ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
"Фізико-математичні науки"
Вип.660 № 660, (2009) с. 14–19

JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY
"LVIVSKA POLITECHNIKA"
"Physical & mathematical sciences"
Vol.660 No 660, (2009) 14–19

ПРО РОЗВ'ЯЗОК НЕЛІНІЙНОЇ ПЕРШОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ В УЗАГАЛЬНЕНИХ ФУНКЦІЯХ

О.Ю. Чмир, О.В. Меньшикова

Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
вул. Клепарівська 35, 79000, Львів, Україна

(Отримано 6 лютого 2009 р.)

Використовуючи принцип Шаудера, встановлено достатні умови розв'язності нелінійної першої узагальненої крайової задачі для рівняння теплопровідності у просторі функцій з точковими особливостями.

Ключові слова: нелінійна крайова задача; узагальнена функція; ваговий функційний простір; неперервний оператор; компактна множина; теорема Шаудера про нерухому точку

2000 MSC: 2000: 35K55

УДК: 517.95

Вступ

У багатьох працях вивчались узагальнені крайові задачі для лінійних та півлінійних еліптичних рівнянь (див., наприклад, [1] та бібліографію). На основі цих досліджень продовжено вивчення узагальнених крайових задач для півлінійних параболічних рівнянь [2, 3], а також розглянуто задачі, коли функції, задані на межі області, мають точкові особливості [4].

У статтях [5, 6, 7, 8] досліджувались крайові задачі для рівняння теплопровідності з нелінійними крайовими умовами. Так, наприклад, автори [9] одержали коректну розв'язність крайової задачі для рівняння теплопровідності з нелінійними крайовими умовами та початковими даними – мірами.

У цій статті вивчаються умови розв'язності нелінійної першої узагальненої крайової задачі для рівняння теплопровідності у просторі функцій, які можуть мати особливості в окремих точках межі області.

I. Основні позначення та формулювання задачі

Нехай $n \in \mathbb{N}$, Ω – обмежена область в $\mathbb{R}^n$ з межею $S = \partial\Omega$ класу C^∞, $Q = \Omega \times (0,T]$, $\Sigma = S \times (0,T]$, $0 < T < +\infty$.

Використовуватимемо позначення:
$||x-y|| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2}$ – евклідова відстань в $\mathbb{R}^n$,
$P = (x,t)$, $M = (y,\tau)$, $\widehat{P} = (\hat{x},\hat{t})$,
$d(P,M) = |PM| = d(x,t;y,\tau) = \sqrt{||x-y||^2 + |t-\tau|}$– параболічна відстань в $\mathbb{R}^{n+1}$;
η – мультиіндекс з компонентами $(\eta_1, ..., \eta_n)$, $\eta_i \in \mathbb{Z}_+$, $i = \overline{1,n}$, $|\eta| = \eta_1 + ... + \eta_n$ – довжина мультиіндекса η, $D^\eta \equiv D_x^\eta = \frac{\partial^{|\eta|}}{\partial x_1^{\eta_1} \cdot \ldots \cdot \partial x_n^{\eta_n}}$.

Нехай $\varepsilon_0 > 0$ – таке задане число, що паралельна до S поверхня S_{ε_0} є класу C^∞ та надалі вважатимемо, що $\varepsilon_0 \le 1$. Через $\widetilde{\varrho}(\sigma)$ позначатимемо нескінченно диференційовну невід'ємну функцію, яка має порядок σ при $\sigma \to 0$. При довільній фіксованій точці $\widehat{P} \in \overline{Q}$ введемо функцію ϱ_0 точки $P \in \overline{Q}$ таку, що $0 < \varrho_0(P,\widehat{P}) \le 1$ та
$$\varrho_0(P,\widehat{P}) = \begin{cases} \widetilde{\varrho}(|P\widehat{P}|), & |P\widehat{P}| < \frac{\varepsilon_0}{2}, \\ 1, & |P\widehat{P}| \ge \varepsilon_0. \end{cases}$$
Нехай
$D(\overline{Q}) = C^\infty(\overline{Q})$, $D(\overline{\Sigma}) = C^\infty(\overline{\Sigma})$, $D(\overline{\Omega}) = C^\infty(\overline{\Omega})$;
$D^0(\overline{Q}) = \{\varphi \in D(\overline{Q}) : \ \frac{\partial^k}{\partial t^k}\varphi \,|_{t=T} = 0, \ k = 0,1,\ldots\}$,
$D^0(\overline{\Sigma}) = \{\varphi \in D(\overline{\Sigma}) : \ \frac{\partial^k}{\partial t^k}\varphi \,|_{t=T} = 0, \ k = 0,1,\ldots\}$,
$D_0(\overline{\Omega}) = \{\varphi \in D(\overline{\Omega}) : \varphi|_S = 0\}$, ν – орт внутрішньої нормалі до S.

Надалі позначатимемо через $(D^0(\overline{\Sigma}))'$, $(D_0(\overline{\Omega}))'$ – простори лінійних неперервних функціоналів відповідно на просторах функцій $D^0(\overline{\Sigma})$, $D_0(\overline{\Omega})$, через $(\varphi, F)_1$ – значення узагальненої функції $F \in (D^0(\overline{\Sigma}))'$ на основній функції $\varphi \in D^0(\overline{\Sigma})$, через $(\varphi, F)_2$ – значення $F \in (D_0(\overline{\Omega}))'$ на $\varphi \in D_0(\overline{\Omega})$.

