 b_2 \neq 0$.
2. Якщо $a_2 = b_2 = 0$, то $\Delta(\lambda_k) = a_1 b_1 \sin\left(\sqrt{\lambda_k} T\right)$, причому $a_1 b_1 \neq 0$.
3. Якщо $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = q,\ 0 < |q| < \infty,$ то $a_2 b_2 \neq 0$ і

$$\Delta(\lambda_k) = (a_1 b_1 + a_2 b_2 \lambda_k)\sin\left(\sqrt{\lambda_k} T\right) = = a_2 b_2\left(q^2 + \lambda_k\right)\sin\left(\sqrt{\lambda_k} T\right). \tag{23}$$

З вигляду $\Delta(\lambda_k)$ у випадках 1–3 та теореми 1 випливає доведення наслідку. ■

IV.

Розглянемо питання про існування розв'язку задачі (1)–(3). Вважаємо, що виконується умова (18). Тоді для кожного $\lambda_k \in \Lambda$ існує єдиний розв'язок задачі (13′), (14), який зображується формулою

$$W_k(t) = A_k \cos\left(\sqrt{\lambda_k} t\right) + B_k \sin\left(\sqrt{\lambda_k} t\right), \tag{24}$$

де A_k, B_k визначаються з системи лінійних алгебричних рівнянь

$$\begin{cases} a_1 A_k + a_2\sqrt{\lambda_k} B_k = \varphi_{1k}, \\ \left(b_1\cos\left(\sqrt{\lambda_k} T\right) - b_2\sqrt{\lambda_k}\sin\left(\sqrt{\lambda_k} T\right)\right) A_k + \left(b_1 \sin\left(\sqrt{\lambda_k} T\right) + b_2\sqrt{\lambda_k}\cos\left(\sqrt{\lambda_k} T\right)\right) B_k = \varphi_{2k}, \end{cases} \tag{25}$$

визначник якої збігається з визначником (16). Крім того, для кожного $\lambda_k \in \Lambda$ існує єдина функція Гріна $G_k(t,\tau)$ задачі (13′), (14′) [15], за допомогою якої розв'язок задачі (13), (14′) зображається формулою

$$V_k(t) = \int_0^T G_k(t,\tau) f_k(\tau)\, d\tau. \tag{26}$$

У квадраті $K_T = \{0 \le t, \tau \le T\}$ (крім сторін $\tau = 0,\ \tau = T$) кожна з функцій $G_k(t,\tau)$, $k \in \mathbb{N}$, зображається формулою

$$G_k(t,\tau) = \begin{cases} \dfrac{\left[\sqrt{\lambda_k} b_2 \cos\left(\sqrt{\lambda_k}(\tau - T)\right) - b_1 \sin\left(\sqrt{\lambda_k}(\tau - T)\right)\right]\left[\sqrt{\lambda_k} a_2\cos\left(\sqrt{\lambda_k} t\right) - a_1\sin\left(\sqrt{\lambda_k} t\right)\right]}{\sqrt{\lambda_k}\Delta(\lambda_k)}, & 0 \le t < \tau < T, \\ \dfrac{\left[\sqrt{\lambda_k} b_2 \cos\left(\sqrt{\lambda_k}(t - T)\right) - b_1 \sin\left(\sqrt{\lambda_k}(t - T)\right)\right]\left[\sqrt{\lambda_k} a_2\cos\left(\sqrt{\lambda_k} \tau\right) - a_1\sin\left(\sqrt{\lambda_k} \tau\right)\right]}{\sqrt{\lambda_k}\Delta(\lambda_k)}, & 0 < \tau < t \le T. \end{cases} \tag{27}$$

На стороні $\tau = 0$ квадрата K_T кожну з функцій $G_k(t,\tau)$, $k \in \mathbb{N}$, довизначаємо за неперервністю справа, а на стороні $\tau = T$ — за неперервністю зліва.

