ISSN 2707-1898 (print)

Український журнал інформаційних технологій
Ukrainian Journal of Information Technology
http://science.lpnu.ua/uk/ujit
https://doi.org/10.23939/ujit2019.01.072
Article received 04.11.2019 р.
Article accepted 20.11.2019 р.
UDK 004.622:517.589

Correspondence author
I. M. Dronyuk
ivanna.m.droniuk@lpnu.ua

І. М. Дронюк, З. Я. Шпак, Б. А. Демида

Національний університет "Львівська політехніка", м. Львів, Україна

ДОСЛІДЖЕННЯ ЗМІНИ ЧАСОВОГО МАСШТАБУ ДЛЯ ОБЕРНЕНИХ ВЕТА-ФУНКЦІЙ

Застосування Ateb-функцій визначається тими сферами, де використовуються звичайні тригонометричні функції. Сучасні досягнення фізики зумовили розвиток тих областей математики, де необхідне використання відносності або змінності часу. У вступі охарактеризовано сучасний стан досліджень у цій області. Коротко описано основні результати науковців, що досліджували звичайні Ateb-функції. Для врахування змінності (стиск або розтяг), як властивості часового параметра на підставі використання q-аналізу побудовано q-аналоги Ateb-синуса (q-Ateb-синус) і Ateb-косинуса (q-Ateb-косинус) способом обернення неповної q-Beta-функції. Зміна параметра q відповідає зміні часового масштабу у проведених дослідженнях. Також введено q-аналоги Ateb-тангенса (q-Ateb-тангенс), Ateb-котангенса (q-Ateb-котангенс), q-аналоги Ateb-секанса (q-Ateb-секанс) і Ateb-косеканс (q-Ateb-косеканс). Доведено теореми, що характеризують основні властивості побудованих функцій. Зокрема, показано, що при прямуванні параметра q до одиниці у границі отримаємо звичайні Ateb-функції. Введеним функціям притаманна періодичність з періодом, що відповідає q-аналогу відповідних періодів звичайних Ateb-функцій. Побудовано подання періоду через q-аналог Гамма-функції. Доведено узагальнену піфагорову тотожність для q-аналогів тригонометричних Ateb-функцій. Розглянуто та доведено властивості парності та непарності q-аналога Ateb-функцій. Побудовано формули для обчислення q-похідних для q-аналога тригонометричних Ateb-функцій. Доведено, що побудовані функції задовольняють q-аналог системи звичайних диференціальних рівнянь. Знайдено проміжки зростання та спадання для усіх розглянутих функцій. Побудовані q-аналоги формул зведення для q-аналога тригонометричних Ateb-функцій. У висновках вказано, що проведені дослідження можуть бути використані у теорії часових рядів та обробці сигналів.

Ключові слова: Ateb-функції; q-Ateb-функції; q-аналіз; зміна часового масштабу.

Вступ

Згідно з теорією відносності Ейнштейна час є відносною величиною. Для врахування змінності часу математики запропонували q-аналіз, де зміна параметра q відповідає зміні часового масштабу. У 60-х роках XX ст. запроваджено нові функції як інверсію неповної бета-функції [14], що отримали назву Ateb-функції (слово "Ateb" – це зворотне прочитання слова "Beta"), і позначення ca(m, n,ω) та sa(n, m,ω). Доведено, що ці функції є узагальненням звичайних тригонометричних функцій. Незабаром з'явилася робота українського математика П. Сеника [15], в якій розроблено теорію Ateb-функцій. Ця теорія отримала подальший розвиток у роботах сербських математиків [4], а асимптотичні наближення застосовуються для дослідження різних коливальних систем [1], [2]. Застосування Ateb-функцій для захисту даних подано в роботах [7], [13].

