ОПРАЦЮВАННЯ ТА ПЕРЕТВОРЕННЯ ВИМІРЮВАЛЬНИХ СИГНАЛІВ

УДК 621.317

ЗАСТОСУВАННЯ ПОВОРОТУ КООРДИНАТ ДЛЯ ПОБУДОВИ НЕЛІНІЙНОЇ РЕГРЕСІЇ З УРАХУВАННЯМ НЕПЕВНОСТІ ОБОХ ВЕЛИЧИН

Національний університет “Львівська політехніка”,
кафедра інформаційно-вимірювальних технологій, вул. С. Бандери, 12, Львів, Україна
dorozhovets@polynet.lviv.ua
Ряшівська політехніка, вул. В.Поля, 2В, 35-959, Ряшів, Польща
michdor@prz.rzeszow.pl

Запропоновано і проаналізовано новий метод побудови нелінійної регресії, оснований на повороті координат. У запропонованому методі враховуються непевності обох (вхідної та вихідної) величин. Тангенс кута повороту координат дорівнює відношенню стандартної непевності вхідної до стандартної непевності вихідної величини. Параметри регресії визначають у три етапи: 1 – поворот експериментальних даних на встановлений кут; 2 – застосування методу найменших квадратів до розрахунку параметрів регресії; 3 – визначення параметрів регресії для первинної системи координат зворотним поворотом координат.

Предложено и исследовано новый метод построения нелинейной регрессии, основанный на вращении координат. В предложенном методе учитываются неопределенности обоих (входной и выходной) величин. Тангенс угла вращения координат равняется отношению стандартной неопределенности входной к стандартной неопределенности выходной величины. Параметры регрессии определяют в три этапа: 1 – вращение экспериментальных данных на определенный угол; 2 – использование метода наименьших квадратов для расчета параметров регрессии; 3 – определение параметров регрессии для первичной системы координат путем обратного вращения координат.

In the paper the new method of constructing the nonlinear regression based on rotation of coordinates is proposed and analyzed. In proposed method the uncertainties of both (input and output) quantities are considered. The tangent of rotation angle is equal to the ratio of input to output value uncertainties. Parameters of this regression are determined after three steps: 1 – rotation experimental points on the determined angle; 2 – using the least squares method to the calculation of regression parameters; 3 – determination regression described in original coordinates using inverse rotation.

1. Вступ. У вимірювальній практиці для визначення параметрів залежності між двома величинами – вихідною (y) і вхідною (x), зокрема функції перетворення $y=f(x)$ вимірювальних перетворювачів, приладів, вимірювальних каналів тощо, звичайно використовують регресійний метод [1–8]. Визначення параметрів шуканої криволінійної залежності ґрунтується на результатах вимірювань величин, які характеризуються непевністю $u(y)$ вихідної величини і $u(x)$ вихідної величини. У наступних дослідженнях розглядаються монотонні та однозначні залежності $y=f(x)$, які найпоширеніші у метрологічній практиці. Крім того, стандартна непевність результатів вимірювань кожного із значень величин приймається сталою: $u(y)=const$ та $u(x)=const$.

Подібно, як у разі прямолінійної регресії [6–8], у нелінійній також можливі три випадки.

1. Істотною є лише непевність $u(y)$ результатів вимірювань вихідної величини, а непевністю $u(x)$ результатів вихідної величини можна знехтувати ($u(x)\approx 0$). Це так звана звичайна чи пряма регресія $y(x)$, її параметри визначають мінімізуванням суми квад-

ратів $v_{y,i}^2$ $\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} v_{y,i}^2 \Rightarrow MIN\right)$ відхилень експериментальних точок $(x_i\,;\,y_i)$ від шуканої кривої вздовж вертикальної осі *0y* (рис. 1, а).

2. Істотною є лише непевність *u(x)* результатів вимірювань вхідної величини, а непевністю *u(y)* результатів вхідної величини можна знехтувати (*u(y)*≈0). Це обернена регресія *x(y)*, її параметри визначають, мінімізуючи суму квадратів $v_{x,i}^2$ $\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} v_{x,i}^2 \Rightarrow MIN\right)$ відхилень експериментальних точок $(x_i\,;\,y_i)$ від шуканої кривої вздовж горизонтальної осі *0x* (рис.1, б).