На підставі формул (8), (15), (24)–(26) отримуємо формальне зображення розв'язку задачі (1)–(3) у вигляді ряду

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\varphi_{1k}\left(b_1\sin\left(\sqrt{\lambda_k}(T-t)\right) + b_2\sqrt{\lambda_k}\cos\left(\sqrt{\lambda_k}(T-t)\right)\right) + \varphi_{2k}\left(a_1\sin\left(\sqrt{\lambda_k} t\right) - a_2\sqrt{\lambda_k}\cos\left(\sqrt{\lambda_k} t\right)\right)}{\Delta(\lambda_k)} + \int_0^T G_k(t,\tau) f_k(\tau)\, d\tau\right) X_k(x). \tag{28}$$

Оскільки величина $|\Delta(\lambda_k)|$, будучи відмінною від нуля, може приймати якзавгодно малі значення для нескінченної кількості значень $\lambda_k \in \Lambda$, то ряд (28), взагалі, є розбіжним. Тому питання про існування розв'язку задачі (1)–(3) пов'язане з проблемою малих знаменників.

Теорема 2. *Нехай справджується умова (18) і нехай існують константи $A > 0$ і $\gamma \in \mathbb{R}_+$ такі, що для всіх (крім скінченного числа) значень $\lambda_k \in \Lambda$ виконується нерівність*

$$|\Delta(\lambda_k)| \geq Ak^{-\gamma}. \tag{29}$$

Якщо $\varphi_j \in C^{2r}(\bar{\Omega})$, $L^q \varphi_j|_\Gamma = 0$, $j = 1,2$, $f \in C^{(0,2r)}(\bar{D})$, $L^q f|_\Gamma = 0$, $t \in [0,T]$, де $q = 0,1,\ldots,r-1$, $r = [(5 + p(1,5+\gamma))/2] + 1$, то існує розв'язок задачі (1)–(3) з простору $C^2(\bar{D})$, який зображується формулою (28) і неперервно залежить від функцій $f(t,x)$ та $\varphi_j(x)$, $j = 1,2$.

$\square$ *Доведення.* На підставі формул (27), (28) та оцінок (7) отримуємо

$$\|u(t,x)\|_{C^2(\bar{D})} \leq c_2 c_3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\varphi_{1k}| + |\varphi_{2k}|}{\Delta(\lambda_k)} \lambda_k^{3/2} \lambda_k^{p/4+1} + $$
$$+ c_2 c_4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k^{3/2}}{\Delta(\lambda_k)} \max_{0 \leq t \leq T} |f_k(t)| \lambda_k^{p/4+1}. \tag{30}$$

Оскільки диференціальний вираз L є лінійним і самоспряженим, то за умов теореми на функції $\varphi_j(x)$, $j = 1,2$, на підставі другої формули Гріна для оператора L [9, 10, 14] отримаємо

$$\varphi_{jk} = \int_\Omega \varphi_j X_k dx = -\frac{1}{\lambda_k} \int_\Omega \varphi_j L X_k dx =$$
$$= -\frac{1}{\lambda_k} \int_\Omega L\varphi_j X_k dx = \frac{1}{\lambda_k^2} \int_\Omega L\varphi_j L X_k dx = \tag{31}$$
$$= \frac{1}{\lambda_k^2} \int_\Omega L^2 \varphi_j X_k dx = \ldots = (-1)^r \frac{1}{\lambda_k^r} \int_\Omega L^r \varphi_j X_k dx.$$

На основі формул (7), (11), (31) та нерівності Коші–Буняковського [11] отримаємо таку оцінку:

$$|\varphi_{jk}| = \frac{1}{\lambda_k^r} \left| \int_\Omega L^r \varphi_j X_k dx \right| \leq c_5 \lambda_k^{-r} \|\varphi_j\|_{C^{2r}(\bar{\Omega})},$$
$$j = 1,2. \tag{32}$$

Аналогічно для функції $f(t,x)$ знайдемо

$$\max_{0 \leq t \leq T} |f_k(t)| \leq c_6 \lambda_k^{-r} \|f\|_{C^{(0,2r)}(\bar{D})}. \tag{33}$$

На підставі оцінок (6), (29), (30), (32) та (33) дістаємо

$$\|u\|_{C^2(\bar{D})} \leq c_7 \Big(||\varphi_1||_{C^{2r}(\bar{\Omega})} + ||\varphi_2||_{C^{2r}(\bar{\Omega})}$$
$$+ ||f||_{C^{(0,2r)}(\bar{D})} \Big) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^g}, \tag{34}$$

