половина RAM постійно зберігає "робочі" коди поточних значень сигналів, а друга половина використовується для підготовки нових корегованих кодів. Зміна кодів буде відбуватись упродовж одного дискрету часу $T_{ст.}$, і на виході генератора не буде невизначених перехідних сигналів.

Висновок. Раціональний розподіл функцій управління між програмними і апаратними засобами, під час синтезу трифазних генераторів полігармонічних сигналів, побудованих на базі сучасних цифрових сигнальних процесорів, приводить до покращання структури програми і дає змогу з більшою точністю формувати його вихідні струми та напруги.

1. Лавров Г.Н., Доронина О.М., Портнов М.Л., Портнов Е.М. Снижение погрешностей измерения телемеханических систем // Энергетик. – М.: НТА "Энергопрогресс", 1997. – № 2. – С. 11–13. 2. Лавров Г.Н., Доронина О.М., Портнов М.Л., Портнов Е.М. Система преобразования, интегрирования и накопления текущих параметров электроэнергии // Энергетик. – М.: НТА "Энергопрогресс", 1996. – № 2. – С. 13–14. 3. DSP- 2100 Family DSP Microcomputers. ADSP-21xx. ADSP-2100 Family DSP Microcomputers ADSP-21x. – Analog Devices, Inc., 1996. http://www.analog.com/UploadedFiles/Data_Sheets/88076770adsp21xx.pdf . 4. DSP Microcomputer. ADSP-2186. DSP Microcomputer ADSP-2186. – Analog Devices, Inc., 2001. http://www.analog.com/UploadedFiles/Data_Sheets/88076770adsp21xx.pdf.

УДК 519.95

А.Б. Кметь
Фізико-механічний институт ім. Г.В. Карпенка НАН України

ТОТОЖНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ФОРМУЛ В S_N-АЛГЕБРІ

Розглянуто проблему тотожних перетворень в S_N-алгебрі. Задачу про тотожні перетворення формулюють так. На множині операцій алгебри необхідно визначити повну систему тотожностей, тобто знайти певну елементарну підмножину пар рівних формул, які реалізують одну й ту саму функцію і дають змогу підставлянням знайдених формул одних замість інших отримати для будь-якої формули всі відповідні їй формули.

The paper is dealing with a problem of identical transformations at S_N-algebra. The task about identical transformations is formulated as follows. On the set of algebra operations the specifying of complete system of identities is required, i.e. it is necessary to find somewhat the elementary subset of pairs of equal formulas realizing the same function and allowing by substitution of the found formulas of ones instead of others to get for any formula all formulas, which are equal to her.

Вступ. Розглянуто розв'язання проблеми тотожних перетворень в S_N-алгебрі. S_N-алгеброю називають систему $\langle \mathbf{N} \cup \omega,\ +,\ \chi_\sigma(x),\ \vartheta_\sigma(x) \rangle,\ \sigma \in \mathbf{N}$. S_N-алгебра – алгебра типу $\langle 2,1,1,1,... \rangle$ з нескінченними носієм і сигнатурою, яка містить одну бінарну операцію та необмежену кількість унарних операторів двох типів – квазілінійні і порогові. Елементна база S_N-алгебри надзвичайно проста, а сама вона – найкращий математичний апарат для інтегрованої струмової логіки [1].

Нехай $\mathbf{N} = \{0,1,2...\}$ – множина всіх невід'ємних чисел. Введемо спеціальне число ω – велике число без індивідуального числового значення. Розумінню ω сприяє аналогія з примітивним рахунком: "один", "два", "три",..., "багато". Це "багато" і є ω, тобто число, яке не можна використати для точної кількісної оцінки. Множина $\mathbf{N} \cup \omega = \mathbf{N} \cup \{\omega\}$ прийнята як носій S_N-алгебри.

Сигнатуру S_N-алгебри становить операція "+", яка визначена як арифметична сума на $\mathbf{N} \cup \omega$, квазілінійні оператори

$$\chi_\sigma(x) = \begin{cases} \sigma - \alpha, \text{ якщо } x \le \sigma, \\ 0, \text{ якщо } x \ge \sigma \end{cases}, \ \sigma \in \mathbf{N} \tag{1}$$

та порогові оператори

$$\vartheta_\sigma(x) = \begin{cases} \omega, \text{ якщо } x < \sigma, \\ 0, \text{ якщо } x \ge \sigma \end{cases}, \ \sigma \in \mathbf{N}. \tag{2}$$

Множина $\mathbf{E}_k = \{0,1,2,\dots,k-1\}$ загальноприйнята як носій в алгебраїчних системах, які називають k-значними логіками. Очевидно, $\mathbf{E}_k \subset \mathbf{N}$, що дає змогу використовувати S_N-алгебру для описання функцій k-значної логіки: $f(\vec{x}^n)$: $\mathbf{E}_k^n \to \mathbf{E}_k$ (клас $\mathbf{P}_k$).

Множину $\mathbf{E}_\omega = \{0, \omega\}$ необхідно порівнювати з носієм булевої алгебри {хибне "0", істинне "ω"}, для якої характерна якісна оцінка логікового значення. В S_N-алгебрі множина $\mathbf{E}_2 = \{0,1\}$ вводить кількісну оцінку для логікових значень {хибне "0", істинне "1"}, тобто нормує їх. Очевидно, що $\mathbf{E}_2 \subset \mathbf{E}_k \subset \mathbf{N}$, проте $\omega \ne 1$, $1 \in \mathbf{N}$. В S_N-алгебрі $\omega \ge k$ і це єдина кількісна характеристика елемента ω. Завдяки цьому S_N-алгебра уможливлює описання як булевих функцій: $f(\vec{x}^n)$: $\mathbf{E}_\omega^n = \mathbf{E}_\omega$ (клас $\mathbf{P}_\omega$), так і нормованих булевих функцій $f(\vec{x}^n)$: $\mathbf{E}_2^n = \mathbf{E}_2$ (клас $\mathbf{P}_2$).

На вказаних множинах можливі і інші відображення, зокрема: $f(\vec{x}^n)$: $\mathbf{E}_k^n = \mathbf{E}_\omega$ (клас $\mathbf{P}_æ$) та $f(\vec{x}^n)$: $\mathbf{E}_\omega^n = \mathbf{E}_k$ (клас $\mathbf{P}_\alpha$). Функції з класів $\mathbf{P}_\alpha$ і $\mathbf{P}_æ$, названі відповідно аналогіковими і каталогіковими функціями, можуть описувати на логіковому рівні роботу різних перетворювачів, наприклад, АЦП і ЦАП.

Всі перелічені класи функцій зараховуватимемо до *логікових функцій* (клас **P**), визначаючи останні як $f(\vec{x}^n)$: $\mathbf{M}_1 \times \mathbf{M}_2 \times \dots \times \mathbf{M}_n \to \mathbf{M}$, де $\mathbf{M}_i = \mathbf{E}_{k_i} \cup \mathbf{E}_\omega$ або $\mathbf{M}_i = \mathbf{E}_{k_i}$ або $\mathbf{M}_i = \mathbf{E}_\omega$, і $\mathbf{M} = \mathbf{E}_k \cup \mathbf{E}_\omega$. Очевидно, що $\{\mathbf{P}_\omega, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_k, \mathbf{P}_æ, \mathbf{P}_\alpha\} \subset \mathbf{P}$.

