ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
*V **"Фізико-математичні науки"**
Вип.660 № 660, (2009) с. 34–38

JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY
"LVIVSKA POLITECHNIKA"
"Physical & mathematical sciences"
Vol.660 No 660, (2009) 34–38

СТРУКТУРА РОЗВ'ЯЗКІВ УЗАГАЛЬНЕНИХ СИСТЕМ З КУСКОВО-ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

О.О. Власій[a], М.Ф. Стасюк[b], Р.М. Тацій[b]

[a] *Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника*
вул. Шевченка, 57, 76025, Івано-Франківськ, Україна
[b] *Львівський державний університет безпеки життєдіяльності*
вул. Клепарівська, 35, 79058, м. Львів, Україна

(Отримано 22 червня 2009 р.)

Досліджено умови існування та єдиності розв'язку задачі Коші для узагальненої диференціальної системи першого порядку із кусково-змінними коефіцієнтами. Отримано конструктивне зображення розв'язку задачі Коші для неоднорідної узагальненої системи. Застосування одержаних результатів проілюстровано на прикладі.

Ключові слова: узагальнена система диференціальних рівнянь, фундаментальна матриця, інтеграл Рімана-Стільтьєса

2000 MSC: 34B05;34B27;34A37

УДК: 517.912

Вступ

Математичне моделювання дискретно-неперервних природних процесів приводить до проблеми розв'язування диференціальних рівнянь із узагальненими функціями в коефіцієнтах (напр., [1]), які із-за виникнення проблеми множення розривних і узагальнених функцій прийнято називати квазідиференціальними. Значний поштовх під час дослідження таких рівнянь дав розвиток теорії узагальнених функцій та розвиток концепції квазіпохідних, яку започаткував Д. Шин у 40-х роках минулого століття [2]. Практичний інтерес становлять такі класи квазідиференціальних рівнянь (КДР), розв'язок яких можна записати у явному вигляді. Узагальнена однорідна система першого порядку із кусково-сталими коефіцієнтами вивчалась в [3], де було одержано вигляд елементів відповідної фундаментальної матриці. У статті [4] введено класи вироджених та частково-вироджених (однорідних і неоднорідних) КДР та отримано зображення розв'язків, зокрема, задачі Коші та крайової задачі. Застосування таких КДР можна знайти, наприклад, в [4]–[6]. Оскільки дослідження КДР зводиться до дослідження відповідної узагальненої системи першого порядку [7], то доцільно розглянути властивості саме такої системи, що є предметом нашого дослідження. У цій роботі розглядається неоднорідна узагальнена система першого порядку, коефіцієнти і права частина якої містять, окрім дискретної компоненти – міри [8], ще й кусково-неперервну.

Позначення

I – відкритий інтервал дійсної осі $\mathbb{R}$; $[a;b] \subset I$ – відрізок дійсної осі; Θ_k – характеристична функція проміжку $[x_k;x_{k+1})$; $\delta_k(x) = \delta(x-x_k)$ – функція Дірака з носієм у точці $x = x_k$; $\mathbb{R}^{m\times m}$ – простір дійсних $m\times m$ матриць; $\mathbb{R}^m$ – простір m-вимірних дійсних векторів; E – одинична матриця порядку m; $C(I)$ – простір неперервних на I функцій; $BV^+_{loc}(I)$ – простір неперервних справа функцій локально обмеженої на I варіації; $C_m(I)$, $BV^+_{loc,m}(I)$ – простори матричних функцій $A: I \to \mathbb{R}^{m\times m}$, всі елементи яких належать відповідно просторам $C(I)$ та $BV^+_{loc}(I)$, відповідні простори вектор-функцій позначатимемо $\overline{C}_m(I)$, $\overline{BV}^+_{loc,m}(I)$.