де $c_7 = c_2 \max\{c_3 c_5, c_4 c_6\}$, $g = (2r-5)/p - \gamma - 1/2$. За умов теореми $1 < g < 2$. Тому ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^g}$ є збіжним. Позначимо його суму через S. Тоді з (34) отримаємо

$$\|u\|_{C^2(\bar{D})} \leq S c_7 \Big(||\varphi_1||_{C^{2r}(\bar{\Omega})}$$
$$+ ||\varphi_2||_{C^{2r}(\bar{\Omega})} + ||f||_{C^{(0,2r)}(\bar{D})} \Big),$$

звідки випливає доведення теореми. $\blacksquare$

З'ясуємо, наскільки багата множина чисел T, для яких справедлива нерівність (29).

Лема 1. *Нехай $\Phi(k)$ — обмежена послідовність дійсних чисел. Тоді нерівність*

$$\left| \Phi(k) - \frac{la}{\sqrt[p]{k}} \right| < \frac{1}{k^\beta}, \ \beta = 1 + 1/p + \varepsilon, \ 0 < \varepsilon < 1 \tag{35}$$

для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $a > 0$ має не більше, ніж скінченне число розв'язків у цілих числах k і l $(k > 0, l \neq 0)$.

Доведення виконують за схемою доведення леми 2.4 з [16, гл. 1].

У разі доведення наступних двох теорем використовується елементарна нерівність

$$\sin x \geq 2x/\pi, \qquad 0 \leq x \leq \pi/2. \tag{36}$$

Теорема 3. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел T нерівність (29) виконується для всіх (крім скінченної кількості) $\lambda_k \in \Lambda$ і таких значень γ:*

а) $\gamma > 1$, якщо $a_2 = b_2 = 0$;

б) $\gamma > 1 - 2/p$, якщо $a_1 = b_1 = 0$ або $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = q$, $0 < |q| < \infty$.

$\square$ *Доведення.* Доведення виконаємо для випадку, коли $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = q$, $0 < |q| < \infty$. У цьому випадку з формули (23) одержимо

$$|\Delta(\lambda_k)| = |a_2 b_2| \left| q^2 + \lambda_k \right| \left| \sin\left(\sqrt{\lambda_k} T\right) \right|. \tag{37}$$

Зауважимо, що для всіх значень $\lambda_k \in \Lambda$ справджується нерівність

$$q^2 + \lambda_k > \lambda_k. \tag{38}$$

Врахувавши нерівність (36), отримаємо оцінку

$$\left| \sin\left(\sqrt{\lambda_k} T\right) \right| \geq \left| \sin\left|\sqrt{\lambda_k} T - m_k \pi\right| \right| \geq$$
$$\geq \frac{2}{\pi} \left| \sqrt{\lambda_k} T - m_k \pi \right|, \tag{39}$$

де $m_k \in \mathbb{Z}$ таке, що $\left|\sqrt{\lambda_k} T - m_k \pi\right| \leq \pi/2$. Тоді з оцінки (39) і леми випливає, що для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел T нерівність

$$\left| \sin\left(\sqrt{\lambda_k} T\right) \right| \geq 2T \sqrt[p]{k} \left| \frac{\sqrt{\lambda_k}}{\sqrt[p]{k}\pi} - \frac{m_k}{\sqrt[p]{k} T} \right| \geq$$
$$\geq 2Tk^{1/p} \frac{1}{k^{1+1/p+\varepsilon}} = 2Tk^{-1-\varepsilon} \tag{40}$$

справджується для всіх (крім скінченного числа) значень $\lambda_k \in \Lambda$. Отже, з оцінок (6), (38), (40) та рівності (37) випливає, що для всіх (крім скінченного числа) значень $\lambda_k \in \Lambda$ справджується нерівність

$$|\Delta(\lambda_k)| \geq Ak^{\frac{2}{p} - 1 - \varepsilon},$$

де $A = 2Tc_0 > 0$, $\quad 0 < \varepsilon < 1$, що й доводить теорему для випадку, який розглядається.