Унарні оператори S_N-алгебри не мають спеціальних назв за винятком операторів інверсії. Якщо $x|\mathbf{E}_k$ ($x|\mathbf{E}_k \cup \mathbf{E}_\omega$)*, то оператор $\chi_{k-1}(x)$ ($\chi_k(x)$) називають інверсією і позначають $\bar{x}$, тобто:

$$\bar{x} = \begin{cases} \chi_{\max x}(x), \text{ якщо } \max x \ne \omega, \\ \chi_k(x), \text{ якщо } \max x = \omega \end{cases}. \tag{3}$$

Якщо $x|\mathbf{E}_\omega$, то оператор $\vartheta_\sigma(x)$, $\sigma \ne 0$ називають булевою інверсією і позначають $\neg x$. Для спрощення запису логікових виразів в S_N-алгебрі поряд з позначкою $\neg x$ використовують також і позначку x^σ, тобто $\vartheta_\sigma(x) = x^\sigma$. В аналітичних описаннях булевих чи аналогікових функцій формально можливий оператор x^ω. Оскільки ω не має індивідуального числового значення, то можна використовувати будь-який оператор $\vartheta_\sigma(x)$, $\sigma \ne 0$ з тим самим кінцевим результатом, проте у такому разі прийнято користуватись оператором з мінімальним верхнім індексом, тобто x^1.

Бінарна операція "+", визначена на $\mathbf{N} \cup \omega$ як арифметична сума, зберігає всі її властивості, які добре відомі [2].

C1. $(x_1 + x_2) = (x_2 + x_1)$. (Комутативність)

C2. $(x_1 + (x_2 + x_3)) = ((x_1 + x_2) + x_3)$. (Асоціативність)

C3. $(x + 0) = x$. (Нейтральний елемент)

C4. $((x_1 \ne 0) \vee (x_2 \ne 0)) \to (x_1 + x_2 \ne 0)$.

* " | " – позначка обмеження функції

C5. $(x_1 + x_2 = 0) \to ((x_1 = 0) \& (x_2 = 0))$. (Елементи носія не симетризовувані стосовно підсумовування)

C6. $(x + \omega) = \omega$. (Нерегулярний елемент)

Всі елементи множини **N** є регулярними відносно підсумовування.

C7. $((x_1 \neq \omega) \& (x_2 \neq \omega)) \to (x_1 + x_2 \neq \omega)$. (Регулярність суми)

C8. $(x_1 + x_2 = \omega) \to ((x_1 = \omega) \vee (x_2 = \omega))$.

C9. $((\sigma \neq \omega) \& (x_1 + \sigma = x_2 + \sigma)) \to (x_1 = x_2)$. (Скорочення підсумовування).

C10. $((a < a') \vee (b < b')) \to ((a + a') < (b + b'))$. (Монотонність).

Оператори $\mathbf{S_N}$-алгебри мають такі властивості

C11. $\chi_0(x) = 0$, $\vartheta_0(x) = 0$.

Нехай $\sigma \neq 0$, тоді

C12. $\chi_\sigma(0) = \sigma$, $\vartheta_\sigma(0) = \omega$.

C13. $\chi_\sigma(\omega) = 0$, $\vartheta_\sigma(\omega) = 0$.

Позначимо $f(\vec{x}^n) = \underbrace{f(f(f...(f(x))...))}_{n \text{ разів}}$, тоді

C14. $\chi_\sigma^{2n-1}(x) = \chi_\sigma(x)$, $\vartheta_\sigma^{2n-1}(x) = \vartheta_\sigma(x)$.

C15. $\chi_\sigma^{2n}(x) = \chi_\sigma^2(x)$, $\vartheta_\sigma^{2n}(x) = \vartheta_\sigma^2(x)$. (Періодичність)

Для порівняння: у булевій алгебрі є лише один оператор $\neg x$ і завдяки інволюції ми маємо $\neg(\neg x) = \neg^2 x = x$. Тут загалом інволюційний закон не діє, проте існують умови, за яких інволюція виконується.

C16. $\forall\sigma(((\sigma > \mathbf{max}\, x) \& (\mathbf{E} \subseteq \mathbf{E}_k)) \to (\chi_\sigma^2(x) = x))$, $\forall\sigma((x \mid \mathbf{E}_\omega) \to (\vartheta_\sigma^2(x) = x))$. (Інволюція)

C17. $(a < b) \to (\chi_\sigma(a) > \chi_\sigma(b))$, $(a < b) \to (\vartheta_\sigma(a) > \vartheta_\sigma(b))$. (Монотонність)

C18. $\chi_\sigma(x) + \chi_\sigma^2(x) = \sigma$, $\vartheta_\sigma(x) + \vartheta_\sigma^2(x) = \omega$. (Доповнювальність)

Для порівняння: у булевій алгебрі ми маємо $\neg x \vee x = 1$. Оскільки $x = \neg^2 x$ (інволюція), то $\neg x \vee \neg^2 x = 1$ і схожість очевидна.

C19. $(\sigma > \alpha) \to (\vartheta_\sigma(x) + \chi_\alpha(x) = \vartheta_\sigma(x))$, $(x \mid \mathbf{E}_\omega) \to (\vartheta_\sigma(x) + \chi_\alpha(x) = \vartheta_\sigma(x))$,
$(\sigma > \alpha) \to (\vartheta_\sigma(x) + \vartheta_\alpha(x) = \vartheta_\sigma(x))$. (Поглинання)

Нехай $x|\mathbf{E}_k$, тоді

C20. $\vartheta_1(x^\sigma) = \bar{x}^{k-\sigma}$, $\vartheta_1(\bar{x}^\sigma) = x^{k-\sigma}$; **C20a.** $x^\sigma = \vartheta_1(\bar{x}^{k-\sigma})$, $\bar{x}^\sigma = \vartheta_1(x^{k-\sigma})$;

C21. $\vartheta_1(x^\alpha + \bar{x}^\beta) = (x + x^\alpha)^{k-\beta}$, $\vartheta_1(x^\alpha + \bar{x}^\beta) = (\bar{x} + \bar{x}^\beta)^{k-\alpha}$;

C21a. $x^\alpha + \bar{x}^\beta = \vartheta_1((x + x^\alpha)^{k-\beta})$, $x^\alpha + \bar{x}^\beta = \vartheta_1((\bar{x} + \bar{x}^\beta)^{k-\alpha})$;

C22. $\vartheta_1((x + x^\alpha)^\beta) = x^\alpha + \bar{x}^{k-\beta}$, $\vartheta_1((\bar{x} + \bar{x}^\alpha)^\beta) = x^{k-\beta} + \bar{x}^\alpha$;

C22a. $(x + x^\alpha)^\beta = \vartheta_1(x^\alpha + \bar{x}^{k-\beta})$, $(\bar{x} + \bar{x}^\alpha)^\beta = \vartheta_1(x^{k-\beta} + \bar{x}^\alpha)$;

C23. $(x + x^\alpha)^\beta = (\bar{x} + \bar{x}^{k-\beta})^{k-\alpha}$, $(\bar{x} + \bar{x}^\alpha)^\beta = (x + x^{k-\beta})^{k-\alpha}$. (Дуальність)

Математичний апарат $\mathbf{S_N}$-алгебри забезпечує можливість аналітичного описання довільної функції з усіх перелічених класів $\mathbf{P}_\omega$, $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_k$, $\mathbf{P}_{æ}$, $\mathbf{P}_\alpha$ [1, 3].

1. Аналіз публікацій щодо задачі про тотожні перетворення. Задачу про тотожні перетворення формулюють так. На множині операцій алгебри необхідно визначити повну систему тотожностей, тобто знайти певну елементарну підмножину пар рівних формул, які реалізують одну й ту саму функцію і дають змогу підстановкою знайдених формул одних замість інших отримати для будь-якої формули всі рівні їй формули.

В такій загальній постановці задача не конструктивна. Тому запропонувати хоч будь-який підхід до її розв'язання наразі важко. Більше того, відомий такий теоретичний результат: існують k-значні логіки з скінченним базисом, які водночас не мають скінченної повної системи тотожностей [4].

Розглянемо такий приклад.

Приклад 1. Привести формулу $\chi_\sigma^2(x)$ до вигляду: $\sum_{i=1}^{\sigma}\chi_1(\vartheta_i(x))$. Можна було би довести рівність

$$\chi_\sigma^2(x)=\sum_{i=1}^{\sigma}\chi_1(\vartheta_i(x)), \tag{4}$$

де $\sigma \neq 0$, і тоді на підставі (4) потрібного досягають за один крок. Можна б було виходити з такої теореми.