Ateb-функції можна розширити на всі області, де існують звичайні тригонометричні функції. Ateb-перетворення формується як особливий тип перетворення Фур'є. За допомогою теорії узагальнених операторів зсуву [5] створено алгебру функціонального простору Гільберта. Ця алгебра містить операції "додавання" та "множення". Операція додавання визначається як звичайне додавання функцій (правильність визначення безпосередньо випливає з адитивності цієї операції), а множення визначається як згортка функцій. Оскільки періодичні Ateb-функції є ортонормальними, можна побудувати розширення в узагальненому ряду Фур'є та створити для них узагальнений гармонічний аналіз за аналогією з [6]. Основна ідея цієї роботи з'явилася після того, як автори прочитали про q-аналог Beta-функції. Це узагальнило q-аналіз інверсії неповних Beta-функцій, зокрема Ateb-функцій, та дало змогу розширити й поглибити дослідження у напрямку обчислень часового масштабування [3].

Викладення основного матеріалу

Дефініція q-Ateb-функцій. Подамо спочатку основні означення з q-аналізу, які будуть потрібні для наступних тверджень і конструкцій.

Вище вже йшлося про q-аналіз [11], де q-похідна визначають за формулою

$$D_q f(x) = \frac{f(qx) - f(x)}{qx - x}. \tag{1}$$

У роботі [8] q-аналог дійсного числа n, який також називають q-дужкою або q-числом числа n, можна задати такою формулою:

$$[n]_q = \frac{q^n - 1}{q - 1}. \tag{2}$$

У роботі [12] q-аналог визначеного інтеграла на замкнутому інтервалі [0; a] визначають такою формулою

$$\int_0^a f(x) d_q x = (1-q) a \sum_{i=0}^{\infty} q^i f(q^i a). \tag{3}$$

За аналогією зі звичайною Gamma-функцією, q-Gamma-функція будується за співвідношенням

$$\Gamma_q(t) = \int_0^{[\infty]} x^{t-1} E_q^{-qx} d_q x, \tag{4}$$

де: $E_q^z = \prod_{i=0}^{\infty} (1 + (1-q) q^i z)$; q – експонента.

Неповну q-Beta-функція представляється формулою

$$B_q(t,s,\omega)=\int\limits_0^{\omega} x^{t-1}(1-qx)_q^{s-1}d_q x.$$

На підставі класичних Ateb-функцій можемо отримати аналітичні розв'язки системи диференціальних рівнянь:

$$\dot{x}+\alpha y^p=0;\quad \dot{y}+\beta x^s=0$$

де α і β константи дійсного типу, а параметри p та s визначаються за співвідношеннями (5):

$$p=\frac{2\vartheta+1}{2\phi+1},\quad s=\frac{2\varsigma+1}{2\xi+1},\ (\vartheta,\phi,\varsigma,\xi=0,1,2,...). \tag{5}$$

Нехай значення n та m задовольняють нерівності:

$$n=\frac{1}{p+1}>0,\quad m=\frac{1}{s+1}>0. \tag{6}$$

Тоді ми можемо ввести співвідношення

$$\omega=\frac{n+1}{2}\int\limits_0^{-1\le v\le 1}(1-\bar{v}^{n+1})_q^{-\frac{m}{m+1}}d_q\bar{v}\ .$$

Якщо розглянути зворотну залежність v від ω, то у разі, якщо умови (5) та (6) задовольняються, отримаємо q-аналог Ateb-синуса, який позначимо як

$$v=\mathrm{sa}_q(n,m,\omega) \tag{7}$$

Якщо ввести співвідношення

$$\omega=-\frac{m+1}{2}\int\limits_1^{-1\le u\le 1}(1-\bar{u}^{m+1})_q^{-\frac{n}{n+1}}d_q\bar{u},$$

де задовольняються умови (5) та (6), то можна побудувати обернену залежність u від ω, яку називають q-аналогом Ateb-косинуса і позначають

$$u=\mathrm{ca}_q(m,n,\omega). \tag{8}$$

Додатково введемо визначення q-аналога функцій Ateb-тангенс, Ateb-котангенс, Ateb-секанс та Ateb-косеканс:

$$\mathrm{ta}_q(n,m,\omega)=\mathrm{sa}_q(n,m,\omega)\ /\ \mathrm{ca}_q(n,m,\omega); \tag{9}$$

$$\mathrm{cta}_q(n,m,\omega)=\mathrm{ca}_q(n,m,\omega)\ /\ \mathrm{sa}_q(m,n,\omega); \tag{10}$$

$$\mathrm{se}_q(m,n,\omega)=1\ /\ \mathrm{ca}_q(m,n,\omega); \tag{11}$$

$$\mathrm{ce}_q(m,n,\omega)=1\ /\ \mathrm{sa}_q(m,n,\omega)\ . \tag{12}$$

Очевидно, що у випадку, коли $m = 1$ та $n = 1$ у виразах (7)-(12), то обчислюючи границю при $q \to 1$, ми отримуємо звичайні тригонометричні функції.