I. Існування та єдиність розв'язку

Розглянемо неоднорідну узагальнену систему першого порядку вигляду

$$\overline{Y}'(x) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} A_k(x)\Theta_k + \sum_{k=1}^{n} C_k\delta_k(x)\right)\overline{Y}(x) + \\ + \sum_{k=0}^{n-1}\overline{R}_k(x)\Theta_k + \sum_{k=1}^{n}\overline{S}_k\delta_k(x), \quad (1)$$

де $\overline{Y}(x)$ – невідома m-вимірна вектор-функція; $a \equiv x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n \equiv b$; $A_k(x) \in C_m(I)$, $\overline{R}_k(x) \in \overline{C}_m(I)$, $k = 1,\ldots,n-1$; $C_k \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $\overline{S}_k \in \mathbb{R}^m$, $k = 1,\ldots,n$.

Систему (1) розглядатимемо разом із початковою умовою

$$\overline{Y}(x_0) = \overline{Y}_0. \quad (2)$$

Зауважимо, що рівність (1) розуміється в сенсі теорії узагальнених функцій [9]. Система (1) є системою вигляду

$$\overline{Y}'(x) = C'(x)\overline{Y}(x) + \overline{F}'(x), \quad (3)$$

де

$$C'(x) = \sum_{k=0}^{n-1} A_k(x)\Theta_k + \sum_{k=1}^{n} C_k\delta_k(x),$$

$$\overline{F}'(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \overline{R}_k(x)\Theta_k + \sum_{k=1}^{n} \overline{S}_k\delta_k(x).$$

Для того, щоб система (3) була коректною, необхідно і досить, щоб виконувалися умови коректності [9]:

$$\forall x_k \in I \quad [\Delta C(x_k)]^2 \equiv 0, \Delta C(x_k)\Delta\overline{F}(x_k) \equiv 0.$$

Очевидно, що $\Delta C(x_k) = C_k$, $\Delta\overline{F}(x_k) = \overline{S}_k$. Отже, для того, щоб система (1) була коректною, необхідно і досить, щоб виконувалися умови

$$C_k^2 \equiv 0, C_k\overline{S_k} \equiv 0, k = 1, \ldots, n. \qquad (4)$$

Зауваження 1. Надалі вважатимемо умови (4) виконаними.

Оскільки система (1) є частковим випадком системи вигляду (3) із коефіцієнтами з простору $BV^+_{loc}(I)$, то наступна теорема є наслідком результатів роботи [9].

Теорема 1. *Розв'язок задачі* (1)–(2) *існує і єдиний в класі* $\overline{BV}^+_{loc,m}(I)$, *причому стрибки цього розв'язку породжуються виняткова стрибками коефіцієнтів самої системи, а саме:*

$$\forall x_k \in I\, \Delta\overline{Y}(x_k) = C_k\overline{Y}(x_k - 0) + \overline{S}_k, k = 1, \ldots, n. \quad (5)$$

Означення 1. Систему

$$\overline{Y}'(x) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} A_k(x)\Theta_k\right)\overline{Y}(x),$$

відповідну системі (1), називатимемо *визначальною.*

Фундаментальну матрицю (матрицю Коші) визначальної системи на проміжку $[x_k; x_{k+1})$ (тобто системи $\overline{Y}'(x) = A_k(x)\overline{Y}(x)$), позначатимемо $\widetilde{B}_k(x, s)$ і вважатимемо її відомою для довільного $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Позначимо $\widetilde{C}_k = E + C_k$, $k = 1, \ldots, n$.

Означення 2. Для двох довільних точок $x_p, x_q \in I$ таких, що $x_p > x_q$, позначимо

$$B(x_p, x_q) = \prod_{i=0}^{p-q-1} \widetilde{C}_{p-i}\widetilde{B}_{p-i-1}(x_{p-i}, x_{p-i-1}). \qquad (6)$$

Покажемо, що при наведених вище припущеннях розв'язок задачі Коші (1)–(2) можна подати в замкненій формі.