Теорема 1. Якщо $\sigma \neq 0$, то

$$\chi_\sigma^2(x)=\chi_{\sigma-1}^2(x)+\chi_1(\vartheta_i(x)). \tag{5}$$

Доведення. Нехай $x=\alpha\leq\sigma-1$. Тоді на підставі (1) и (2) отримаємо $\alpha=\alpha+\chi_1(\omega)$, тобто: $\alpha=\alpha$. Нехай тепер $x=\beta\geq\sigma$. Тоді з $\chi_\sigma^2(\beta)=\chi_{\sigma-1}^2(\beta)+\chi_1(\vartheta_\sigma(\beta))$ маємо $\sigma=\alpha-1+\chi_1(0)$, тобто: $\sigma=\sigma$. Q.E.D.

Скориставшись теоремою 1, можна виконати потрібне приведення за $\sigma-1$ крок. Стосовно ж задачі про тотожні перетворення доцільно запитати: чи належать до шуканої системи тотожностей рівності (4) і (5), тобто чи є вони необхідним компонентом її розв'язання? Відповісти на це питання доволі важко. Знайти критерій, що дає змогу це зробити, – важко також.

Постановка задачі. Можливий інший варіант постановки цієї задачі: визначити систему тотожностей, яка дає змогу перейти від будь-якої формули до певної універсальної формули і надалі – від цієї унівесальної формули до довільної формули, яка дорівнює їй. Така постановка щонайменше гарантує повноту системи тотожностей і, водночас, має конструктивний характер. Як універсальну формулу можна запропонувати досконалу канонічну точкову форму (**ДКТФ**), оскільки вона найкраще відповідає загальному випадку, бо описує поточкове відображення області визначення функції на область її значень. У такому разі **ДКТФ** визначають і для нульових значень функції. Отже, розв'язок сформульованої так задачі розділено на два етапи. Перший етап – приведення довільної формули до **ДКТФ** – можна розглядати як *аналіз*. Дійсно, **ДКТФ** функції – єдина, а приведення до **ДКТФ** дає змогу розпізнати функцію, не обчислюючи всіх її значень. Розпізнавання ж функції звичайно сприймають як основний результат аналізу. Другий етап – приведення **ДКТФ** функції до будь-якої формули, яка дорівнює їй, – можна розглядати як *синтез*. Справді, синтез – не що інше, як пошук для заданої функції формули, яка реалізує її і відповідає певним вимогам.

Відтак визначимо спочатку систему тотожностей, що дають змогу перетворити в S_N-алгебрі будь-яку формулу в **ДКТФ**. В S_N-алгебрі прийнято таке означення формули [1].

1. Змінні $x, x_1, x_2, ..., x_n$ – це формули.

2. Якщо $\boldsymbol{F}$ – формула, то $\chi_\sigma(\boldsymbol{F})$ і $\vartheta_\sigma(\boldsymbol{F})$ – також формули.

3. Якщо $\boldsymbol{F}_1$ і $\boldsymbol{F}_2$ – формули, то $\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2$ – формула.

4. Логіковий вираз є формулою, якщо він є формулою згідно з 1–3.

З урахуванням прийнятого індуктивного означення формули не важко визначити вимоги до шуканої системи тотожностей – система повинна забезпечити можливість таких чотирьох переходів:

i) $x\Rightarrow$ **ДКТФ**;

ii) (**ДКТФ** + **ДКТФ**) $\Rightarrow$ **ДКТФ**;

iii) χ_σ(**ДКТФ**) $\Rightarrow$ **ДКТФ**;

iiii) ϑ_σ(**ДКТФ**) $\Rightarrow$ **ДКТФ**.

Очевидно, з прийнятого означення формули випливає, що інших переходів не знадобиться. Наприклад, тотожність, що дає змогу виконати перехід $\chi_\sigma(x) \Rightarrow$ **ДКТФ** безпосередньо, явно не потрібна, бо такий перехід може бути виконаний в два прийоми – спочатку **i**, а потім **iii**.

Очевидно також, що вказані переходи – зворотні. Тому система тотожностей, яка задовольняє перелічені вище вимоги, забезпечить також можливість зворотного перетворення, тобто приведення **ДКТФ** до будь-якої формули, що дорівнює їй.

2. Перетворення $x \Rightarrow$ **ДКТФ**. Рівності, що забезпечують переходи **i**, випливають безпосередньо з теорем про представлення функцій [1, 3].

Якщо $x|\mathbf{E}_k \cup \mathbf{E}_\omega$ і $f(\vec{x}^1) = x$, то маємо:

$$x = \sum_{\sigma=1}^{k-1} \chi_\sigma\left(x^\sigma + \bar{x}^{\bar{\sigma}}\right) + \vartheta_1\left(x^k + \bar{x}^0\right). \tag{6}$$

Для тотожних перетворень використовуватимо повний еквівалент виразу (6), тобто з записом нульових значень змінної:

$$x = \sum_{\sigma=0}^{k-1} \chi_\sigma\left(x^\sigma + \bar{x}^{\bar{\sigma}}\right) + \vartheta_1\left(x^k + \bar{x}^0\right). \tag{7}$$

Якщо $x|\mathbf{E}_k$ і $f(\vec{x}^1) = x$, то можна записати

$$x = \sum_{\sigma=1}^{k-1} \chi_\sigma\left(x^\sigma + \bar{x}^{\bar{\sigma}}\right) \tag{8}$$

або в повному вигляді:

$$x = \sum_{\sigma=0}^{k-1} \chi_\sigma\left(x^\sigma + \bar{x}^{\bar{\sigma}}\right). \tag{9}$$

Якщо $x|\mathbf{E}_\omega$ і $f(\vec{x}^1) = x$, то

$$x = \sum_{\sigma=0}^{1} \vartheta_\sigma\left(x^\sigma + \bar{x}^{\bar{\sigma}}\right). \tag{10}$$

Вирази (6)–(10) вичерпують всі тотожності, необхідні для виконання переходу $x \Rightarrow$ **ДКТФ**. Безумовно ж, припускаємо, що тотожності, які визначають властивості операцій, наприклад, **С1–С8**, **С11–С13** – також використовують. Надалі на цю останню обставину не будемо щоразу спеціально звертати увагу. Обмежимось лише вказівкою рівностей, специфічних для розглядуваного переходу.

Приклад 2. Нехай $x|\mathbf{E}_3 \cup \mathbf{E}_\omega$. Перехід від формули, що містить одну змінну x, до досконалої канонічної точкової форми згідно з (7) виглядає так:

$$x = \chi_0\left(x^0 + \bar{x}^3\right) + \chi_1\left(x^1 + \bar{x}^2\right) + \chi_2\left(x^2 + \bar{x}^1\right) + \left(x^3 + \bar{x}^0\right)^1.$$

Зауважимо таке. Для того, щоб уникнути помилок, рекомендується виконувати перетворення так, як це зроблено в наведеному прикладі, тобто з записом нульових значень. Остаточний результат, природно, не повинен містити нульові доданки, які просто збільшують розмір логікового виразу, не впливаючи на його значення. Звичайно їх вилучають за означенням **ДКТФ**. Ця рекомендація зовсім не обов'язкова: можна перехід **i** виконувати, використовуючи рівність (6) замість (7), тим самим відразу усуваючи нульові доданки, що не призведе до помилки. Проте, якщо перетворення містить спочатку перехід **i**, а потім, скажімо, перехід **iii**, то, не маючи певних навиків, легко припуститися помилки в переході **iii**, оскільки для виконання останнього необхідне повне відображення, тобто всі точки з області визначення функції або, іншими словами, потрібен логіковий вираз, що містить і нейтральні доданки. Тому краще вилучати нульові доданки лише після виконання всіх необхідних перетворень, тобто коли більше ніяких перетворень не передбачається і отримано остаточний результат.