3. Істотними є обидві непевності *u(y)* та *u(x)* результатів вимірювань обох величин. Це так звана узагальнена регресія, частковим випадком якої є ортогональна регресія $y_{ort}(x)$, параметри якої визначають мінімізуванням суми квадратів відхилень $v_{ort,i}^2$ $\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} v_{ort,i}^2 \Rightarrow MIN\right)$ експериментальних точок $(x_i\,;\,y_i)$ від шуканої кривої вздовж перпендикулярів до шуканої кривої (рис. 1, в).

Недоліком ортогональної регресії є те, що у ній не враховуються фактичні значення непевності *u(y)* і *u(x)* обох величин у кожній експериментальній точці. У цій регресії вплив непевності залежить від значень похідних шуканої кривої в околі кожної точки. Крім того, у цій регресії при нульовому значенні непевності однієї з величин, наприклад, *u(x)*=0, знайдена крива $y_{ort}(x)$ трансформується у криву *y(x)*, знайдену за методом прямої регресії (згідно з означенням 1), як це слід було очікувати. Подібно у разі *u(y)*=0, для якого ортогональна регресія мала би трансформуватися у обернену *x(y)*.

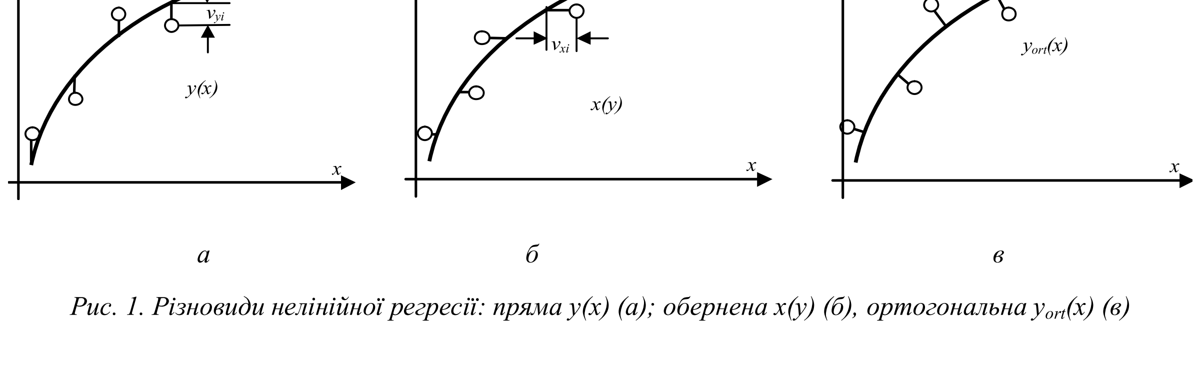
Крім того, існують проблеми у реалізації самої процедури мінімізування ортогональних відхилень $v_{ort,i}^2$, оскільки в околі різних точок напрямок перпендикулярів до шуканої кривої (з невідомими параметрами) є різним (рис. 1, в) і заздалегідь невідомий. Тому нелінійна ортогональна регресія, на відміну від прямолінійної ортогональної регресії [6–8], не має аналітичного розв'язку і для побудови відповідної кривої застосовують достатньо складні числові методи.

Метою подальших досліджень є розроблення методу знаходження параметрів криволінійної регресії з належним урахуванням значень непевності обох величин.

2. Узагальнена криволінійна регресія. Подібно, як і у разі прямолінійної регресії [6–8], належне врахування непевності обох величин на параметри криволінійної регресії може бути здійснене завдяки правильному вибору напрямку мінімізування суми квадратів відхилень експериментальних точок $(x_i\,;\,y_i)$ від шуканої кривої, значення якого залежить лише від значень непевності обох величин *u(x)* та *u(y)*. Цей напрямок збігається із прямими, які є діагоналями прямокутника, побудованого на непевностях $\pm u(x)$ та $\pm u(y)$ (рис. 2) [6–8].