Нехай $(\hat{x},\hat{t}) \in \Sigma$. Припустимо, що
1) функції $f_0(x,t,\mathrm{v})$ визначена в $Q \times \mathbb{R}$, $g_0(x,t,\mathrm{v})$ визначена в $\Sigma \times \mathbb{R}$,

2) $$F_1(x,t) = \sum_{|l| \le p_1} \sum_{m=0}^{p_2} C_{lm} D_x^l \delta(x-\hat{x}) \delta^{(m)}(t-\hat{t}), \quad (1)$$
$$F_2(x) = \sum_{|r| \le p_3} C_r D_x^r \delta(x-\hat{x}),$$
де C_{lm}, C_r – сталі, p_1, p_2, p_3 – невід'ємні цілі числа.

Розглянемо нелінійну першу узагальнену крайову задачу
$$Lu(x,t) \equiv \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \triangle u(x,t) = f_0(x,t,u(x,t)), \quad (x,t) \in Q, \qquad (2)$$

$$u(x,t)\mid_{\Sigma}=F_1(x,t)+g_0(x,t,u(x,t)),\quad (x,t)\in\Sigma, \tag{3}$$

$$u(x,0)=F_2(x),\quad x\in\Omega. \tag{4}$$

При $k\in\mathbb{R}$ введемо функційні простори:
$\mathcal{M}_k(\overline{Q},\ \widehat{P})=\{\mathrm{v}:$
$||\mathrm{v};\ \widehat{P}||_k=\max\{\int\limits_Q \varrho_0^k(x,t,\hat{x},\hat{t})|\mathrm{v}(x,t)|\,dxdt;$
$\int\limits_\Sigma \varrho_0^k(x,t,\hat{x},\hat{t})|\mathrm{v}(x,t)|\,dSdt\}<+\infty\}$,
$X_k(\overline{Q},\widehat{P})=\{\psi\in D^0(\overline{Q}):\psi(\cdot,0)\in D_0(\overline{\Omega}),\ \psi\mid_{\overline{\Sigma}}=0,$
$L^*\psi(x,t)=O(\varrho_0^k(x,t,\hat{x},\hat{t})),\ \varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})\to 0\}$,
де L^* – оператор, формально спряжений до L,
$L^*\mathrm{v}=-\left(\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial t}+\triangle^*\mathrm{v}\right)$.

Нехай
$\mathcal{M}_{k,C}(\overline{Q},\ \widehat{P})=\{\mathrm{v}\in\mathcal{M}_k(\overline{Q},\ \widehat{P}):||\mathrm{v};\ \widehat{P}||_k\le C\}$ – куля радіуса C в просторі $\mathcal{M}_k(\overline{Q},\ \widehat{P})$.

Означення 1. Розв'язком задачі (2)–(4) називається функція $u\in\mathcal{M}_k(\overline{Q},\ \widehat{P})$ така, що

$$\int\limits_Q L^*\psi(x,t)\cdot u(x,t)\,dxdt=$$

$$=\int\limits_Q \psi(x,t)\cdot f_0(x,t,u(x,t))\,dxdt+\left(\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial\nu},F_1(x,t)\right)_1+$$

$$+\int\limits_\Sigma \frac{\partial\psi(x,t)}{\partial\nu}\cdot g_0(x,t,u(x,t))\,dSdt+(\psi(\cdot,0),F_2(\cdot))_2$$

для довільної $\psi\in X_k(\overline{Q},\widehat{P})$.

Позначимо через $G(x,t;y,\tau)$ функцію Ґріна першої крайової задачі для рівняння теплопровідності, яка визначена в точках $(x,t;y,\tau)\in\overline{Q}\times\overline{Q}$ при $(x,t)\neq(y,\tau)$. Існування її та ряд властивостей одержуємо із [10, 11]. З цих результатів випливає, що

1) $G(x,t;y,\tau)=0$ при $t<\tau$;

2) для будь-яких мультиіндексів η, η_0

$$\left|\frac{\partial^{\eta_0}}{\partial t^{\eta_0}}D_x^\eta G(x,t;y,\tau)\right|\le\widehat{C}_{\eta,\,\eta_0}\,[d(x,t;y,\tau)]^{-n-|\eta|-2\eta_0}, \tag{5}$$

де $\widehat{C}_{\eta,\,\eta_0}$ – додатні сталі.

Подібно до результатів [2, 12, 13] доводимо таку властивість функції G.

Лема 1. *Нехай* $(\hat{x},\hat{t})\in\overline{Q}$, $|\eta|\le 1$. *Тоді*

$$\int\limits_Q \varrho_0^r(x,t,\hat{x},\hat{t})\cdot|D_y^\eta G(x,t;y,\tau)|\,dxdt\le$$

$$\le L_{1,\,\eta}\max\{[\varrho_0(y,\tau,\hat{x},\hat{t})]^{r+2-|\eta|},\ 1\}\ \forall(y,\tau)\in\overline{Q}$$

при $r>-n-2$;

$$\int\limits_\Sigma \varrho_0^r(x,t,\hat{x},\hat{t})\cdot|D_y^\eta G(x,t;y,\tau)|\,dS_xdt\le$$

$$\le L_{2,\,\eta}\max\{[\varrho_0(y,\tau,\hat{x},\hat{t})]^{r+1-|\eta|},\ 1\}\ \forall(y,\tau)\in\overline{Q}$$

при $r>-n-1$.