Наступні властивості q-аналога тригонометричних Ateb-функцій випливають безпосередньо з їх визначень:

$$\mathrm{sa}_q(m,n,0)=0;\quad \mathrm{ca}_q(m,n,0)=1.$$

Властивості q-Ateb-функцій. Відомо, що в q-аналізі існують два типи тригонометричних функцій, що отримали позначення згідно з [11]: $\sin_q x$, $\cos_q x$, $\mathrm{Sin}_q x$ та $\mathrm{Cos}_q x$. Властивості цих функцій описані в роботах [11], [8], [10], апроксимація у роботах [2], [1], [16]. Очевидно, що функції q-Ateb задовольнятимуть такі основні тотожності:

$$\mathrm{sa}_q(1,1,\omega)=\sin_q(\omega);\quad \mathrm{ca}_q(1,1,\omega)=\cos_q(\omega).$$

Перша властивість функцій, визначених у виразах (7) і (8), може бути сформульована в такій теоремі.

Теорема 1. q-аналоги функцій Ateb-синуса та Ateb-косинуса (де n і m задовольняють умови (5) і (6)) є дійсною функцією для всіх $\omega\in \mathrm{R}$.

Функції задовольняють нерівності:

$$-1\le \mathrm{sa}_q(n,m,\omega)\le 1;\quad -1\le \mathrm{ca}_q(m,n,\omega)\le 1 \tag{13}$$

для всіх $\omega\in \mathrm{R}$. Доведення теореми випливає безпосередньо з визначення q-аналога тригонометричних Ateb-функцій.

Наступна теорема підтверджує періодичність цих функцій.

Теорема 2. Функції q-аналогів Ateb-синуса та Ateb-косинуса є $2\Pi_q(m,\ n)$ періодичними функціями, де

$$\Pi_q(m,n)=\frac{\Gamma_q\left(1/(n+1)\right)\Gamma_q\left(1/(m+1)\right)}{\Gamma_q\left(1/(n+1)+1/(m+1)\right)}\ , \tag{14}$$

а функція $\Gamma_q(\bullet)$ визначається співвідношенням (4).

Доведення теореми випливає безпосередньо з властивості адитивності інтегрування на відрізках.

Теорема 3. Функції q-аналогів Ateb-секанса і Ateb-косеканса є $2\Pi_q(m,\ n)$ періодичними функціями, де $\Pi_q(m,\ n)$ задається формулою (14).

Доведення теореми випливає безпосередньо з теореми 2 та формул (11) і (12).

Теорема 4. Функції q-аналогів Ateb-тангенса і Ateb-котангенса є $2\Pi_q(m,\ n)$ періодичними функціями, де $\Pi_q(m,\ n)$ визначається за (14).

Доведення теореми випливає безпосередньо з теореми 2 та формул (9) і (10). Тепер ми введемо піфагорову тотожність для q-аналога тригонометричних Ateb-функцій.

З формул (7) та (8) випливає, що ці функції задовольняють тотожність, яка узагальнює основну тотожність для звичайних функцій Ateb-функцій: $\mathrm{ca}_q^{n+1}(n,m,\omega)+\mathrm{sa}^{m+1}{}_q(m,n,\omega)=1.$ Результат поданий такою теоремою.

Теорема 5. q-аналог тригонометричних Ateb-функцій задовольняє тотожність

$$\mathrm{sa}_q^{n+1}(n,m,\omega)+\mathrm{ca}^{m+1}{}_q(m,n,\omega)=[1]_q.$$

Доведення теореми випливає безпосередньо з визначень q-аналога тригонометричних Ateb-функцій та з відповідної тотожності для Ateb-функцій.