Значення кута φ напрямку визначення відхилень експериментальних точок від шуканої кривої (рис. 2, б) в узагальненій нелінійній регресії може бути описане залежністю:

$$tg\varphi = \pm\frac{u(x)}{u(y)} = s_f\lambda\,. \qquad (1)$$



а *б* *в*

Рис. 1. Різновиди нелінійної регресії: пряма y(x) (а); обернена x(y) (б), ортогональна $y_{ort}(x)$ (в)

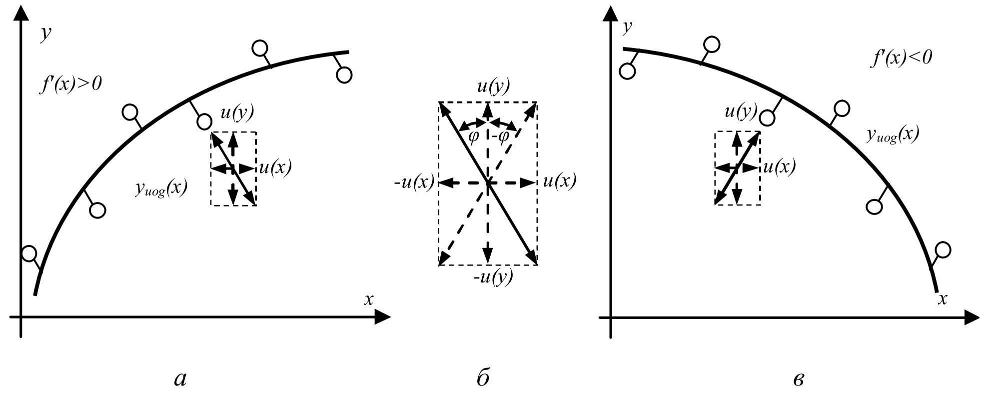


Рис. 2. Напрямки визначення відхилень експериментальних точок від шуканої кривої в узагальненій нелінійній регресії

Належний знак s_f кута в (1) визначається з умови, щоб цей напрямок був якнайближчий до ортогонального. Оскільки розглядаються лише монотонні однозначні залежності, то знак кута в (1) залежить від знака нахилу похідної функції: $s_f = sign[f'(x)]$ при $f'(x) > 0$ $s_f = +1$ (рис. 2, а) та при $f'(x) < 0$ $s_f = -1$ (рис. 2, в).

Як випливає із виразу (1), за нульової непевності вхідної величини $u(x)=0$ значення кута $\varphi=0$, тому напрямок мінімізування відхилень експериментальних точок від шуканої кривої проходить вздовж осі $0y$. Це означає, що узагальнена нелінійна регресія трансформується у звичайну $y(x)$, що відповідає означенню. Якщо значення непевності вихідної величини дорівнює нулеві ($u(y)=0$), то значення кута становить $\varphi=\pi/2$, звідси напрямок мінімізування відхилень експериментальних точок від шуканої кривої проходить вздовж осі $0x$. У цьому разі узагальнена нелінійна регресія трансформується у обернену $x(y)$, що також відповідає означенню.

Отже, встановлення напрямку, вздовж якого визначають відхилення, згідно з виразом (1) гарантує правильне врахування значень непевності $u(x)$ та $u(y)$ при визначенні параметрів шуканої нелінійної функції.

3. Визначення параметрів криволінійної регресії на основі повороту координат. Безпосереднє використання встановленого напрямку для визначення відхилень (сума квадратів яких далі буде мінімізуватися) потребує визначення точок перетину шуканої криволінійної функції з прямими, які проходять через експериментальні точки під кутом φ до перпендикулярного напрямку (рис. 2). Це доволі складне завдання. Радикально простіші результати можна отримати, використовуючи метод повороту координат на кут φ. У цьому разі експериментальні точки $(z_i;\ w_i)$ та шукана функція $w(z)$ у новій системі координат $(z;\ w)$ будуть розміщені так, що напрямок визначення відхилень збігається з напрямком вертикальної осі $0w$ (рис. 3).