II. Розв'язок неоднорідної системи

Теорема 1. *Розв'язок задачі* (1)–(2) *подається у вигляді*

$$\overline{Y}(x) = \sum_{k=0}^{n-1}\left\{\widetilde{B}_k(x, x_k)\left(B(x_k, x_0)\overline{Y}_0 + \sum_{j=0}^{k} B(x_k, x_j)\overline{Z}_j\right) + \int_{x_k}^{x} \widetilde{B}_k(x, s)\overline{R}_k(s)ds\right\}\Theta_k, \quad (7)$$

де для $j = 1, \ldots, n$

$$\overline{Z}_j = \widetilde{C}_j \int_{x_{j-1}}^{x_j} \widetilde{B}_{j-1}(x_j, s)\overline{R}_{j-1}(s)ds + \overline{S}_j, \qquad (8)$$

а $\overline{Z}_0 = 0$.

□ *Доведення.* На інтервалі $[x_k; x_{k+1})$ система (1)має вигляд

$$\overline{Y}'_k(x) = A_k(x)\overline{Y}_k(x) + \overline{R}_k(x), \qquad (9)$$

а фундаментальна матриця, відповідна цій системі – $\widetilde{B}_k(x, s)$. Розв'язок системи (9) можна записати у формі Коші [9]:

$$\overline{Y}_k(x) = \widetilde{B}_k(x, x_k)\overline{P}_k + \int_{x_k}^{x} \widetilde{B}_k(x, s)\overline{R}_k(s)ds, \qquad (10)$$

де $\overline{P}_k$ – деякий (невідомий) вектор з простору $\mathbb{R}^m$. Аналогічно на проміжку $[x_{k-1}; x_k)$ розв'язок системи (9) запишеться у вигляді

$$\overline{Y}_{k-1}(x) = \widetilde{B}_{k-1}(x, x_{k-1})\overline{P}_{k-1} + \int_{x_{k-1}}^{x} \widetilde{B}_{k-1}(x, s)\overline{R}_{k-1}(s)ds \quad (11)$$

з невідомим вектором $\overline{P}_{k-1}$. Як було зазначено вище, розв'язок задачі Коші (1)–(2) належить до класу $BV^+_{loc}(I)$ і в точці $x = x_k$ виконується умова спряження (5). Врахуємо, що $\overline{Y}(x_k)$ та $\overline{Y}(x_k - 0)$ обчислюються за формулами (10) і (11) відповідно, тоді після спрощення одержимо

$$\overline{P}_k = \widetilde{C}_k\widetilde{B}_{k-1}(x_k, x_{k-1})\overline{P}_{k-1} + \widetilde{C}_k \int_{x_{k-1}}^{x_k} \widetilde{B}_{k-1}(x_k, s)\overline{R}_{k-1}(s)ds + \overline{S}_k$$

або згідно з позначенням (8)

$$\overline{P}_k = \widetilde{C}_k\widetilde{B}_{k-1}(x_k, x_{k-1})\overline{P}_{k-1} + \overline{Z}_k, k > 1.$$

Приймаючи в рекурентному співвідношенні початкове значення $\overline{P}_0 = \overline{Y}_0$, методом математичної індукції отримуємо, що

$$\overline{P}_k = B(x_k, x_0)\overline{Y}_0 + \sum_{j=1}^{k} B(x_k, x_j)\overline{Z}_j.$$

Прийнявши $\overline{Z}_0 = 0$, враховуючи (10) і зображення $\overline{Y}(x) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \overline{Y}_k(x)\Theta_k$, одержимо (7).