Наступна теорема дає формули q-похідної для q-аналога тригонометричних Ateb-функцій.

Теорема 6. q-похідні для q-аналога тригонометричних Ateb-функцій визначаються формулами (15) та (16):

$$D_q\mathrm{ca}_q(m,n,\omega)=\frac{-2}{m+1}\mathrm{sa}_q^n(n,m,\omega); \tag{15}$$

$$D_q\mathrm{sa}_q(n,m,\omega)=\frac{2}{n+1}\mathrm{ca}_q^n(m,n,\omega). \tag{16}$$

Доведення теореми випливає безпосередньо з визначень q-аналога тригонометричних Ateb-функцій способом знаходження q-похідної D_q з виразів (7) та (8).

У наступній теоремі розглянемо властивості парності та непарності q-аналога Ateb-функцій.

Теорема 7. q-аналоги Ateb-синуса, Ateb-тангенса та Ateb-секанса є непарними функціями від аргумента ω:

$$\mathrm{sa}_q(n,m,-\omega)=-\mathrm{sa}_q(n,m,\omega); \tag{17}$$

$$\mathrm{ta}_q(n,m,-\omega)=-\mathrm{ta}_q(n,m,\omega); \tag{18}$$

$$\mathrm{se}_q(n,m,-\omega)=-\mathrm{se}_q(n,m,\omega), \tag{19}$$

де m та n задовольняють умови (5) і (6).

Доведення теореми випливає безпосередньо з визначень q-аналога тригонометричних Ateb-функцій та властивостей обернення границь інтегрування.

Теорема 8. q-аналоги Ateb-косинуса, Ateb-котангенса та Ateb-косеканса є парними функціями від аргумента ω:

$$\mathrm{ca}_q(m,n,-\omega)=\mathrm{ca}_q(m,n,\omega); \quad (20)$$

$$\mathrm{cta}_q(m,n,-\omega)=\mathrm{cta}_q(m,n,\omega); \quad (21)$$

$$\mathrm{ce}_q(m,n,-\omega)=\mathrm{ce}_q(m,n,\omega). \quad (22)$$

де m та n задовольняють умови (5) і (6).

Доведення збігається із доведенням теореми 7.

Дві наступні теореми описують властивості функцій q-аналога Ateb-тангенса, Ateb-котангенса, Ateb-секанса і Ateb-косеканса.

Теорема 9. q-аналоги функцій Ateb-тангенса та Ateb-косеканса є дійсними функціями для всіх $\omega\in R\setminus\{\Pi_q(m,n),\, k\in Z\}$, де параметри n та m задовольняють умови (5) і (6). Окрім цього, ці функції є зростаючими на інтервалах $\left(k\Pi_q(m,n);\,(k+1)\Pi_q(m,n)\right)$. Отже, справедливі нерівності:

$$\omega_1\le\omega_2\Rightarrow\ \mathrm{ta}_q(m,n,\omega_1)\le\mathrm{ta}_q(m,n,\omega_2)\ ;$$

$$\omega_1\le\omega_2\Rightarrow\ \mathrm{csa}_q(m,n,\omega_1)\le\mathrm{csa}_q(m,n,\omega_2)\ ,$$

які задовольняються для всіх

$$\omega_1,\,\omega_2\in\ \left(k\Pi_q(m,n);\,(k+1)\Pi_q(m,n)\right).$$

Доведення теореми випливає безпосередньо з відповідних властивостей Ateb-тангенса та Ateb-косеканса і формул (9) і (11).