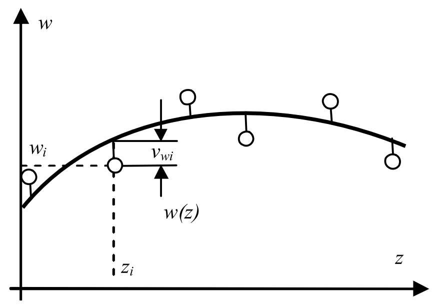


Рис. 3. Експериментальні точки $(z_i;\ w_i)$ та шукана функція $w(z)$ у новій системі координат $(z;\ w)$

Завдяки такому розміщенню параметри шуканої функції можна знайти, застосовуючи метод так, як для звичайної прямої нелінійної регресії [1,2], а саме на основі мінімізування суми квадратів відхилень v_{wi} вздовж вертикальної осі ($0w$) (рис. 3).

При повороті координат на кут φ нові координати $(z;w)$ визначають за виразами:

$$\left.\begin{aligned} z &= x\cos\varphi + s_f \cdot y\sin\varphi; \\ w &= -s_f \cdot x\sin\varphi + y\cos\varphi. \end{aligned}\right\}. \tag{2}$$

Далі: нехай математична модель нелінійної залежності $w(z)$ між величинами w та z у системі координат $(z;w)$ подається зваженою сумою m відомих базових функцій $\psi_j(z)$:

$$w(z)=\sum_{j=0}^{m-1}\alpha_j\psi_j(z), \qquad (3)$$

де $\boldsymbol{\psi}(z)=(\psi_0(z),\psi_1(z),...,\psi_{m-1}(z))$ – вектор базових функцій; $\mathbf{A}=(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2,..., \alpha_{m-1})^T$ – вектор шуканих коефіцієнтів a_i при базових функціях.

У матричній формі математична модель шуканої нелінійної залежності (3) має вигляд:

$$\mathbf{W}(z)=\boldsymbol{\psi}(z)\cdot\mathbf{A}. \qquad (4)$$

Значення $\psi_k(z_i)$ базових функцій, обчислених згідно з першим рівнянням системи (2) при n значеннях $z_0, z_n, ..., z_{n-1}$ координати z, утворюють матрицю:

$$\mathbf{\Phi}=\begin{bmatrix}\psi_0(z_0) & \psi_1(z_0) & \cdots & \psi_{m-1}(z_0)\\ \psi_0(z_1) & \psi_1(z_1) & \cdots & \psi_{m-1}(z_1)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \psi_0(z_{n-1}) & \psi_1(z_{n-1}) & \cdots & \psi_{m-1}(z_{n-1})\end{bmatrix}. \qquad (5)$$

Використовуючи стандартний метод найменших квадратів [1,2], значення шуканих коефіцієнтів визначають за матричним виразом:

$$\mathbf{A}=\left(\mathbf{\Phi}^T\mathbf{\Phi}\right)^{-1}\mathbf{\Phi}^T\mathbf{W}, \qquad (6)$$

де $\mathbf{W}=(w_0, w_1, ..., w_{n-1})^T$ – вектор обчислених згідно з другим рівнянням системи (2) значень координати w в експериментальних точках.

4. Функція у первісній системі координат. Отримана залежність (6) для визначення коефіцієнтів нелінійної функції стосується цієї функції $w(z)$ у системі координат $(z;w)$. З метою отримання значень функції $y(x)$ у первісній системі координат $(x;y)$ необхідно здійснити обернений поворот координат на φ (з урахуванням його знака):

$$\left.\begin{aligned} x&=z\,cos\varphi-s_f\cdot w\,sin\varphi;\\ y&=s_f\cdot z\,sin\varphi+w\,cos\varphi.\end{aligned}\right\}. \qquad (7)$$