Зауваження 1. Подібно до доведення теореми 2 [3] доводимо, що розв'язок задачі (2)–(4) є розв'язком у просторі $\mathcal{M}_k(\overline{Q},\ \widehat{P})$ інтегрального рівняння

$$u(x,t)=\int\limits_0^t d\tau\int\limits_\Omega G(x,t;y,\tau)\cdot f_0(y,\tau,u(y,\tau))\,dy+$$

$$+\left(\frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial\nu_y},F_1(y,\tau)\right)_1+$$

$$+\int\limits_\Sigma \frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial\nu_y}\cdot g_0(y,\tau,u(y,\tau))\,dS_yd\tau+$$

$$+(G(x,t;y,0),F_2(y))_2 \tag{6}$$

і навпаки.

Позначимо

$$(H\mathrm{v})(x,t)=\int\limits_0^t d\tau\int\limits_\Omega G(x,t;y,\tau)\cdot f_0(y,\tau,u(y,\tau))\,dy+$$

$$+\int\limits_\Sigma \frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial\nu_y}\cdot g_0(y,\tau,u(y,\tau))\,dS_yd\tau,$$

$$h(x,t)=g_1(x,t)+g_2(x,t)=$$

$$=\left(\frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial\nu_y},F_1(y,\tau)\right)_1+(G(x,t;y,0),F_2(y))_2,$$

$$(H_1\mathrm{v})(x,t)=(H\mathrm{v})(x,t)+h(x,t).$$

Рівняння (6) набуде вигляду
$u(x,t)=(Hu)(x,t)+h(x,t)$.

Лема 2. *Нехай виконуються припущення (1) щодо функцій* f_0, g_0 *та при* $k\ge 0$

$$\int\limits_Q |f_0(y,\tau,\mathrm{v}(y,\tau))|\,dyd\tau<+\infty\quad\forall\mathrm{v}\in\mathcal{M}_k(\overline{Q},\ \widehat{P}), \tag{7}$$

$$\int\limits_\Sigma |g_0(y,\tau,\mathrm{v}(y,\tau))|\,dSd\tau<+\infty\quad\forall\mathrm{v}\in\mathcal{M}_k(\overline{Q},\widehat{P}). \tag{8}$$

Тоді оператор H *відображає простір* $\mathcal{M}_k(\overline{Q},\widehat{P})$ *в себе.*

$\square$ *Доведення.* При $\mathrm{v}\in\mathcal{M}_k(\overline{Q},\ \widehat{P})$ оцінимо

$$||H\mathrm{v};\ \widehat{P}||_k=\max\{\int\limits_Q \varrho_0^k(x,t,\hat{x},\hat{t})|(H\mathrm{v})(x,t)|\,dxdt;$$

$$\int\limits_\Sigma \varrho_0^k(x,t,\hat{x},\hat{t})|(H\mathrm{v})(x,t)|\,dSdt\}\le$$

$$\le\max\{\int\limits_Q \varrho_0^k(x,t,\hat{x},\hat{t})\Big(\int\limits_Q |G(x,t;y,\tau)|\times$$

$$\times|f_0(y,\tau,\mathrm{v}(y,\tau))|\,dyd\tau\Big)\,dxdt+$$

$$+\int\limits_Q \varrho_0^k(x,t,\hat{x},\hat{t})\Big(\int\limits_\Sigma |\frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial \nu_y}|\times$$

$$\times|g_0(y,\tau,\mathrm{v}(y,\tau))|\,dS_y d\tau\Big)\,dxdt;$$

$$\int\limits_\Sigma \varrho_0^k(x,t,\hat{x},\hat{t})\Big(\int\limits_Q |G(x,t;y,\tau)|\times$$

$$\times|f_0(y,\tau,\mathrm{v}(y,\tau))|\,dyd\tau\Big)\,dS_x dt+$$

$$+\int\limits_\Sigma \varrho_0^k(x,t,\hat{x},\hat{t})\Big(\int\limits_\Sigma |\frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial \nu_y}|\times$$

$$\times|g_0(y,\tau,\mathrm{v}(y,\tau))|\,dS_y d\tau\Big)\,dS_x dt\}.$$

Розглянемо

$$\int\limits_Q |f_0(y,\tau,\mathrm{v}(y,\tau))|\cdot\Big(\int\limits_\tau^T dt\int\limits_\Omega \varrho_0^k(x,t,\hat{x},\hat{t})\times$$

$$\times|G(x,t;y,\tau)|\,dx\Big)\,dyd\tau, \tag{9}$$

$$\int\limits_\Sigma |g_0(y,\tau,\mathrm{v}(y,\tau))|\cdot\Big(\int\limits_Q \varrho_0^k(x,t,\hat{x},\hat{t})\times$$

$$\times|\frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial \nu_y}|\,dxdt\Big)\,dS_y d\tau, \tag{10}$$

$$\int\limits_Q |f_0(y,\tau,\mathrm{v}(y,\tau))|\cdot\Big(\int\limits_\Sigma \varrho_0^k(x,t,\hat{x},\hat{t})\times$$

$$\times|G(x,t;y,\tau)|\,dS_x dt\Big)\,dyd\tau \tag{11}$$

та

$$\int\limits_\Sigma |g_0(y,\tau,\mathrm{v}(y,\tau))|\cdot\Big(\int\limits_\Sigma \varrho_0^k(x,t,\hat{x},\hat{t})\times$$

$$\times|\frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial \nu_y}|\,dS_x dt\Big)\,dS_y d\tau. \tag{12}$$