Теорема 10. q-аналоги функцій Ateb-котангенса та Ateb-секанса є дійсними функціями для всіх $\omega\in R\setminus\left\{\Pi_q(m,n)/2,\,k\in Z\right\}$, де параметри m та n задовольняють умови (5) і (6). Окрім цього, ці функції є спадними на інтервалах $\left(0{,}5k\Pi_q(m,n);\,0{,}5(k+1)\Pi_q(m,n)\right)$. Отже, нерівності:

$$\omega_1\le\omega_2\Rightarrow\ \mathrm{cta}_q(m,n,\omega_1)\ge\mathrm{cta}_q(m,n,\omega_2)\ ;$$

$$\omega_1\le\omega_2\Rightarrow\ \mathrm{se}_q(m,n,\omega_1)\ge\mathrm{se}_q(m,n,\omega_2)$$

задовольняються для всіх

$$\omega_1,\,\omega_2\in\ \left(0{,}5k\Pi_q(m,n);\,0{,}5(k+1)\Pi_q(m,n)\right).$$

Доведення теореми випливає безпосередньо з відповідних властивостей Ateb-котангенса та Ateb-секанса і формул (10) та (12).

Наступна теорема описує q-аналог диференціальних рівнянь, які задовольняють q-Ateb-функції.

Теорема 11. Функції $\mathrm{ca}_q(m,n,\omega),\,\mathrm{sa}_q(m,n,\omega)$ задовольняють систему q-похідних диференціальних рівнянь:

$$D_q\,\mathrm{ca}_q(m,n,\omega)+\alpha\,\mathrm{sa}_q^n(m,n,\omega)=0\ ; \quad (23)$$

$$D_q\,\mathrm{sa}_q(m,n,\omega)-\beta\,\mathrm{ca}_q^n(m,n,\omega)=0\ . \quad (24)$$

Доведення теореми ґрунтується на підстановці співвідношень (15) і (16) у (23) і (24) відповідно.

Остання теорема стосується взаємозв'язку між періодичними q-аналогами тригонометричних Ateb-функцій.

Теорема 12. q-аналоги тригонометричних Ateb-функцій задовольняють вказані нижче рівності:

$$\mathrm{ca}_q(m,n,\omega)=\mathrm{sa}_q(m,n,\tfrac{1}{2}\Pi_q(m,n)+\omega)\ ;$$

$$\mathrm{sa}_q(m,n,\omega)=-\mathrm{ca}_q(m,n,\tfrac{1}{2}\Pi_q(m,n)+\omega)\ ;$$

$$\mathrm{ca}_q(m,n,\omega)=-\mathrm{sa}_q(m,n,\tfrac{3}{2}\Pi_q(m,n)\pm\omega)\ ;$$

$$\mathrm{sa}_q(m,n,\omega)=\pm\mathrm{ca}_q(m,n,\tfrac{3}{2}\Pi_q(m,n)+\omega)\ ;$$

$$\mathrm{cta}_q(m,n,\omega)=\mp\mathrm{ta}_q(m,n,\tfrac{1}{2}\Pi_q(m,n)\pm\omega)\ ;$$

$$\mathrm{ta}_q(m,n,\omega)=\mp\mathrm{cta}_q(m,n,\tfrac{1}{2}\Pi_q(m,n)\pm\omega)\ ;$$

$$\mathrm{cs}_q(m,n,\omega)=-\mathrm{se}_q(m,n,\tfrac{1}{2}\Pi_q(m,n)+\omega)\ ;$$

$$\mathrm{se}_q(m,n,\omega)=-\mathrm{cs}_q(m,n,\tfrac{1}{2}\Pi_q(m,n)\pm\omega)\ ;$$

$$\mathrm{cs}_q(m,n,\omega)=\pm\mathrm{se}_q(m,n,\tfrac{3}{2}\Pi_q(m,n)\pm\omega)\ ;$$

$$\mathrm{se}_q(m,n,\omega)=\mathrm{cs}_q(m,n,\tfrac{3}{2}\Pi_q(m,n)\pm\omega)\ .$$

Доведення теореми 12 випливає безпосередньо з відповідних властивостей Ateb-функцій і формул (7)-(12) та (14). Ми довели найважливіші та найкорисніші властивості побудованих функцій. Усі наведені властивості пов'язані з відповідними властивостям звичайних Ateb-функцій. Буде цікаво знайти певні специфічні властивості q-аналогів Ateb-функцій, що може бути наступним кроком нашого дослідження.