Оскільки у виразі (3) w є функцією z: $w=w(z)$, тому у виразі (7) можна записати, що

$$x=z\,cos\varphi-s_f\cdot w(z)sin\varphi=\Gamma(z). \qquad (8)$$

Звідси за заданого значення x значення величини z описується оберненою функцією $z=\Gamma^{-1}(x)$. Використовуючи цю функцію у залежності (3), отримуємо значення величини w для заданого значення x:

$$w=w(z)=w\left(\Gamma^{-1}(x)\right). \qquad (9)$$

Після підстановки цієї залежності у друге рівняння системи (7) одержуємо вираз для шуканої залежності між вихідною величиною y та вхідною x:

$$y=s_f\cdot sin\varphi\cdot\Gamma^{-1}(x)+cos\varphi\cdot w\left(\Gamma^{-1}(x)\right). \qquad (10)$$

5. Приклад параболічної апроксимації

У цьому разі математична модель залежності у системі координат $(z;w)$ має вигляд:

$$\Psi(z)=w=a_0+a_1z+a_2z^2. \qquad (11)$$

Після визначення згідно з рівнянням (6) значень коефіцієнтів $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ із залежності (8) з урахуванням (1) залежність $x(z)$ може бути описана рівнянням:

$$x=z\,cos\varphi-s_f\cdot\left[a_0+a_1z+a_2z^2\right]sin\varphi=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}\left\{z-s_f\lambda\cdot\left[a_0+a_1z+a_2z^2\right]\right\}=\Gamma(z). \qquad (12)$$

Тоді обернена функція $z(x)$ має вигляд:

$$z(x)=\frac{2\left(x\sqrt{1+\lambda^2}+s_f\lambda\cdot a_0\right)}{1-s_f\lambda\cdot a_1+\sqrt{\left(1-s_f\lambda\cdot a_1\right)^2-4s_f\lambda\cdot a_2\left(x\sqrt{1+\lambda^2}+s_f\lambda\cdot a_0\right)}}. \qquad (13)$$

Після підстановки отриманого виразу у вираз (11) $w(x)=a_0+a_1z(x)+a_2(z(x))^2$ і далі у вираз (10) одержуємо залежність $y(x)$ між вихідною та вхідною величинами у явному вигляді:

$$y(x)=\frac{2\left[a_2x^2+\left(a_1+s_f\lambda\right)\sqrt{1+\lambda^2}\cdot x+a_0\left(1+\lambda^2\right)\right]}{\left[\left(1-s_f\lambda\cdot a_1\right)+\sqrt{\left(1-s_f\lambda\cdot a_1\right)^2-4s_f\lambda\cdot a_2\left(x\sqrt{1+\lambda^2}+s_f\lambda\cdot a_0\right)}\right]\sqrt{1+\lambda^2}-2a_2s_f\lambda\cdot x}, \qquad (14)$$

або

$$y(x)=\frac{2\left[\frac{a_2x^2}{s_f\lambda\sqrt{1+\lambda^2}}+\left(\frac{a_1}{s_f\lambda}+1\right)x+a_0\sqrt{1+\frac{1}{\lambda^2}}\right]}{\left(\frac{1}{s_f\lambda}-a_1\right)-\frac{2a_2x}{\sqrt{1+\lambda^2}}+s_f\sqrt{\left(\frac{1}{\lambda s_f}-a_1\right)^2-4a_2\left(x\cdot s_f\sqrt{1+\frac{1}{\lambda^2}}+a_0\right)}}. \qquad (15)$$

Залежність (14, а) доцільно використовувати за малих значень $\lambda=u(x)/u(y)$, тобто при $\lambda\to 0$ чи при $u(x)<<u(y)$. Натомість залежність (15) доцільно використовувати за великих значень λ $(\lambda\to\infty)$ чи при $u(x)>>u(y)$. Зокрема, при $u(x)=0$ та $u(y)\neq 0$ $\lambda=u(x)/u(y)=0$, тоді з виразу (14) отримуємо: $y(x)=a_2x^2+a_1x+a_0$, що відповідає параболічній залежності $y(x)$ у разі відсутності повороту координат: $\varphi=0$.

Натомість при $u(y)=0$ та $u(x)\neq 0$ значення $\lambda=u(x)/u(y)=\infty$, і з виразу (15) отримуємо $y(x)=\dfrac{2\left(x+s_fa_0\right)}{-a_1+s_f\sqrt{a_1^2-4a_2\left(s_fx+a_0\right)}}$, що відповідає оберненій параболічній залежності: $x(y) = -\left(s_f a_2 y^2 + a_1 y + s_f a_0\right)$ при повороті координат на кут $\varphi = s_f \pi / 2$.