За лемою 1 оцінюємо внутрішні інтеграли в (9), (10), (11) та (12). Тоді із (7), (8) випливає скінченність інтегралів (9), (10), (11) та (12), а за теоремою Фубіні – скінченність $||H\mathrm{v};\,\widehat{P}||_k$. ■

Лема 3. *Нехай $k>k_0=\max\{p_1+2p_2,p_3-1\}$ та виконуються припущення (1). Тоді $h\in\mathcal{M}_k(\overline{Q},\,\widehat{P})$, а саме, існує додатна стала K_0 така, що $||h;\,\widehat{P}||_k\le K_0<+\infty$.*

□ *Доведення.* Маємо

$$||h;\,\widehat{P}||_k=\max\{\int\limits_Q \varrho_0^k(x,t,\hat{x},\hat{t})\cdot|h(x,t)|\,dxdt;$$

$$\int\limits_\Sigma \varrho_0^k(x,t,\hat{x},\hat{t})\cdot|h(x,t)|\,dSdt\}\le$$

$$\le\max\{\int\limits_Q \varrho_0^k(x,t,\hat{x},\hat{t})\Big(|(\frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial \nu_y},F_1(y,\tau))_1|+$$

$$+|(G(x,t;y,0),F_2(y))_2|\Big)\,dxdt;$$

$$\int\limits_\Sigma \varrho_0^k(x,t,\hat{x},\hat{t})\Big(|(\frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial \nu_y},F_1(y,\tau))_1|+$$

$$+|(G(x,t;y,0),F_2(y))_2|\Big)\,dS_x dt\}=$$

$$=\max\{\int\limits_Q \varrho_0^k(x,t,\hat{x},\hat{t})\cdot(|g_1(x,t)|+|g_2(x,t)|)\,dxdt;$$

$$\int\limits_\Sigma \varrho_0^k(x,t,\hat{x},\hat{t})\cdot(|g_1(x,t)|+|g_2(x,t)|)\,dSdt\}. \tag{13}$$

Враховуючи припущення (1) та оцінки (5) похідних функції G, матимемо

$$|g_1(x,t)|\le\sum_{|l|\le p_1}\sum_{m=0}^{p_2}|C_{lm}|\cdot|\frac{\partial^m}{\partial\hat{t}^m}D_{\hat{x}}^l\frac{\partial G(x,t;\hat{x},\hat{t})}{\partial\nu_{\hat{x}}}|\le$$

$$\le C_1\sum_{|l|\le p_1}\sum_{m=0}^{p_2}(|x-\hat{x}|^2+|t-\hat{t}|)^{\frac{-n-1-|l|-2m}{2}}\le$$

$$\le C_1[\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{-(n+1+p_1+2p_2)},$$

$$|g_2(x,t)|\le\sum_{|r|\le p_3}|C_r|\cdot|D_{\hat{x}}^r G(x,t;\hat{x},0)|\le$$

$$\le C_2\sum_{|r|\le p_3}(|x-\hat{x}|^2+t)^{\frac{-n-|r|}{2}}\le$$

$$\le C_2[\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{-(n+p_3)},$$

де C_1, C_2 –додатні сталі.

Тоді із (13) одержуємо
$||h;\,\widehat{P}||_k\le\max\{C_1\int\limits_Q[\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{k-(n+1+p_1+2p_2)}\,dxdt+$
$+\,C_2\int\limits_Q[\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{k-(n+p_3)}\,dxdt;$
$C_1\int\limits_\Sigma[\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{k-(n+1+p_1+2p_2)}\,dSdt+$
$+\,C_2\int\limits_\Sigma[\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{k-(n+p_3)}\,dSdt\}$. Звідси при $k>k_0=\max\{p_1+2p_2,p_3-1\}$ матимемо, що $||h;\,\widehat{P}||_k\le K_0<+\infty$, тобто $h\in\mathcal{M}_k(\overline{Q},\,\widehat{P})$. ■

Введемо позначення:
$\widetilde{g}_{\,k,\,0}(x,t;y,\tau)\overset{def}{=}\varrho_0^k(x,t,\hat{x},\hat{t})\cdot G(x,t;y,\tau)$,
$\widetilde{g}_{\,k,\,1}(x,t;y,\tau)\overset{def}{=}\varrho_0^k(x,t,\hat{x},\hat{t})\cdot\frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial\nu_y}$, $(x,t)\in\overline{Q}$, $(y,\tau)\in\overline{\Sigma}$.