Оскільки в точці $x = x_n$ згідно з (5) розв'язок системи має розрив, то формула (7) не охоплює значення розв'язку в цій точці. Враховуючи зображення (6) та формули (7), (8), одержимо

$$\overline{Y}(x_n)=B(x_n,x_0)\overline{Y}_0+\sum_{j=0}^{n}B(x_n,x_j)\overline{Z}_j.$$

■

Наслідок 1. Розв'язок відповідної (1)–(2) однорідної задачі (при $\overline{R}_k \equiv 0, k = 0, 1, \ldots, n-1, \overline{S}_k \equiv 0$, $k = 1, \ldots, n$) має вигляд

$$\overline{Y}^0(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \widetilde{B}_k(x, x_k)B(x_k, x_0)\overline{Y}_0\Theta_k.$$

Наслідок 2. Розв'язок задачі Коші (1)–(2) за нульової початкової умови ($\overline{Y}_0 = 0$) має вигляд

$$\overline{Y}^*(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \widetilde{B}_k(x, x_k) \sum_{j=1}^{k} B(x_k, x_j)\overline{Z}_j + \int_{x_k}^{x} \widetilde{B}_k(x, s)\overline{R}_k(s)ds \right\} \Theta_k. \quad (12)$$

Наслідок 3. Для розв'язку задачі Коші (1)–(2) справедливе зображення

$$\overline{Y}(x) = \overline{Y}^0(x) + \overline{Y}^*(x).$$

III. Застосування

Розглянемо на відрізку $[0; 1]$ квазідиференціальне рівняння

$$(fy')' + 16\Big(f + \frac{1}{3}\delta\Big(x - \frac{1}{4}\Big) + \frac{1}{4}\delta\Big(x - \frac{1}{2}\Big) + \frac{1}{4}\delta\Big(x - \frac{1}{2}\Big) + \frac{1}{2}\delta\Big(x - \frac{3}{4}\Big) + \frac{1}{6}\delta\Big(x - 1\Big)\Big)y = $$
$$= x\Theta_0 + 5\Theta_1 - \frac{3}{2}x^2\Theta_2 + \sin x\Theta_3 + \frac{1}{4}\delta\Big(x - \frac{1}{4}\Big) - \frac{2}{5}\delta\Big(x - \frac{1}{2}\Big) + \frac{1}{2}\delta\Big(x - \frac{3}{4}\Big) - \frac{1}{4}\delta\Big(x - \frac{1}{2}\Big), \quad (13)$$

де

$$f(x) = \begin{cases} 4, & x \in \big[0; \frac{1}{4}\big) \bigcup \big[\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\big) \\ 2, & x \in \big[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\big) \bigcup \big[\frac{3}{4}; 1\big] \end{cases}$$

$\Theta_0, \Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$ – характеристичні функції інтервалів $\big[0; \frac{1}{4}\big)$, $\big[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\big)$, $\big[\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\big)$ та $\big[\frac{3}{4}; 1\big)$ відповідно.

Для зручності позначимо $x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{4}, x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{3}{4}, x_4 = 1$.

Введемо квазіпохідну [7]

$$y^{[1]}(x) = fy' \quad (14)$$

Рівняння (13) розглядатимемо разом з крайовими умовами

$$y^{[1]}(0) = y^{[1]}(1) = 0. \quad (15)$$

За допомогою вектора $\overline{Y} = \big(y, y^{[1]}\big)^\top$ рівняння (13) зводимо до системи вигляду (1) з такими коефіцієнтами:

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{8}{3} & 0 \end{pmatrix}, C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{16}{3} & 0 \end{pmatrix},$$
$$C_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}, C_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{8}{3} & 0 \end{pmatrix},$$
$$\overline{R}_0(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}, \overline{R}_1(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix},$$
$$\overline{R}_2(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{3}{2}x^2 \end{pmatrix}, \overline{R}_3(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin x \end{pmatrix},$$
$$\overline{S}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \overline{S}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{2}{5} \end{pmatrix}, \overline{S}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \overline{S}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Для відповідної системи крайові умови (15) запишемо у вигляді

$$P\overline{Y}(0) = Q\overline{Y}(1),$$

де $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Визначальною в цьому випадку буде система

$$\begin{pmatrix} y \\ y^{[1]} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -16f & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y^{[1]} \end{pmatrix}.$$