Згідно з завданням, в розглядуваному прикладі більше ніяких перетворень не потрібно. Тому тепер можна вилучити нульові доданки, тобто остаточний результат такий:

$$x = +\chi_1\left(x^1 + \bar{x}^2\right) + \chi_2\left(x^2 + \bar{x}^1\right) + \left(x^3\right)^1$$

Нехай $x|\mathbf{E}_5$. Запишем **ДКТФ** для змінної x. На підставі (8) маємо:

$$x = \chi_1\left(x^1 + \bar{x}^3\right) + \chi_2\left(x^2 + \bar{x}^2\right) + \chi_3\left(x^3 + \bar{x}^1\right) + \chi_4\left(x^4 + \bar{x}^0\right).$$

Нехай тепер $x|\mathbf{E}_\omega$. Тоді

$$x = \left(x^0 + \neg x^1\right)^0 + \left(x^1 + \neg x^0\right)^1 = \left(x^1 + \neg x^0\right)^1.$$

3. Перетворення (ДКТФ + ДКТФ) $\Rightarrow$ ДКТФ. Для визначення виразів, що забезпечують переходи **ii**, знадобляться такі результати.

Теорема 2. Нехай $\varphi\left(\vec{x}^n\right)$ – довільна функція, каталогікова або булева. Тоді

$$\chi_{\sigma_1}\left(\varphi\left(\vec{x}^n\right)\right) + \chi_{\sigma_2}\left(\varphi\left(\vec{x}^n\right)\right) = \chi_{\sigma_1+\sigma_2}\left(\varphi\left(\vec{x}^n\right)\right). \tag{11}$$

Доведення. Виконаємо пряму перевірку цієї тотожності. Оскільки $\varphi\left(\vec{x}^n\right)$ – функція каталогікова чи булева, то її значення належать множині $\mathbf{E}_\omega$, тобто можливо або $\varphi\left(\vec{x}^n\right) = 0$, або $\varphi\left(\vec{x}^n\right) = \omega$. Нехай $\varphi\left(\vec{x}^n\right) = 0$. Тоді після підстановки в (11) маємо: $\chi_{\sigma_1}(0) + \chi_{\sigma_2}(0) = \chi_{\sigma_1+\sigma_2}(0)$. Згідно з **C12** як ліва, так і права частини останнього виразу дорівнюють $\sigma_1 + \sigma_2$, тобто рівність (11) виконується. Нехай тепер $\varphi\left(\vec{x}^n\right) = \omega$, тоді $\chi_{\sigma_1}(\omega) + \chi_{\sigma_2}(\omega) = \chi_{\sigma_1+\sigma_2}(\omega)$ і на підставі **C13** маємо рівність $0 = 0$.Q.E.D.

Вираз (11) дає змогу приводити до досконалої канонічної точкової форми суму двух канонічних формул, кожна з яких містить одні й ті самі змінні.

Приклад 3. Нехай $x|\mathbf{E}_3$. Приведемо до **ДКТФ** формулу $x + x$. Спочатку скористаємось рівністю (9). Отримаємо:

$$x + x = \chi_1\left(x^1 + \bar{x}^1\right) + \chi_2\left(x^2 + \bar{x}^0\right) + \chi_1\left(x^1 + \bar{x}^1\right) + \chi_2\left(x^2 + \bar{x}^0\right).$$

Оскільки вирази в скобках є каталогіковими функціями, то, застосувавши до одержаної формули співвідношення (11), маємо

$$x + x = \chi_2\left(x^1 + \bar{x}^1\right) + \chi_4\left(x^2 + \bar{x}^0\right).$$

Той самий результат можна отримати записанням **ДКТФ** безпосередньо за таблицею істинності функції $f(x) = x + x$.

Якщо перетворювані **ДКТФ** є **ДКТФ** каталогікової або булевої функції, то замість (11) достатньо скористатись **C19**.

Нехай $x|\mathbf{E}_\omega$. Згідно з **C19** маємо:

$$x + x = \left(x^1 + \neg x^0\right)^1 + \left(x^1 + \neg x^0\right)^1 = \left(x^1 + \neg x^0\right)^1.$$

Дійсно, булева змінна – ідемпотентна стосовно додавання: (**C3**, **C6**).

Якщо ж перетворювані **ДКТФ** є **ДКТФ** логікової функції, то перехід **ii** належить виконувати на підставі (11) і **C19**.

Нехай $x|\mathbf{E}_3 \cup \mathbf{E}_\omega$. Спочатку перетворимо x за допомогою тотжності (8):

$$x + x = \chi_1\left(x^1 + \bar{x}^2\right) + \chi_2\left(x^2 + \bar{x}^1\right) + \left(x^3 + \bar{x}^0\right)^1 + \chi_1\left(x^1 + \bar{x}^2\right) + +\chi_2\left(x^2 + \bar{x}^1\right) + \left(x^3 + \bar{x}^0\right)^1$$

Далі на підставі (11) і **C19** можна записати таке:

$$x + x = \chi_2\left(x^1 + \bar{x}^2\right) + \chi_4\left(x^2 + \bar{x}^1\right) + \left(x^3 + \bar{x}^0\right)^1.$$

Теорема 3. Нехай $\zeta(x_1)$ означає або $\chi_\sigma(x_1)$, або $\vartheta_\sigma(x_1)$. Нехай також $x_2|\mathbf{E}_k \cup \mathbf{E}_\omega$. Тоді

$$\zeta(x_1)=\sum_{\sigma=0}^{k}\zeta\left(x_1+x_2^\sigma+\bar{x}_2^{\bar{\sigma}}\right). \tag{12}$$

Якщо $x_2\,|\,\mathbf{E}_k$, то

$$\zeta(x_1)=\sum_{\sigma=0}^{k-1}\zeta\left(x_1+x_2^\sigma+\bar{x}_2^{\bar{\sigma}}\right). \tag{13}$$

Якщо ж $x_2|\mathbf{E}_\omega$, тоді

$$\zeta(x_1)=\sum_{\sigma=0}^{1}\zeta\left(x_1+x_2^\sigma+\neg x_2^{\neg\sigma}\right). \tag{14}$$

Для доведення достатньо прямої перевірки. Як ілюстрацію доведемо, наприклад, що

$$\chi_\alpha(x_1)=\sum_{\sigma=0}^{k-1}\chi_\alpha\left(x_1+x_2^\sigma+\bar{x}_2^{\bar{\sigma}}\right). \tag{15}$$

Доведення. Нехай $x_2=\beta$. Тоді згідно з означенням (1) і **С2** маємо:

$$\chi_\alpha(x_1)=\chi_\alpha\left(x_1+\beta_2^\beta+\bar{\beta}_2^{\bar{\beta}}\right)+\sum_{\forall\sigma|\sigma\neq\beta}\chi_\alpha\left(x_1+\beta_2^\sigma+\bar{\beta}_2^{\bar{\sigma}}\right)=\chi_\alpha(x_1+0)+\sum_{\forall\sigma|\sigma\neq\beta}\chi_\alpha(x_1+\omega)=\chi_\alpha(x_1).$$

Оскільки β довільне, то Q.E.D.

Тотожності (12)–(15) називатимемо *правилами введення змінної*. Ці правила разом з (11) і **С19** дають змогу виконати будь-який перехід типу **ii**.