Лема 4. *Для довільного $\varepsilon>0$ існує $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ таке, що для довільної підобласті $V\subset\overline{Q}$, міра якої $m(V)$ менша за δ, і будь-якої точки $(y,\tau)\in\overline{\Sigma}$ при $k>-2$*

$$\int\limits_V|\widetilde{g}_{\,k,\,0}(x,t;y,\tau)|\,dxdt<\varepsilon,$$

а при $k>-1$

$$\int\limits_V|\widetilde{g}_{\,k,\,1}(x,t;y,\tau)|\,dxdt<\varepsilon.$$

Доведення леми виконуємо подібно до доведення леми 1 [4], розділяючи особливості функцій $\widetilde{g}_{k,0}$, $\widetilde{g}_{k,1}$.

Лема 5. *Нехай $k > 0$, функції f_0 та g_0 при деякому $C > 0$ задовольняють умови:*

1) *існують сталі $K_1 > 0$, $K_2 > 0$ такі, що для довільних $\mathrm{v} \in \mathcal{M}_{k,C}(\overline{Q},\, \widehat{P})$*

$$\int\limits_Q |f_0(y,\tau,\mathrm{v}(y,\tau))|\, dyd\tau \le K_1,$$

$$\int\limits_\Sigma |g_0(y,\tau,\mathrm{v}(y,\tau))|\, dSd\tau \le K_2;$$

2) *існують неперервні, монотонно неспадні, додатні на $(0,+\infty)$ функції $\psi_C^1(z)$, $\psi_C^2(z)$, $z \in [0,+\infty)$, такі, що $\psi_C^1(0) = 0$, $\psi_C^2(0) = 0$ та для довільних $\mathrm{v}, \mathrm{w} \in \mathcal{M}_{k,C}(\overline{Q},\, \widehat{P})$*

$$\int\limits_Q |f_0(y,\tau,\mathrm{v}(y,\tau)) - f_0(y,\tau,\mathrm{w}(y,\tau))|\, dyd\tau \le$$
$$\le \psi_C^1(||\mathrm{v} - \mathrm{w};\, \widehat{P}||_k), \tag{14}$$

$$\int\limits_\Sigma |g_0(y,\tau,\mathrm{v}(y,\tau)) - g_0(y,\tau,\mathrm{w}(y,\tau))|\, dSd\tau \le$$
$$\le \psi_C^2(||\mathrm{v} - \mathrm{w};\, \widehat{P}||_k). \tag{15}$$

Тоді оператор H є цілком неперервним на $\mathcal{M}_{k,C}(\overline{Q},\, \widehat{P})$.

Доведення леми проводимо подібно до доведення леми 4 у [14] та з використанням леми 4.

II. Точкові особливості розв'язку нелінійної першої узагальненої крайової задачі для рівняння теплопровідності

Теорема 1. *Нехай виконуються припущення леми 3, функції f_0, g_0 задовольняють умови: існує стала $C_0 > 0$ така, що для довільної сталої $C > C_0$ та для довільних $\mathrm{v}, \mathrm{w} \in \mathcal{M}_{k,C}(\overline{Q},\, \widehat{P})$*

$$\int\limits_Q |f_0(y,\tau,\mathrm{v}(y,\tau))|\, dyd\tau \le \varphi_1(C), \tag{16}$$

$$\int\limits_\Sigma |g_0(y,\tau,\mathrm{v}(y,\tau))|\, dSd\tau \le \varphi_2(C), \tag{17}$$

де функції $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$, $z \in [0,+\infty)$, – неперервні, монотонно неспадні, додатні на $(0,+\infty)$, $\frac{\varphi_i(z)}{z} \to 0$ при $z \to +\infty$, $i = 1,2$ та виконуються умови (14), (15). Тоді існує розв'язок задачі (2)–(4) у просторі $\mathcal{M}_k(\overline{Q},\, \widehat{P})$.

□ *Доведення.* Використаємо теорему Шаудера [15, с. 291]. Треба показати існування сталої $C > 0$ такої, що H_1 відображає $\mathcal{M}_{k,C}(\overline{Q},\, \widehat{P})$ в себе та є цілком неперервним оператором на $\mathcal{M}_{k,C}(\overline{Q},\, \widehat{P})$.

За лемою 3 існує додатна стала K_0 така, що $||h;\, \widehat{P}||_k \le K_0$. Використовуючи доведення леми 2 та умови теореми, матимемо для довільних $\mathrm{v} \in \mathcal{M}_{k,C}(\overline{Q},\, \widehat{P})$

$$||H_1\mathrm{v};\, \widehat{P}||_k \le \max\{L_{1,\,0} \int\limits_Q |f_0(y,\tau,\mathrm{v}(y,\tau))|\, dyd\tau +$$
$$+ L_{1,\,1} \int\limits_\Sigma |g_0(y,\tau,\mathrm{v}(y,\tau))|\, dSd\tau;$$
$$L_{2,\,0} \int\limits_Q |f_0(y,\tau,\mathrm{v}(y,\tau))|\, dyd\tau +$$
$$+ L_{2,\,1} \int\limits_\Sigma |g_0(y,\tau,\mathrm{v}(y,\tau))|\, dSd\tau\} + K_0 \le$$
$$\le L_0^{'}\varphi_1(||\mathrm{v};\, \widehat{P}||_k) + L_0^{''}\varphi_2(||\mathrm{v};\, \widehat{P}||_k) + K_0, \tag{18}$$

де $L_0^{'}$, $L_0^{''}$ – сталі з леми 1.