З врахуванням вигляду квазіпохідної (14) та структури фундаментальної матриці [10] побудуємо матриці Коші $\widetilde{B}_k(x, s, p), k = 0, 1, 2, 3$. Безпосередньою перевіркою можна переконатися, що

$$\widetilde{B}_0(x, s) = \begin{pmatrix} \cos 4(x - s) & \frac{\sin 4(x-s)}{16} \\ -16 \sin 4(x - s) & \cos 4(x - s) \end{pmatrix},$$
$$\widetilde{B}_1(x, s) = \begin{pmatrix} \cos 4(x - s) & \frac{\sin 4(x-s)}{8} \\ -8 \sin 4(x - s) & \cos 4(x - s) \end{pmatrix}.$$

Зауважимо, що

$$\widetilde{B}_2(x, s) = \widetilde{B}_0(x, s), \widetilde{B}_3(x, s) = \widetilde{B}_1(x, s).$$

Знайдемо початковий вектор $\overline{Y}_0$ для задачі (13), (15) за формулами (див., наприклад [4]):

$$\overline{Y}(0) = [P - QB(1, 0)]^{-1}Q\overline{Y}^*(1).$$

Використовуючи формули (12), обчислимо $\overline{Y}^*(1)$ і одержимо

$$\overline{Y}_0 = \begin{pmatrix} \begin{gathered} \big(-15126 \sin 1 \cos 1 + 2400 \sin 1 \cos^3 1- \\ -1827 \sin 1 - 13986 \cos 1 - 1450 \cos^4 1- \\ -20772 \cos^2 1 + 31620 \cos^3 1 + 5758+ \\ +18410 \sin 1 \cos^2 1 + 320 \sin\big(\tfrac{7}{4}\big)- \\ -192 \sin\big(\tfrac{1}{4}\big) + 576 \cos\big(\tfrac{1}{4}\big) - 960 \cos\big(\tfrac{7}{4}\big)\big)\Big/ \\ \Big/\big(2560\big(240 \cos^4 1 + 145 \sin 1 \cos^3 1- \\ -225 \cos^2 1 - 86 \sin 1 \cos 1 + 30\big)\big) \end{gathered} \\ 0 \end{pmatrix}$$

На основі результатів теореми 1 знайдемо розв'язок задачі (13), (15). Через громіздкість точних формул для розв'язку наведемо його з точністю 10^{-5}. Зауважимо, що внаслідок властивості неперервності розв'язку квазідиференціального рівняння (13) можна було не виокремлювати його значення при $x = 1$.

$$y(x) = \begin{cases} 1.5626 \cdot 10^{-2}x - 3.9062 \cdot 10^{-3} \sin 4x + 6.2077 \cdot 10^{-2} \cos 4x, & x \in [0; \frac{1}{4}) \\ , -1.2211 \cdot 10^{-1} \cos(4x-1) - 9.2405 \cdot 10^{-2} \sin(4x-1) + 1.5625 \cdot 10^{-1}, & x \in [\frac{1}{4}; \frac{1}{2}), \\ -2.3438 \cdot 10^{-2}x^2 + 4.1253 \cdot 10^{-3} \sin(4x-2) + 1.5463 \cdot 10^{-2} \cos(4x-2) + 2.9297 \cdot 10^{-3}, & x \in [\frac{1}{2}; \frac{3}{4}), \\ 3.3333 \cdot 10^{-2} \sin x + 2.1793 \cdot 10^{-2} \sin(4x-3) + 1.5785 \cdot 10^{-3} \cos(4x-3) - & \\ +1.2500 \cdot 10^{-2} \sin(4x-3.75) - 2.0833 \cdot 10^{-2} \sin(4x-2.25), & x \in [\frac{3}{4}; 1), \\ 2.9830 \cdot 10^{-2}, & x = 1. \end{cases}$$