Для інших випадків доведення виконують аналогічно. Теорему доведено. $\blacksquare$

Теорема 4. *Якщо $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, то для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел T нерівність (29) виконується для всіх (крім скінченної кількості) $\lambda_k \in \Lambda$ і таких значень γ:*

а) $\gamma > 1 - 1/p$, якщо $a_2 = 0$, $b_2b_1 \neq 0$; $b_2 = 0$, $a_2a_1 \neq 0$; $a_1 = b_2 = 0$ або $b_1 = a_2 = 0$;

б) $\gamma > 1 - 2/p$, якщо $a_1a_2b_2b_1 \neq 0$; $b_1 = 0$, $a_1a_2 \neq 0$ або $a_1 = 0$, $b_1b_2 \neq 0$.

□ *Доведення.* Доведення виконаємо для випадку, коли $a_1a_2b_1b_2 \neq 0$. Тоді з формули (21) випливає, що

$$|\Delta(\lambda_k)| \geq \lambda_k |a_2b_2| \left|\cos\left(\sqrt{\lambda_k}T - \varphi_k - m_k\pi\right)\right| =$$

$$= \lambda_k |a_2b_2| \left|\sin\left|\sqrt{\lambda_k}T + \pi/2 - \varphi_k - m_k\pi\right|\right|, \qquad (41)$$

де $m_k \in \mathbb{R}_+$ таке, що $\left|\sqrt{\lambda_k}T + \pi/2 - \varphi_k - m_k\pi\right| \leq \pi/2$, а φ_k зображується формулою (20). На підставі (36) і леми для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел T одержимо оцінку

$$\left|\sin\left|\sqrt{\lambda_k}T + \frac{\pi}{2} - \varphi_k - m_k\pi\right|\right| \geq$$

$$\geq \frac{2}{\pi}\left|\sqrt{\lambda_k}T + \frac{\pi}{2} - \varphi_k - m_k\pi\right| = \qquad (42)$$

$$= 2T\sqrt[p]{k}\left|\frac{\sqrt{\lambda_k}}{\sqrt[p]{k}\pi} + \frac{\pi/2 - \varphi_k}{T\sqrt[p]{k}\pi} - \frac{m_k}{\sqrt[p]{k}T}\right| \geq 2Tk^{-1-\varepsilon},$$

яка справджується для всіх (крім скінченного числа) значень $\lambda_k \in \Lambda$. Отже, з оцінок (6), (41), (42) випливає, що для всіх (крім скінченного числа) значень $\lambda_k \in \Lambda$ справджується нерівність

$$|\Delta(\lambda_k)| \geq Ak^{\frac{2}{p}-1-\varepsilon},$$

де $A = 2Tc_0|a_2b_2| > 0$, $0 < \varepsilon < 1$, що й доводить теорему для випадку, який розглядається.

Для інших випадків доведення виконують аналогічно. Теорему доведено. ■

V. Висновки

У статті встановлено умови коректності задачі (1)–(3) та побудовано її розв'язок у вигляді ряду за системою ортогональних функцій. Для задачі (1)–(3) можна дослідити, аналогічно до [13, 20, 22], також питання про стійкість та побудову методом регуляризації за Тихоновим наближеного розв'язку, якщо крайові умови (2) задані наближено:

$$\begin{cases} \left\|a_1u(0,x) + a_2\dfrac{\partial u(0,x)}{\partial t} - \varphi_1(x)\right\|_{L_2(\Omega)} \leq c_8\delta, \\ \left\|b_1u(\tau,x) + b_2\dfrac{\partial u(\tau,x)}{\partial t} - \varphi_2(x)\right\|_{L_2(\Omega)} \leq c_8\delta, \end{cases}$$

де $|\tau - T| \leq \delta$, $0 < \delta < T$. Додатково треба накласти умову обмеженості енергії

$$\int\limits_{\Omega}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial u}{\partial x_p}\right)^2\right)dx < E,$$

$$t \in [0,\tau], \ E = const > 0.$$

Література

[1] Арнольд В.И. Малые знаменатели. 1. Об отображении окружности на себя // Изв. АН СССР. Сер. мат., 1961, 25, № 1. – С. 21–86.

[2] Березанский Ю.М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – К.: Наук. думка, 1965. – 798 с.

[3] Білусяк Н.І. Крайова задача для гіперболічного рівняння, збуреного нелінійним інтегро-диференціальним оператором // Вісник держ. ун-ту "Львівська політехніка". Прикладна математика. – 1998. – 1, № 337. – С. 76–79.