Висновки

З урахуванням перспективності сучасних досліджень проблеми обчислень часового масштабування запропоновано ввести нові q-аналоги тригонометричних Ateb-функцій. Узагальнено всі типи звичайних тригонометричних функцій. У роботі розглянуто та доведено основні властивості розроблених функцій. Перший цікавий результат проведеного дослідження полягає в тому, що побудовані функції задовольняють q-аналог системи звичайних диференціальних рівнянь, яку задовольняють звичайні Ateb-функції. Доведення здійснюється за допомогою q-диференціювання. Другим важливим результатом є доведення тригонометричної тотожності Піфагора для q-Ateb-функцій.

Ми сподіваємось продовжити розпочаті дослідження та побудувати q-аналог Ateb-перетворень [6] як узагальнення перетворення Фур'є, а також довести деякі нові властивості розглянутих функцій. Ще один можливий напрям досліджень – розробити алгебру на підставі q-Ateb-перетворень.

Важливість та практичне значення отриманих результатів ґрунтується на можливостях використання результатів математичного апарату q-аналізу для розв'язання задач часового масштабування. Застосування розробленого підходу до аналізу часових рядів та теорії сигналів дає змогу врахувати стиск та розтяг часових параметрів, що є важливим для новітніх досліджень цього напряму.

References

[1] Andrianov, I. V., Awrejcewicz, J., & Danishevskyy, V. V. (2018). *Asymptotical Mechanics of Composites. Modelling Composites without FEM*. New York, Berlin Heidelberg: Springer, 329 p.

[2] Andrianov, I. V., Awrejcewicz, J., & Manevitch, L. I. (2004). *Asymptotical Mechanics of Thin-Walled Structures: A Handbook*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 535 p.

[3] Cieśliński, J. L. (2009). New definitions of exponential, hyperbolic and trigonometric functions on time scales, preprint arXiv:1003.0697 [math. CA].

[4] Cvetićanin, L. (2015). Dynamics of Bodies with Time-Variable Mass, *Mathematical and Analytical Techniques with Applications to Engineering*. Springer, Cham.

[5] Dragan, Ya., & Dronyuk, I. (2017). System Analysis and Grounding for the Data Processing Means and Technologies

based on Optimization of the Computer Network work based on Ateb-functions. *Proceedings of the 12-th International Scientific and Technical Conference*, (CSIT 2017), 05–08 September, Lviv, Ukraine, (pp. 272–275).
[6] Dronyuk, Ivanna. (2017b). Ateb-transforms and generalized shift operator. In Proc. *The International Conference in Functional Analysis dedicated to the 125-th anniversary of Stefan Banach*. 18-23.09.2017, Lviv, Ukraine, 39–42.
[7] Dronyuk, I. M. (2017a). *Technologies for information protection on tangible media*: Lviv Polytechnic Publishing House, Lviv. [In Ukrainian].
[8] Gosper, R. W. (2001). Experiments and Discoveries in q-Trigonometry. In Symbolic Computation, Number Theory, Special Functions, Physics and Combinatorics. *Proceedings of the Conference Held at the University of Florida*, Gainesville, FL, November 11–13, 1999 (Ed. F. G. Garvan & M. E. H. Ismail). Dordrecht, Netherlands: Kluwer, (pp. 79–105).
[9] Gryciuk, Yu. I., Dragan, Ya. P. (2016). Numerical integration of table functions to one variable using Taylor polynomial. *Scientific Bulletin of UNFU*, *26*(3), 350–360. https://doi.org/10.15421/40260358.
[10] Jan, L. (2011). Cieśliński Improved q-exponential and q-trigonometric functions. *Applied Mathematics Letters* 24, 2110–2114.
[11] Kac, V., & Cheung, P. (2002). *Quantum Calculus*. New York: Springer, 320 p.
[12] Koekoek, R., & Swarttouw, R. F. (1998). *The Askey-Scheme of Hypergeometric Orthogonal Polynomials and its q-Analogue.* Delft, Netherlands: TU Delft, Faculty of Technical Mathematics and Informatics. Report 98–17, (pp. 18–19).
[13] Nazarkevych, M. A. (2011). Methods of increasing the efficiency of printing protection by means of Ateb functions. Lviv Polytechnic Publishing House, Lviv. [In Ukrainian].
[14] Rosenberg, R. (1963). The Ateb(h)-functions and their properties. *Quart. Appt. Math*., 11, 37–47.
[15] Senyk, P. M. (1968). About Ateb-function. *Dopovidi AN URSR, ser. A*., 1, 23–27. [In Ukrainian].
[16] Veselovska, O., Drohomyretska, Kh., & Kolyasa, L. (2017). Criterion of the continuation of harmonic functions in the ball of n-dimensional space and representation of the generalized orders of the entire harmonic functions in n in terms of approximation error. *Eastern-European Journal of Enterprises Technologies*, *4*(88), 1–10. https://doi.org/10.15587/1729-4061.2017.108387