Приклад 4. Нехай $x_1,x_2|\mathbf{E}_3$. Приведемо x_1+x_2 до **ДКТФ**. Скориставшись рівністю (8), маємо:

$$x_1+x_2=\chi_1\left(x_1^1+\bar{x}_1^1\right)+\chi_2\left(x_1^2+\bar{x}_1^0\right)+\chi_1\left(x_2^1+\bar{x}_2^1\right)+\chi_2\left(x_2^2+\bar{x}_2^0\right).$$

Далі згідно з (13) вводимо змінну x_1 в доданки, що не містять x_1, а x_2 в доданки, що не містять x_2,. Отримаємо:

$$\begin{aligned}x_1+x_2=&\chi_1\left(x_1^1+\bar{x}_1^1+x_2^0+\bar{x}_2^2\right)+\chi_1\left(x_1^1+\bar{x}_1^1+x_2^1+\bar{x}_2^1\right)+\chi_1\left(x_1^1+\bar{x}_1^1+x_2^2+\bar{x}_2^0\right)+\\&+\chi_2\left(x_1^2+\bar{x}_1^0+x_2^0+\bar{x}_2^2\right)+\chi_2\left(x_1^2+\bar{x}_1^0+x_2^1+\bar{x}_2^1\right)+\chi_2\left(x_1^2+\bar{x}_1^0+x_2^2+\bar{x}_2^0\right)+\chi_1\left(x_1^0+\bar{x}_1^2+x_2^1+\bar{x}_2^1\right)+\\&+\chi_1\left(x_1^1+\bar{x}_1^1+x_2^1+\bar{x}_2^1\right)+\chi_1\left(x_1^2+\bar{x}_1^0+x_2^1+\bar{x}_2^1\right)+\chi_2\left(x_1^0+\bar{x}_1^2+x_2^2+\bar{x}_2^0\right)+.\\&+\chi_2\left(x_1^1+\bar{x}_1^1+x_2^2+\bar{x}_2^0\right)+\chi_2\left(x_1^2+\bar{x}_1^0+x_2^2+\bar{x}_2^0\right)\end{aligned}$$

Тепер застосуємо до одержаного виразу тотожність (11). Тоді

$$\begin{aligned}x_1+x_2=&\chi_1\left(x_1^1+\bar{x}_1^1+x_2^0+\bar{x}_2^2\right)+\chi_2\left(x_1^1+\bar{x}_1^1+x_2^1+\bar{x}_2^1\right)+\chi_3\left(x_1^1+\bar{x}_1^1+x_2^2+\bar{x}_2^0\right)+\\&+\chi_2\left(x_1^2+\bar{x}_1^0+x_2^0+\bar{x}_2^2\right)+\chi_3\left(x_1^2+\bar{x}_1^0+x_2^1+\bar{x}_2^1\right)+\chi_4\left(x_1^2+\bar{x}_1^0+x_2^2+\bar{x}_2^0\right)+\\&+\chi_1\left(x_1^0+\bar{x}_1^2+x_2^1+\bar{x}_2^1\right)+\chi_2\left(x_1^0+\bar{x}_1^2+x_2^2+\bar{x}_2^0\right).\end{aligned}$$

Той самий результат отримаємо, записавши **ДКТФ** безпосередньо за таблицею істинності функції $f(x_1+x_2)=x_1+x_2$.

Приклад 5. Нехай $x_1,x_2|\mathbf{E}_\omega$. Нехай також $\varphi(\vec{x}^2)$ – аналогікова функція, що задана в вигляді **ДКТФ**:

$$\varphi(\vec{x}^2)=\chi_3\left(x_1^0+\neg x_1^1+x_2^0+\neg x_2^1\right)+\chi_2\left(x_1^1+\neg x_1^0+x_2^0+\neg x_2^1\right)+\chi_1\left(x_1^0+\neg x_1^1+x_2^1+\neg x_2^0\right).$$

Привести $x_1+\varphi(\vec{x}^2)$ до **ДКТФ**.

Згідно з виразом (10) можна записати $x_1=\left(x_1^1+\neg x_1^0\right)^1$. Тоді

$$\begin{aligned}x_1+\varphi(\vec{x}^2)=&\left(x_1^1+\neg x_1^0\right)^1+\chi_3\left(x_1^0+\neg x_1^1+x_2^0+\neg x_2^1\right)+\\&+\chi_2\left(x_1^1+\neg x_1^0+x_2^0+\neg x_2^1\right)+\chi_1\left(x_1^0+\neg x_1^1+x_2^1+\neg x_2^0\right).\end{aligned}$$

На підставі (14) введемо x_2 в **ДКТФ** змінної x_1:

$$x_1+\varphi(\vec{x}^2)=\left(x_1^1+\neg x_1^0+x_2^0+\neg x_2^1\right)^1+\left(x_1^1+\neg x_1^0+x_2^1+\neg x_2^0\right)^1+$$
$$+\chi_3\left(x_1^0+\neg x_1^1+x_2^0+\neg x_2^1\right)+\chi_2\left(x_1^1+\neg x_1^0+x_2^0+\neg x_2^1\right)+\chi_1\left(x_1^0+\neg x_1^1+x_2^1+\neg x_2^0\right).$$

Надалі скористаємось властивістю **С19**:

$$x_1+\varphi(\vec{x}^2)=\left(x_1^1+\neg x_1^0+x_2^0+\neg x_2^1\right)^1+\left(x_1^1+\neg x_1^0+x_2^1+\neg x_2^0\right)^1+\chi_3\left(x_1^0+\neg x_1^1+x_2^0+\neg x_2^1\right)+$$
$$+\chi_1\left(x_1^0+\neg x_1^1+x_2^1+\neg x_2^0\right).$$

Приклад 6. Нехай $(x_1+1)\,\mathbf{mod}\,\mathbf{3}=\chi_1\left(x_1^0+\bar{x}_1^2\right)+\chi_2\left(x_1^1+\bar{x}_1^1\right)$ і $\neg x_2=\left(x_2^0+\neg x_2^1\right)^1$ – дві функції, відповідно тризначна і булева. Привести до **ДКТФ** суму цих функцій.

Запишемо логіковий вираз для заданої суми:

$$(x_1+1)\,\mathbf{mod}\,\mathbf{3}+\neg x_2=\chi_1\left(x_1^0+\bar{x}_1^2\right)+\chi_2\left(x_1^1+\bar{x}_1^1\right)+\left(x_2^0+\neg x_2^1\right)^1.$$

Згідно з (13) і (14) введемо x_1 в доданки, що не містять x_1, а x_2 в доданки, що не містять x_2. Отримаємо:

$$(x_1+1)\,\mathbf{mod}\,\mathbf{3}+\neg x_2=\chi_1\left(x_1^0+\bar{x}_1^2+x_2^0+\neg x_2^1\right)+\chi_1\left(x_1^0+\bar{x}_1^2+x_2^1+\neg x_2^0\right)+\chi_2\left(x_1^1+\bar{x}_1^1+x_2^0+\neg x_2^1\right)+$$
$$+\chi_2\left(x_1^1+\bar{x}_1^1+x_2^1+\neg x_2^0\right)+\left(x_1^0+\bar{x}_1^2+x_2^0+\neg x_2^1\right)^1+\left(x_1^1+\bar{x}_1^1+x_2^0+\neg x_2^1\right)^1+\left(x_1^2+\bar{x}_1^0+x_2^0+\neg x_2^1\right)^1.$$

До одержаного виразу застосовуємо **С19**:

$$(x_1+1)\,\mathbf{mod}\,\mathbf{3}+\neg x_2=\left(x_1^0+\bar{x}_1^2+x_2^0+\neg x_2^1\right)^1+\chi_1\left(x_1^0+\bar{x}_1^2+x_2^1+\neg x_2^0\right)+\left(x_1^1+\bar{x}_1^1+x_2^0+\neg x_2^1\right)^1+$$
$$+\chi_2\left(x_1^1+\bar{x}_1^1+x_2^1+\neg x_2^0\right)+\left(x_1^2+\bar{x}_1^0+x_2^0+\neg x_2^1\right)^1.$$

4. Перетворення χ_σ(ДКТФ)$\Rightarrow$ ДКТФ. Тотожності, що забезпечують можливість виконання переходу **ііі**, визначаються таким твердженням.