За властивостями функцій φ_1 та φ_2 для $\mathrm{v} \in \mathcal{M}_{k,C}(\overline{Q},\, \widehat{P})$ із (18) одержуємо існування сталої $C_0 > 0$ такої, що $||H_1\mathrm{v};\, \widehat{P}||_k \le L_0^{'}\varphi_1(C) + L_0^{''}\varphi_2(C) + K_0 < C$ для всіх $C > C_0$. Отож, випуклу замкнену обмежену підмножину $\mathcal{M}_{k,C}(\overline{Q},\, \widehat{P})$ простору $\mathcal{M}_k(\overline{Q},\, \widehat{P})$ оператор H_1 відображає в себе.

З леми 5 та умов теореми випливає, що

$$||H_1\mathrm{v} - H_1\mathrm{w};\, \widehat{P}||_k \le L_0^{'}\psi_C^1(||\mathrm{v} - \mathrm{w};\, \widehat{P}||_k) +$$
$$+ L_0^{''}\psi_C^2(||\mathrm{v} - \mathrm{w};\, \widehat{P}||_k)$$

при $k > 0$ та для довільних v, $\mathrm{w} \in \mathcal{M}_{k,C}(\overline{Q},\, \widehat{P})$. За властивостями функцій ψ_C^1 та ψ_C^2 одержуємо, що оператор H_1 є неперервним на $\mathcal{M}_{k,C}(\overline{Q},\, \widehat{P})$.

Покажемо, що множина $\{H_1\mathrm{v} : \mathrm{v} \in \mathcal{M}_{k,C}(\overline{Q},\, \widehat{P})\}$ – відносно компактна в $\mathcal{M}_k(\overline{Q},\, \widehat{P})$. Оскільки $\varrho_0^k(\cdot,\cdot,\hat{x},\hat{t})\mathrm{v}(\cdot,\cdot) \in L^1(Q)$ при $\mathrm{v} \in \mathcal{M}_k(\overline{Q},\, \widehat{P})$, то за теоремою Ріса [15, с. 242] для цього необхідно і досить виконання умов:

a) існує стала $C_3 > 0$ така, що $||H_1\mathrm{v};\, \widehat{P}||_k \le C_3$ для довільної $\mathrm{v} \in \mathcal{M}_{k,C}(\overline{Q},\, \widehat{P})$;

b) для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що для $(z, z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $||z|| < \delta$, $|z_0| < \delta$ та довільної $\mathrm{v} \in \mathcal{M}_{k,C}(\overline{Q},\, \widehat{P})$

$$\int\limits_Q |\varrho_0^k(x+z,t+z_0,\hat{x},\hat{t})(H_1\mathrm{v})(x+z,t+z_0) - \varrho_0^k(x,t,\hat{x},\hat{t}) \times$$
$$\times (H_1\mathrm{v})(x,t)|\, dxdt < \varepsilon. \tag{19}$$

Твердження *a*) встановлено вище.

Для довільних $\mathrm{v} \in \mathcal{M}_{k,C}(\overline{Q},\, \widehat{P})$ розпишемо ліву частину (19)

$$\int\limits_Q \Big(\int\limits_0^t d\tau \int\limits_\Omega |\widetilde{g}_{k,\,0}(x+z,t+z_0;y,\tau) - \widetilde{g}_{k,\,0}(x,t;y,\tau)| \times$$

$$\times|f_0(y,\tau,\mathrm{v}(y,\tau))|\,dy\Big)\,dxdt+$$

$$+\int\limits_Q\Big(\int\limits_t^{t+z_0}d\tau\int\limits_\Omega|\widetilde{g}_{k,0}(x+z,t+z_0;y,\tau)|\times$$

$$\times|f_0(y,\tau,\mathrm{v}(y,\tau))|\,dy\Big)\,dxdt+$$

$$\int\limits_Q\Big(\int\limits_\Sigma|\widetilde{g}_{k,1}(x+z,t+z_0;y,\tau)-\widetilde{g}_{k,1}(x,t;y,\tau)|\times$$

$$\times|g_0(y,\tau,\mathrm{v}(y,\tau))|\,dS_yd\tau\Big)\,dxdt+$$

$$+\int\limits_Q|\varrho_0^k(x+z,t+z_0,\hat{x},\hat{t})\cdot h(x+z,t+z_0)-$$

$$-\varrho_0^k(x,t,\hat{x},\hat{t})\cdot h(x,t)|\,dxdt. \qquad (20)$$

Використовуючи доведення леми 4 у [14] при $k>0$, одержуємо малість трьох перших інтегралів в (20).

За теоремою про неперервність в цілому функції з $L^1(Q)$ ([16, с. 21]) одержуємо: для довільного $\varepsilon>0$ існує $\delta^{'}=\delta^{'}(\varepsilon)>0$ таке, що для довільних $(z,z_0)\in\mathbb{R}^{n+1}$, $||z||<\delta^{'}$, $|z_0|<\delta^{'}$ $\int\limits_Q|\varrho_0^k(x+z,t+z_0,\hat{x},\hat{t})\cdot h(x+z,t+z_0)-$ $-\varrho_0^k(x,t,\hat{x},\hat{t})\cdot h(x,t)|\,dxdt<\varepsilon$.