6. Висновки. 1. Запропонований метод побудови нелінійних залежностей на основі експериментальних даних забезпечує врахування непевності $u(x)$ і $u(y)$ результатів вимірювань обох величин згідно з їхніми фактичними значеннями.

2. Алгоритм побудови нелінійної залежності поділяється на три етапи: 1) поворот експериментальних точок на кут, тангенс якого дорівнює відношенню стандартних непевностей результатів вимірювань величин; 2) визначення коефіцієнтів нелінійної залежності звичайним методом найменших квадратів; 3) визначення залежності у первісній системі координат шляхом оберненого повороту координат.

3. Отримані залежності забезпечують визначення нелінійної залежності для довільного співвідношення стандартних непевностей результатів вимірювань обох величин.

1. Kendall M.G. and Stuart A. The Advanced Theory of Statistics, Volume Two. Charles Griffin and Co Ltd, London, Third edition, 1973. 2. Draper N. R. and Smith H. Applied Regression Analysis. Willey & Sons, New York, 1973. 4. Gillard J.W. An Historical Overview of Linear Regression with Errors in Both Variables // School of Mathematics, Senghenydd Road, Cardiff University, 2006. 5. Dorozhovets M. Niepewność liniowej regresji ortogonalnej. Pomiary, Automatyka, Kontrola. N9_bis, 2007, T.I, s.31-34. Kongres KKM-2007 w Krakowie. 6. Dorozhovets M. Regresja liniowa uwzględniająca niepewności pomiaru obydwu wielkości. Materiały konferencji „Podstawowe problemy metrologii PPM-2008", Sucha Beskidzka, 12-15.05. – 2008. – S. 25–28. 7. Dorozhovets M. Uwzględnienie niepewności pomiaru obydwu wielkości w regresji liniowej. Pomiary Automatyka Kontrola, 2008. – №9. 8. Дорожовець М. М. Оптимальне урахування непевності вимірювань вхідної та вихідної величин у лінійній регресії. Вісник НУ "Львівська політехніка": "Автоматика вимірювання та керування". – Львів, 2008. – № 608. – С.42–48.

УДК 53.05:617.735

ОПТИМАЛЬНА ОБРОБКА ЕЛЕКТРОРЕТИНОСИГНАЛУ ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ ФОРМИ ЕЛЕКТРОРЕТИНОГРАМИ

© Роман Ткачук, 2009

Державний технічний університет імені Івана Пулюя, вул. Руська, 56, Тернопіль, Україна
Vmp@ tu.edu.te.ua

На основі лінійної математичної моделі електроретиносигналу (ЕРС) побудовано метод його оптимальної цифрової обробки для визначення форми електроретинограми (ЕРГ) при офтальмодіагностиці. Розроблено метод синтезу оптимального цифрового фільтра ЕРС. Визначено характеристику передачі фільтра, вибрано його структуру і розроблено метод розрахунку параметрів цієї структури. Наведено результати комп'ютерного моделювання оптимальної обробки ЕРС та її характеристики.

Используя линейную математическую модель электроретиносигнала, разработан метод синтеза оптимального цифрового фильтра и предложен расчет его параметров. Приведены результаты компьютерного моделирования оптимальной обработки ЭРС и его характеристики.

On the base of the linear stochastic discreet process as a mathematics model of an electroretinosignal a digital electroretinosignal processing method for ophtalmodiagnastic estimation of the electroretinogram has been built. A method of an optimal digital filter synthesis has been developed. The filters transfer function determined, the structure selected and a method of its parameters estimation is given. Results of computing simulation of the optimal digital processing of the electroretinosignal are lay down.

Вступ. Ретинографічні методи медичних досліджень візуальної системи людини ґрунтуються на інтерактивному чи автоматизованому відборі та аналізі електроретинограми (ЕРГ) [1]. Форму та динамічний