Теорема 4. Нехай $\vec{\sigma}^n\in\mathbf{M}_i^n$, причому, або $\mathbf{M}_i=\mathbf{E}_{k_i}$, або $\mathbf{M}_i=\mathbf{E}_\omega$, або $\mathbf{M}_i=\mathbf{E}_{k_i}\cup\mathbf{E}_\omega$. Нехай також $\delta_{\vec{\sigma}^n}(\vec{x}^n)=\begin{cases}0,\ \text{якщо } \vec{x}^n=\vec{\sigma}^n,\\ \omega,\ \text{якщо } \vec{x}^n\neq\vec{\sigma}^n\end{cases}$ – характеристична функція набору $\vec{\sigma}^n$. Тоді

$$\chi_\alpha\left(\sum_{\{\vec{\sigma}^n\}}\chi_{\beta_{\vec{\sigma}^n}}\left(\delta_{\vec{\sigma}^n}(\vec{x}^n)\right)+\sum_{\mathbf{M}_i^n\setminus\{\vec{\sigma}^n\}}\vartheta_{\nu_{\vec{\sigma}^n}}\left(\delta_{\vec{\sigma}^n}(\vec{x}^n)\right)\right)=\sum_{\{\vec{\sigma}^n|\alpha>\beta_{\vec{\sigma}^n}\}}\chi_{\alpha-\beta_{\vec{\sigma}^n}}\left(\delta_{\vec{\sigma}^n}(\vec{x}^n)\right)+\sum_{\{\vec{\sigma}^n|\nu_{\vec{\sigma}^n}=0\}}\chi_\alpha\left(\delta_{\vec{\sigma}^n}(\vec{x}^n)\right)+$$
$$+\sum_{\mathbf{M}_i^n\setminus\{\vec{\sigma}^n|\alpha>\beta_{\vec{\sigma}^n}\}\cup\{\vec{\sigma}^n|\nu_{\vec{\sigma}^n}=0\}}\chi_0\left(\delta_{\vec{\sigma}^n}(\vec{x}^n)\right). \qquad (16)$$

Доведення. Очевидно, що $\{\vec{\sigma}^n\,|\,\alpha>\beta_{\vec{\sigma}^n}\}\subseteq\{\vec{\sigma}^n\}$. Нехай $\vec{x}^n=\vec{\sigma}_1^n$ і $\vec{\sigma}_1^n\in\{\vec{\sigma}^n\,|\,\alpha>\beta_{\vec{\sigma}^n}\}$. Тоді на підставі означення характеристичної функції і операцій $\mathbf{S_N}$-алгебри ліву частину співвідношення (16) можна перетворити так

$$\chi_\alpha\left(\sum_{\{\vec{\sigma}^n\}}\chi_{\beta_{\vec{\sigma}^n}}\left(\delta_{\vec{\sigma}^n}(\vec{\sigma}_1^n)\right)+\sum_{\mathbf{M}_i^n\setminus\{\vec{\sigma}^n\}}\vartheta_{\nu_{\vec{\sigma}^n}}\left(\delta_{\vec{\sigma}^n}(\vec{\sigma}_1^n)\right)\right)=\chi_\alpha\left(\chi_{\beta_{\vec{\sigma}_1^n}}(0)+\sum_{\{\vec{\sigma}^n\}\setminus\vec{\sigma}_1^n}\chi_{\beta_{\vec{\sigma}^n}}(\omega)+\sum_{\mathbf{M}_i^n\setminus\{\vec{\sigma}^n\}}\vartheta_{\nu_{\vec{\sigma}^n}}(\omega)\right)=$$
$$=\chi_\alpha\left(\beta_{\vec{\sigma}_1^n}\right)=\alpha-\beta_{\vec{\sigma}_1^n}$$

Відповідно, для правої частини (16) можна записати

$$\sum_{\{\vec{\sigma}^n|\alpha>\beta_{\vec{\sigma}^n}\}}\chi_{\alpha-\beta_{\vec{\sigma}^n}}\left(\delta_{\vec{\sigma}^n}(\vec{\sigma}_1^n)\right)+\sum_{\{\vec{\sigma}^n|\nu_{\vec{\sigma}^n}=0\}}\chi_\alpha\left(\delta_{\vec{\sigma}^n}(\vec{\sigma}_1^n)\right)+\sum_{\mathbf{M}_i^n\setminus\{\vec{\sigma}^n|\alpha>\beta_{\vec{\sigma}^n}\}\cup\{\vec{\sigma}^n|\nu_{\vec{\sigma}^n}=0\}}\chi_0\left(\delta_{\vec{\sigma}^n}(\vec{\sigma}_1^n)\right)=\chi_{\alpha-\beta_{\vec{\sigma}_1^n}}(0)+$$
$$+\sum_{\{\vec{\sigma}^n|\alpha>\beta_{\vec{\sigma}^n}\}\setminus\vec{\sigma}_1^n}\chi_{\alpha-\beta_{\vec{\sigma}^n}}(\omega)+\sum_{\{\vec{\sigma}^n|\nu_{\vec{\sigma}^n}=0\}}\chi_\alpha(\omega)=\alpha-\beta_{\vec{\sigma}_1^n}.$$

Отже, у такому разі тотожність (16) справедлива.

Нехай тепер $\vec{x}^n=\vec{\sigma}_2^n$ і $\vec{\sigma}_2^n \notin \left\{\vec{\sigma}^n \mid \alpha>\beta_{\vec{\sigma}^n}\right\}$, но $\vec{\sigma}_2^n \in \left\{\vec{\sigma}^n\right\}$. Тоді в лівій частині (16) маємо:

$$\chi_\alpha\left(\sum_{\{\vec{\sigma}^n\}}\chi_{\beta_{\vec{\sigma}^n}}\left(\delta_{\vec{\sigma}^n}\left(\vec{\sigma}_2^n\right)\right)+\sum_{\mathbf{M}_i^n\setminus\{\vec{\sigma}^n\}}\vartheta_{\nu_{\vec{\sigma}^n}}\left(\delta_{\vec{\sigma}^n}\left(\vec{\sigma}_2^n\right)\right)\right)=\chi_\alpha\left(\chi_{\beta_{\vec{\sigma}_2^n}}(0)+\sum_{\{\vec{\sigma}^n\}\setminus\vec{\sigma}_2^n}\chi_{\beta_{\vec{\sigma}^n}}(\omega)+\sum_{\mathbf{M}_i^n\setminus\{\vec{\sigma}^n\}}\vartheta_{\nu_{\vec{\sigma}^n}}(\omega)\right)=$$
$$=\chi_\alpha\left(\beta_{\vec{\sigma}_2^n}\right)=0.$$

У такому разі $\chi_\alpha\left(\beta_{\vec{\sigma}_2^n}\right)=0$, так як з $\vec{x}^n=\vec{\sigma}_2^n$, $\vec{\sigma}_2^n \notin \left\{\vec{\sigma}^n \mid \alpha>\beta_{\vec{\sigma}^n}\right\}$ і $\vec{\sigma}_2^n \in \left\{\vec{\sigma}^n\right\}$ випливає, що $\beta_{\vec{\sigma}_2^n}\geq\alpha$. Відповідно, права частина (16) набуде вигляду

$$\sum_{\{\vec{\sigma}^n\mid\alpha>\beta_{\vec{\sigma}^n}\}}\chi_{\alpha-\beta_{\vec{\sigma}^n}}\left(\delta_{\vec{\sigma}^n}\left(\vec{\sigma}_2^n\right)\right)+\sum_{\{\vec{\sigma}^n\mid\nu_{\vec{\sigma}^n}=0\}}\chi_\alpha\left(\delta_{\vec{\sigma}^n}\left(\vec{\sigma}_2^n\right)\right)+\sum_{\mathbf{M}_i^n\setminus\{\vec{\sigma}^n\mid\alpha>\beta_{\vec{\sigma}^n}\}\cup\{\vec{\sigma}^n\mid\nu_{\vec{\sigma}^n}=0\}}\chi_0\left(\delta_{\vec{\sigma}^n}\left(\vec{\sigma}_2^n\right)\right)=\sum_{\{\vec{\sigma}^n\mid\alpha>\beta_{\vec{\sigma}^n}\}}\chi_{\alpha-\beta_{\vec{\sigma}^n}}(\omega)+$$
$$+\sum_{\{\vec{\sigma}^n\mid\nu_{\vec{\sigma}^n}=0\}}\chi_\alpha(\omega)=0,$$

тобто тотожність (16) за цих умов виконується.