Звідси одержуємо виконання умови *b*). ■

Наслідок 1. Нехай $f_0(x,t,\mathrm{v})=|\mathrm{v}|^{\beta_0}$ та $g_0(x,t,\mathrm{v})=|\mathrm{v}|^{\beta_1}$, $k>k_0=\max\{p_1+2p_2,p_3-1\}$. Тоді для всіх $\beta_0\in(0,\frac{n+2}{k+n+2})$, $\beta_1\in(0,\frac{n+1}{k+n+1})$ існує розв'язок задачі (2)-(4) у просторі $\mathcal{M}_k(\overline{Q},\ \widehat{P})$.

□ *Доведення.* Покажемо, що функції $f_0(x,t,\mathrm{v})=|\mathrm{v}|^{\beta_0}$ та $g_0(x,t,\mathrm{v})=|\mathrm{v}|^{\beta_1}$ задовольняють умови теореми 1. Застосовуючи нерівність Гельдера, оцінимо

$$\int\limits_Q|\mathrm{v}(y,\tau)|^{\beta_0}\,dyd\tau=\int\limits_Q(\varrho_0^k(y,\tau,\hat{x},\hat{t})\cdot|\mathrm{v}(y,\tau)|)^{\beta_0}\times$$

$$\times[\varrho_0(y,\tau,\hat{x},\hat{t})]^{-k\beta_0}\,dyd\tau\le\Big(\int\limits_Q\varrho_0^k(y,\tau,\hat{x},\hat{t})\times$$

$$\times|\mathrm{v}(y,\tau)|dyd\tau\Big)^{\beta_0}\cdot\Big(\int\limits_Q[\varrho_0(y,\tau,\hat{x},\hat{t})]^{-\frac{k\beta_0}{1-\beta_0}}dyd\tau\Big)^{1-\beta_0}\le$$

$$\le(||\mathrm{v};\,\widehat{P}||_k)^{\beta_0}\Big(\int\limits_Q[\varrho_0(y,\tau,\hat{x},\hat{t})]^{-\frac{k\beta_0}{1-\beta_0}}\,dyd\tau\Big)^{1-\beta_0}.$$

Інтеграл $\int\limits_Q[\varrho_0(y,\tau,\hat{x},\hat{t})]^{-\frac{k\beta_0}{1-\beta_0}}\,dyd\tau<C_4<+\infty$ при $\frac{-k\beta_0}{1-\beta_0}>-n-2$, а отже, для всіх $\beta_0\in(0,\frac{n+2}{k+n+2})$ функція f_0 задовольняє умову (16) при $\varphi_1(C)=C^{\beta_0}\cdot C_4^{1-\beta_0}$.

Подібно, застосовуючи нерівність Гельдера, матимемо

$$\int\limits_\Sigma|\mathrm{v}(y,\tau)|^{\beta_1}\,dSd\tau\le\Big(\int\limits_\Sigma\varrho_0^k(y,\tau,\hat{x},\hat{t})\cdot|\mathrm{v}(y,\tau)|\,dSd\tau\Big)^{\beta_1}\times$$

$$\times\Big(\int\limits_\Sigma[\varrho_0(y,\tau,\hat{x},\hat{t})]^{\frac{-k\beta_1}{1-\beta_1}}\,dSd\tau\Big)^{1-\beta_1}\le$$

$$\le(||\mathrm{v};\,\widehat{P}||_k)^{\beta_1}\Big(\int\limits_\Sigma[\varrho_0(y,\tau,\hat{x},\hat{t})]^{\frac{-k\beta_1}{1-\beta_1}}\,dSd\tau\Big)^{1-\beta_1}.$$

Інтеграл $\int\limits_\Sigma[\varrho_0(y,\tau,\hat{x},\hat{t})]^{\frac{-k\beta_1}{1-\beta_1}}\,dSd\tau<C_5<+\infty$ при $\frac{-k\beta_1}{1-\beta_1}>-n-1$. Тому для всіх $\beta_1\in(0,\frac{n+1}{k+n+1})$ функція g_0 задовольняє умову (17) при $\varphi_2(C)=C^{\beta_1}\cdot C_5^{1-\beta_1}$.

Використовуючи формулу $|a^\mu-b^\mu|\le|a-b|^\mu$ при a, $b>0$, $\mu\in(0,1)$ та нерівність Гельдера, оцінюємо

$$\int\limits_Q||\mathrm{v}(y,\tau)|^{\beta_0}-|\mathrm{w}(y,\tau)|^{\beta_0}|\,dyd\tau\le(||\mathrm{v}-\mathrm{w};\,\widehat{P}||_k)^{\beta_0}\times$$

$$\times\Big(\int\limits_Q[\varrho_0(y,\tau,\hat{x},\hat{t})]^{\frac{-k\beta_0}{1-\beta_0}}\,dyd\tau\Big)^{1-\beta_0},$$

$$\int\limits_\Sigma||\mathrm{v}(y,\tau)|^{\beta_1}-|\mathrm{w}(y,\tau)|^{\beta_1}|\,dSd\tau\le(||\mathrm{v}-\mathrm{w};\,\widehat{P}||_k)^{\beta_1}\times$$

$$\times\Big(\int\limits_\Sigma[\varrho_0(y,\tau,\hat{x},\hat{t})]^{\frac{-k\beta_1}{1-\beta_1}}\,dSd\tau\Big)^{1-\beta_1},$$

де інтеграли збігається при $\beta_0\in(0,\frac{n+2}{k+n+2})$ та $\beta_1\in(0,\frac{n+1}{k+n+1})$ відповідно. Отже, виконуються умови (14), (15). ■

Якщо β_0, β_1 відоме, то можна отримати простори $\mathcal{M}_k(\overline{Q},\ \widehat{P})$, для яких існує розв'язок $u\in\mathcal{M}_k(\overline{Q},\ \widehat{P})$ задачі (2)-(4).