[4] Білусяк Н.І.,Комарницька Л.І., Пташник Б.Й. Задача типу Діріхле для систем рівнянь із частинними похідними не розв'язаних відносно старшої похідної за часом // Укр. мат. журн. – 2002. – 54, № 12. – С. 1592–1602.

[5] Білусяк Н.І., Пташник Б.Й. Крайова задача з даними на всій границі області для слабконелінійних гіперболічних рівнянь // Укр. мат. журн. – 2001. – 53, № 2. – С. 244–249.

[6] Білусяк Н.І., Пташник Б.Й. Крайова задача для слабконелінійних гіперболічних рівнянь зі змінними коефіцієнтами // Укр. мат. журн. – 2001. – 53, № 9. – С. 1281–1286.

[7] Бобик І.О., Пташник Б.Й. Крайові задачі для гіперболічних рівнянь зі сталими коефіцієнтами // Укр. мат. журн. – 1994. – Т 46, № 7. – С. 795–802.

[8] Бурський В.П. Методи дослідження граничних задач для загальних диференціальних рівнянь. – К.: Наук. думка, 2002. – 315 с.

[9] Владимиров В.С. Уравнения матемактической физики.– изд. 4-е. – М.: Наука. Главная редакция физико–матиматической литературы, 1981. – 512 с.

[10] Ильин В.А., Шишмарев И.А. Равномерные в замкнутой области оценки для собственных функций эллиптического оператора и их производных // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1960. – 24, №6. – С. 883–896.

[11] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1981. – 544 с.

[12] Комарницька Л.І., Пташник Б.Й. Крайові задачі для диференціального рівняння з частинними похідними, не розв'язаного відносно старшої похідної за часом // Укр. мат. журн. – 1995. – Т 47, № 9. – С. 1197–1208.

[13] Мельникова И.В., Фрейберг А.Ю. О регуляризации краевой задачи для уравнения колебаний // Журнал вычисл. матем. и математич. физики. – 1985. – Т. 25, №5. – С. 783–789.

[14] Михайлов В.П. Дифференциальние уравнения в частных производных. – М.: Наука, 1983. – 424 с.

[15] Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969. – 526 с.

[16] Пташник Б.И. Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – К.: Наук. думка, 1984. – 264 с.

[17] Пташник Б.И., Фиголь В.В. Краевая задача для системы интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1985. – Вып. 22. – С. 7–11.

[18] Пташник Б.И., Штабалюк П.И. Краевая задача для гиперболических уравнений в классе функций, почти периодических по пространственным переменным // Дифференц. уравнения. – Т. 22, №.4. – С. 669–678.

[19] Соболев С.Л. Пример корректорной краевой задачи для уравнения колебания струны с данными на всей границе // Докл. АН СССР, 1956, 109, № 4. – С. 707–709.

[20] Фіголь В.В. Краевая задача с приближенными граничными данными для гиперболического уравнения с постоянными коэффициентами // Докл. АН УССР. Сер. А, 1985, №2, С. 18–21.

[21] Bourgin D.G., Duffin R. The Dirichlet problem for the vibrating string equation. – Bull. Amer. Math. Soc., 1939, 45, № 12. – P. 851–858.

[22] John F. The Dirichlet problem for a hyperbolic equation. – Amer. J. Math., 1941, 63, № 1. – P. 141–154.

[23] Papi Frosalies G. On the stability of the Dirichlet problem for the vibrating string equation. – Ann. Scuola norm. super. Pisa. Sci. fis. e mat., 1979, v. 6, № 4. – P. 719–728.

THE BOUNDARY–VALUE PROBLEM FOR LINEAR HYPERBOLIC EQUATION WITH VARIABLE COEFFICIENTS

S.M. Repetylo

National University "Lvivska Politechnika"
12 S. Bandera Str., 79013, Lviv, Ukraine

The problem with data on the whole boundary of domain for linear non-homogeneous hyperbolic equation of the second order with variable in the spatial coordinates coefficients is investigated. The conditions of correctness of the problem are established and the solution in the form of series according to the system of orthogonal functions is constructed. For estimation of small denominators from below that appeared during the construction of the solution of the problem the metric approach is used.

Keywords: boundary-value problem, hyperbolic equation, Fourier method, small denominators, metric approach, Lebesque measure.

2000 MSC: 35L20

УДК: 517.956.32