Нехай $\vec{x}^n=\vec{\sigma}_3^n$ і $\vec{\sigma}_3^n\in\left\{\vec{\sigma}^n \mid \vartheta_{\vec{\sigma}^n}=0\right\}$. Тоді в лівій частині співвідношення (16) отримаємо:

$$\chi_\alpha\left(\sum_{\{\vec{\sigma}^n\}}\chi_{\beta_{\vec{\sigma}^n}}\left(\delta_{\vec{\sigma}^n}\left(\vec{\sigma}_3^n\right)\right)+\sum_{\mathbf{M}_i^n\setminus\{\vec{\sigma}^n\}}\vartheta_{\nu_{\vec{\sigma}^n}}\left(\delta_{\vec{\sigma}^n}\left(\vec{\sigma}_3^n\right)\right)\right)=\chi_\alpha\left(\sum_{\{\vec{\sigma}^n\}}\chi_{\beta_{\vec{\sigma}^n}}(\omega)+\vartheta_{\nu_{\vec{\sigma}_3^n}}(0)+\sum_{\mathbf{M}_i^n\setminus\{\vec{\sigma}^n\}}\vartheta_{\nu_{\vec{\sigma}^n}}(\omega)\right)=$$
$$=\chi_\alpha(0)=\alpha.$$

Тут $\vartheta_{\nu_{\vec{\sigma}_3^n}}(0)=0$, так як $\vec{\sigma}_3^n\in\left\{\vec{\sigma}^n \mid \vartheta_{\vec{\sigma}^n}=0\right\}$. Водночас права частина може бути обчислена як

$$\sum_{\{\vec{\sigma}^n\mid\alpha>\beta_{\vec{\sigma}^n}\}}\chi_{\alpha-\beta_{\vec{\sigma}^n}}\left(\delta_{\vec{\sigma}^n}\left(\vec{\sigma}_3^n\right)\right)+\sum_{\{\vec{\sigma}^n\mid\nu_{\vec{\sigma}^n}=0\}}\chi_\alpha\left(\delta_{\vec{\sigma}^n}\left(\vec{\sigma}_3^n\right)\right)+\sum_{\mathbf{M}_i^n\setminus\{\vec{\sigma}^n\mid\alpha>\beta_{\vec{\sigma}^n}\}\cup\{\vec{\sigma}^n\mid\nu_{\vec{\sigma}^n}=0\}}\chi_0\left(\delta_{\vec{\sigma}^n}\left(\vec{\sigma}_3^n\right)\right)=\sum_{\{\vec{\sigma}^n\mid\alpha>\beta_{\vec{\sigma}^n}\}}\chi_{\alpha-\beta_{\vec{\sigma}^n}}(\omega)+$$
$$+\chi_\alpha(0)+\sum_{\{\vec{\sigma}^n\mid\nu_{\vec{\sigma}^n}=0\}\setminus\vec{\sigma}_3^n}\chi_\alpha(\omega)=\chi_\alpha(0)=\alpha,$$

тобто і у такому разі тотожність (16) виконується.

Нарешті, нехай $\vec{x}^n=\vec{\sigma}_4^n$ і $\vec{\sigma}_4^n\notin\left\{\vec{\sigma}^n \mid \vartheta_{\vec{\sigma}^n}=0\right\}$. Тоді ліву частину виразу (16) запишемо так:

$$\chi_\alpha\left(\sum_{\{\vec{\sigma}^n\}}\chi_{\beta_{\vec{\sigma}^n}}\left(\delta_{\vec{\sigma}^n}\left(\vec{\sigma}_4^n\right)\right)+\sum_{\mathbf{M}_i^n\setminus\{\vec{\sigma}^n\}}\vartheta_{\nu_{\vec{\sigma}^n}}\left(\delta_{\vec{\sigma}^n}\left(\vec{\sigma}_4^n\right)\right)\right)=\chi_\alpha\left(\sum_{\{\vec{\sigma}^n\}}\chi_{\beta_{\vec{\sigma}^n}}(\omega)+\vartheta_{\nu_{\vec{\sigma}_4^n}}(0)+\sum_{\mathbf{M}_i^n\setminus\{\vec{\sigma}^n\}\cup\vec{\sigma}_4^n}\vartheta_{\nu_{\vec{\sigma}^n}}(\omega)\right)=$$
$$=\chi_\alpha(\omega)=0.$$

Права ж частина співвідношення (16) дорівнює

$$\sum_{\{\vec{\sigma}^n\mid\alpha>\beta_{\vec{\sigma}^n}\}}\chi_{\alpha-\beta_{\vec{\sigma}^n}}\left(\delta_{\vec{\sigma}^n}\left(\vec{\sigma}_4^n\right)\right)+\sum_{\{\vec{\sigma}^n\mid\nu_{\vec{\sigma}^n}=0\}}\chi_\alpha\left(\delta_{\vec{\sigma}^n}\left(\vec{\sigma}_4^n\right)\right)+\sum_{\mathbf{M}_i^n\setminus\{\vec{\sigma}^n\mid\alpha>\beta_{\vec{\sigma}^n}\}\cup\{\vec{\sigma}^n\mid\nu_{\vec{\sigma}^n}=0\}}\chi_0\left(\delta_{\vec{\sigma}^n}\left(\vec{\sigma}_4^n\right)\right)=\sum_{\{\vec{\sigma}^n\mid\alpha>\beta_{\vec{\sigma}^n}\}}\chi_{\alpha-\beta_{\vec{\sigma}^n}}(\omega)+$$
$$+\sum_{\{\vec{\sigma}^n\mid\nu_{\vec{\sigma}^n}=0\}}\chi_\alpha(\omega)=\chi_\alpha(0)=0.$$

Отже, маємо рівність лівої і правої частин. Оскільки цим вичерпано всі можливості вибору довільного набору, то Q.E.D.

Наслідок 4.1. Нехай $\left\{\vec{\sigma}^n\right\}=\mathbf{M}_i^n$. Тоді

$$\chi_\alpha\left(\sum_{\forall\vec{\sigma}^n}\chi_{\beta_{\vec{\sigma}^n}}\left(\delta_{\vec{\sigma}^n}\left(\vec{x}^n\right)\right)\right)=\sum_{\forall\vec{\sigma}^n\mid\alpha>\beta_{\vec{\sigma}^n}}\chi_{\alpha-\beta_{\vec{\sigma}^n}}\left(\delta_{\vec{\sigma}^n}\left(\vec{x}^n\right)\right)+\sum_{\forall\vec{\sigma}^n\mid\alpha\leq\beta_{\vec{\sigma}^n}}\chi_0\left(\delta_{\vec{\sigma}^n}\left(\vec{x}^n\right)\right). \tag{17}$$

Наслідок 4.2. Якщо $\left\{\vec{\sigma}^n\right\}=\varnothing$, то

$$\chi_\alpha\left(\sum_{\forall\vec{\sigma}^n}\vartheta_{\nu_{\vec{\sigma}^n}}\left(\delta_{\vec{\sigma}^n}\left(\vec{x}^n\right)\right)\right)=\sum_{\{\vec{\sigma}^n\mid\nu_{\vec{\sigma}^n}=0\}}\chi_\alpha\left(\delta_{\vec{\sigma}^n}\left(\vec{x}^n\right)\right)+\sum_{\mathbf{M}_i^n\setminus\{\vec{\sigma}^n\mid\nu_{\vec{\sigma}^n}=0\}}\chi_0\left(\delta_{\vec{\sigma}^n}\left(\vec{x}^n\right)\right). \tag{18}$$

Оскільки будь-яка **ДКТФ**, що записана за всіма значеннями функції (включаючи нульові), задовольняє або умови теореми 4, або її наслідки, то рівності (16)–(18) забезпечують виконання перетворень типу **iii**.