IV. Висновки

Конкретний вигляд коефіцієнтів узагальненої системи першого порядку вигляду (1) дає змогу дослідити властивості відповідної фундаментальної матриці та конструктивно побудувати розв'язки задачі Коші для такої системи. Узагальнені системи із кусково-змінними коефіцієнтами виникають під час дослідження явищ дискретно-неперервної природи (наприклад, побудова математичної моделі струни, яка містить зосереджені точкові маси [11]). Також такі системи становлять практичний інтерес у разі наближеного розв'язання узагальнених квазідиференціальних рівнянь [5]–[6].

Література

[1] Исследование сложных непрерывно-дискретных систем / Кухта К.Я и др. – К.: Наукова думка, 1981. – 335 с.

[2] Шин Д. О решениях линейного квазидифференциального уравнения n-го порядка // Матем. сборник. – 1940. – Т. 7 (49), № 3. – С. 479–532.

[3] Кісілевич В., Стасюк М., Тацій Р. Конструкція елементів фундаментальної матриці кввазідиференціальних рівнянь з узагальненими коефіцієнтами // Вісник Нац. ун-ту "Львівська політехніка": Фіз.-мат. науки. – Вип. № 518. – 2004. – С. 30–35.

[4] Тацій Р.М., Стасюк М.Ф., Власій О.О., Живічиньскі М. Частково вироджені та вироджені квазідиференціальні рівняння // Вісник Нац. ун-ту "Львівська політехніка": Фіз.-мат. науки. – 2007. – № 601. – С.18–27.

[5] Тацій Р. М., Власій О.О. Еквівалентна рекурентна формула для узагальненого квазідиференціального рівняння та її застосування // Доп. НАНУ. – 2007. – № 9 – С. 17–20.

[6] Тацій Р.М., Власій О.О. Еквівалентна рекурентна формула для узагальненого квазідиференціального рівняння 4-го порядку // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2006. – **49**, №4. – С. 49-55.

[7] Тацій Р.М. Дискретно-неперервні крайові задачі для диф.рівнянь з мірами: Автореф. дис... д-ра фіз.-мат. наук: 01.01.02./ Льв. держ. ун-т – Львів, 1994. – 34 с.

[8] Халанай А., Векслер Д. Качественная теория импульсных систем: Пер. с рум. – М.: Мир, 1971. – 312 с.

[9] Стасюк М., Тацій Р. Матричні інтегральні рівняння та диференціальні системи з мірами // Вісник Нац. ун-ту "Львівська політехніка": Фіз.-мат. науки. – Вип. № 566. – 2006. – С. 33–40.

[10] Тацій Р.М., Пахолок Б.Б. Про структуру фундаментальної матриці квазідиференціального рівняння // ДАН УРСР: Серія А. – 1989. – № 4. – С. 25–28.

[11] Аткинсон Ф. Дискретные и непрерывные граничные задачи: Пер. с англ. – М.: Мир, 1968. – 750 с.

STRUCTURE OF SOLUTIONS OF GENERALIZED SYSTEMS WITH PARTICULAR-VARIOUS COEFFICIENTS

O.O. Vlasij[a], M.F. Stasjuk[b], R.M. Tatsij[b]

[a] *Vasyl Stefanyk Precarpathian National University*
57 Shevchenko Str., 76025, Ivano-Frankivsk, Ukraine
[b] *Lviv State University of vital activity safety,*
35 Kleparivska Str., 79058, Lviv, Ukraine

The conditions of existence and uniqueness of solutions of Cauchy's problem for nonhomogeneous generalized differential system first order with particulary-various coefficients are researched. The representation of this solutions is obtained in constructed form. Illustrative example is given.

Keywords: generalized system of differential equations, fundamental matrix, integral Riemann-Stieltjes

2000 MSC: 34B05;34B27;34A37

УДК: 517.912