Зауваження 1. Нехай β_0, $\beta_1\in(0,1)$,
$$\begin{cases} p_1+2p_2<\min\{(n+2)(\frac{1}{\beta_0}-1);\ (n+1)(\frac{1}{\beta_1}-1)\},\\ p_3<1+\min\{(n+2)(\frac{1}{\beta_0}-1);\ (n+1)(\frac{1}{\beta_1}-1)\}.\end{cases}$$
Тоді існує розв'язок $u\in\mathcal{M}_k(\overline{Q},\ \widehat{P})$ задачі (2)-(4) при $k>k_0>0$.

Висновки

Встановлено достатні умови існування розв'язку нелінійної першої узагальненої крайової задачі для рівняння теплопровідності у просторі функцій з точковими особливостями.

Література

[1] Лопушанська Г.П. Крайові задачі у просторі узагальнених функцій $D^{'}$. – Львів: Вид-во Львів. нац. ун-ту імені Івана Франка, 2002. – 285 с.

[2] Лопушанська Г.П. Про розв'язок параболічної граничної задачі із сильними степеневими особливостями в правих частинах // Математичні Студії. – 2001. – Т. 15, № 2. – С. 179 – 190.

[3] Чмир О.Ю. Про формулювання узагальненої крайової задачі для півлінійного параболічного рівняння // Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. – 2003. – Вип. 62. – С. 134 – 143.

[4] Чмир О.Ю. Точкові степеневі особливості розв'язку нелінійного інтегрального рівняння Вольтерри // Матем. Вісник наук. тов-ва ім. Т. Г. Шевченка. – 2009. – Т. 6. – С. 73 – 87.

[5] Galaktionov V., Livine H.A. On critical Fujita exponents for heat equations with a nonlinear condition on the boundary // Israel J. Math. – 1996. – Vol. 94. – P. 125 – 146.

[6] Hu B., Yin H.M. On critical exponents for the heat equation with a mixed nonlinear Dirichlet-Newmann nonlinear boundary condition // J. Math. Anal. Appl. – 1997. – Vol. 209. – P. 683 – 711.

[7] Gomez J.L., Marquez V. and Wolanski N. Blow-up results and localization of blow-up points for the heat equation with a nonlinear boundary condition // J. Diff. Equations. – 1991. – Vol. 92. – P. 384 – 401.

[8] Lin Z.G. and Wang M. X. The blow-up properties of solutions to semilinear heat equation with nonlinear boundary conditions // Z. Angew. Math. Phys. – 1999. – Vol. 50. – P. 361 – 374.

[9] Arrieta J.M., Carvalho A.N., Rodrigues-Bernal A. Parabolic problems witn nonlinear boundary conditions and critical nonlinearities // J. Diff. Equations. – 1999. – Vol. 156. – P. 376 – 406.

[10] Ивасишен С.Д. Матрицы Грина параболических граничных задач. – К.: Выща школа. – 1990. – 200 с.

[11] Эйдельман С.Д. Параболические системы. – М.: Наука, – 1964. – 443 с.

[12] Ивасишен С.Д. О композиции параболических ядер // Укр. мат. журн. – 1980. – Т. 32, № 1. – С. 35 – 45.

[13] Лопушанська Г.П., Чмир О.Ю. Про деякі властивості спряжених операторів Ґріна параболічної крайової задачі // Наук. вісник Чернів. ун-ту: зб. наук. пр. Математика. Чернівці ЧДУ. – 2004. – Вип. 191–192. – С. 82 – 88.

[14] Лопушанська Г.П., Чмир О.Ю. Про розв'язки узагальнених нормальних крайових задач для квазілінійних параболічних систем рівнянь з лінійними головними частинами // Математичні студії. – 2007. – Т. 27, № 2. – С. 149 – 162.

[15] Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. – М.: Наука, 1965. – 520 с.

[16] Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. – М.: Наука, 1988. – 336 с.

THE SOLUTION OF THE NONLINEAR FIRST BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR HEAT EQUATION IN GENERALIZED FUNCTIONS

O.Yu. Chmyr, O.V. Menshykova

Lviv State University of vital activity safety
35 Kleparivska Str., 79000, Lviv, Ukraine

Using the Schauder method the sufficient conditions of solvability of the nonlinear first generalized boundary value problem for heat equation in the space of functions with pointed specialities are obtained.

Keywords: nonlinear boundary value problem, generalized function, weight functional space, continuous operator, compact set, Schauder fixed-point theorem

2000 MSC: 2000: 35K55

УДК: 517.95