I. M. Dronyuk, Z. Ya. Shpak, B. A. Demyda

Lviv Polytechnic National University, Lviv, Ukraine

INVESTIGATION OF TIME SCALING FOR THE INVERTED BETA FUNCTIONS

The use of Ateb-functions is determined by those areas where ordinary trigonometric functions are used. Modern advances in physics have led to the development of new mathematical areas that require the relativity or variability of time. The current researches in this field and main results of studies of the ordinary Ateb functions are briefly described. To take into account compression/slow-down as a property of time parameter, the q-analogs of Ateb-sine (q-Ateb-sine) and Ateb-cosine (q-Ateb-cosine) are constructed by inverting the incomplete q-Beta functions. The change in parameter q corresponds to the time scaling in the studies. q-analogs of Ateb-tangent (q-Ateb-tangent), Ateb-cotangent (q-Ateb-cotangent), Ateb-secant (q-Ateb-secant) and Ateb-cosecant (q-Ateb-cosecant) are introduced. Theorems characterizing the basic properties of the constructed functions are proved. In particular, it is shown that when q→1, taking the limit we obtain ordinary Ateb-functions. The introduced functions are periodic with the period corresponding to q-analogue periods of the ordinary Ateb-functions. The representation of the period using the q-analogue of the Gamma-function is constructed. The generalized Pythagorean identity for the q-analogues of trigonometric Ateb-functions is proved. Also the properties of the parity and oddity of these functions are considered and proved. The intervals of increasing/decreasing for all functions are found. The q-analogues of the identities formulas for the trigonometric Ateb-functions are presented. Formulas for calculating q-derivatives for the q-analogue of trigonometric Ateb-functions are constructed. It is proved that constructed functions satisfy the system of q-derivative differential equations. Results of the presented studies can be used in the time series theory and signal processing.

***Keywords*:** Ateb-functions; q-Ateb-functions; q-Analysis; time-scaling.

Інформація про авторів:

Дронюк Іванна Мирославівна, канд. фіз.-мат. наук, доцент, кафедра автоматизованих систем управління.
E-mail: ivanna.m.droniuk@lpnu.ua; https://orcid.org/0000-0003-1667-2584, https://publons.com/researcher/R-3495-2017

Шпак Зореслава Ярославівна, канд. техн. наук, доцент, кафедра автоматизованих систем управління.
E-mail: zshpak@ukr.net; https://publons.com/researcher/S-1405-2017

Демида Богдан Адамович, канд. техн. наук, доцент, кафедра автоматизованих систем управління.
E-mail: bogdem.lviv@gmail.com; https://orcid.org/0000-0001-6664-4624, https://publons.com/researcher/S-1405-2017

Цитування за ДСТУ: Дронюк І. М., Шпак З. Я., Демида Б. А. Дослідження зміни часового масштабу для обернених Beta-функцій. *Український журнал інформаційних технологій.* 2019, т. 1, № 1. С. 72–75.

Citation APA: Dronyuk, I. M., Shpak, Z. Ya., & Demyda, B. A. (2019). Investigation of time scaling for the inverted Beta functions. *Ukrainian Journal of Information Technology, 1*(1), 72–75. https://doi.org/10.23939/ujit2019.01.072