Приклад 7. Нехай $x|\mathbf{E}_3 \cup \mathbf{E}_\omega$. Привести $\chi_2(x)$ до **ДКТФ**. Скористаємось результатом прикладу 2. Тоді

$$\chi_2(x)=\chi_2\left(\chi_0\left(x^0+\bar{x}^3\right)+\chi_1\left(x^1+\bar{x}^2\right)+\chi_2\left(x^2+\bar{x}^1\right)+\left(x^3+\bar{x}^0\right)^1\right).$$

Одержаний вираз задовольняє тотожність (16). Тому:

$$\chi_2(x)=\chi_2\left(x^0+\bar{x}^3\right)+\chi_1\left(x^1+\bar{x}^2\right)+\chi_0\left(x^2+\bar{x}^1\right)+\chi_0\left(x^3+\bar{x}^0\right).$$

Зауваження. Якщо б спочатку ми скористались остаточним результатом з прикладу 2, тобто “забули” про нейтральний доданок, то отримали б відповідно

$$\chi_2(x)=\chi_2\left(\chi_1\left(x^1+\bar{x}^2\right)+\chi_2\left(x^2+\bar{x}^1\right)+\left(x^3+\bar{x}^0\right)^1\right)=\chi_1\left(x^1+\bar{x}^2\right)+\chi_0\left(x^2+\bar{x}^1\right)+\chi_0\left(x^3+\bar{x}^0\right),$$

що неправильно, оскільки (16) в такому разі застосовувати не можна, оскільки умови теореми 4 не виконуються. З цієї причини і рекомендовано вилучати нейтральні доданки лише після закінчення всіх перетворень. Наприклад, в розглядуваному прикладі кінцевий результат такий:

$$\chi_2(x)=\chi_2\left(x^0+\bar{x}^3\right)+\chi_1\left(x^1+\bar{x}^2\right).$$

Приклад 8. Перетворити в **ДКТФ** формулу $\chi_3(x)$, де $x|\mathbf{E}_5$. У такому разі:

$$\chi_3(x)=\chi_3\left(\chi_0\left(x^0+\bar{x}^4\right)+\chi_1\left(x^1+\bar{x}^3\right)+\chi_2\left(x^2+\bar{x}^2\right)+\chi_3\left(x^3+\bar{x}^1\right)+\chi_4\left(x^4+\bar{x}^0\right)\right).$$

Відповідно до (17) і **C11**, **C12** отримаємо

$$\chi_3(x)=\chi_3\left(x^0+\bar{x}^4\right)+\chi_2\left(x^1+\bar{x}^3\right)+\chi_1\left(x^2+\bar{x}^2\right).$$

Приклад 9. Перетворити в **ДКТФ** формулу $\chi_1(x)$, де $x|\mathbf{E}_\omega$. Внаслідок (10), (18) і **C11–C13** маємо:

$$\chi_1(x)=\chi_1\left(\left(x^0+\neg x^1\right)^0+\left(x^1+\neg x^0\right)^1\right)=\chi_1\left(x^0+\neg x^1\right).$$

Той самий результат отримаємо, записавши **ДКТФ** безпосередньо за таблицею істинності функції $\chi_1(x)$.

5. Перетворення ϑ_σ(ДКТФ) $\Rightarrow$ ДКТФ. Тотожності для виконання переходу **iiii** отримані на підставі такої теореми.

Теорема 5. Нехай $\vec{\sigma}^n \in \mathbf{M}_i^n$, причому, або $\mathbf{M}_i=\mathbf{E}_{k_i}$, або $\mathbf{M}_i=\mathbf{E}_\omega$, або $\mathbf{M}_i=\mathbf{E}_{k_i}\cup\mathbf{E}_\omega$. Нехай також $\delta_{\vec{\sigma}^n}\left(\vec{x}^n\right)$ – характеристична функція набору $\vec{\sigma}^n$. Тоді

$$\vartheta_\alpha\left(\sum_{\{\vec{\sigma}^n\}}\chi_{\beta_{\vec{\sigma}^n}}\left(\delta_{\vec{\sigma}^n}\left(\vec{x}^n\right)\right)+\sum_{\mathbf{M}_i^n\setminus\{\vec{\sigma}^n\}}\vartheta_{\nu_{\vec{\sigma}^n}}\left(\delta_{\vec{\sigma}^n}\left(\vec{x}^n\right)\right)\right)=\sum_{\{\vec{\sigma}^n|\alpha>\beta_{\vec{\sigma}^n}\&\nu_{\vec{\sigma}^n}=0\}}\vartheta_1\left(\delta_{\vec{\sigma}^n}\left(\vec{x}^n\right)\right)+\sum_{\mathbf{M}_i^n\setminus\{\vec{\sigma}^n|\alpha>\beta_{\vec{\sigma}^n}\&\nu_{\vec{\sigma}^n}=0\}}\vartheta_0\left(\delta_{\vec{\sigma}^n}\left(\vec{x}^n\right)\right). \quad (19)$$

Теорема доводиться прямою перевіркою аналогічно до доведення попередньої теореми.

Наслідок 5.1. Нехай $\{\vec{\sigma}^n\}=\mathbf{M}_i^n$. Тоді

$$\vartheta_\alpha\left(\sum_{\forall\vec{\sigma}^n}\chi_{\beta_{\vec{\sigma}^n}}\left(\delta_{\vec{\sigma}^n}\left(\vec{x}^n\right)\right)\right)=\sum_{\forall\vec{\sigma}^n|\alpha>\beta_{\vec{\sigma}^n}}\vartheta_1\left(\delta_{\vec{\sigma}^n}\left(\vec{x}^n\right)\right)+\sum_{\forall\vec{\sigma}^n|\alpha\le\beta_{\vec{\sigma}^n}}\vartheta_0\left(\delta_{\vec{\sigma}^n}\left(\vec{x}^n\right)\right). \quad (20)$$

Наслідок 5.2. Якщо $\{\vec{\sigma}^n\}=\varnothing$, то

$$\chi_\alpha\left(\sum_{\forall\vec{\sigma}^n}\vartheta_{\nu_{\vec{\sigma}^n}}\left(\delta_{\vec{\sigma}^n}\left(\vec{x}^n\right)\right)\right)=\sum_{\{\vec{\sigma}^n|\nu_{\vec{\sigma}^n}=0\}}\vartheta_1\left(\delta_{\vec{\sigma}^n}\left(\vec{x}^n\right)\right)+\sum_{\mathbf{M}_i^n\setminus\{\vec{\sigma}^n|\nu_{\vec{\sigma}^n}=0\}}\vartheta_0\left(\delta_{\vec{\sigma}^n}\left(\vec{x}^n\right)\right). \quad (21)$$

Оскільки будь-яка **ДКТФ**, що записана за всіма значеннями функції (включаючи нульові), задовольняє або умови теореми 5, або її наслідки, то рівності (19)–(21) забезпечують виконання перетворень типу **iiii**.

Приклад 10. Нехай $x|\mathbf{E}_3 \cup \mathbf{E}_\omega$. Привести $\vartheta_2(x)$ до **ДКТФ**.

Використаємо результат прикладу 2. Тоді

$$\vartheta_2(x)=\vartheta_2\left(\chi_0\left(x^0+\bar{x}^3\right)+\chi_1\left(x^1+\bar{x}^2\right)+\chi_2\left(x^2+\bar{x}^1\right)+\left(x^3+\bar{x}^0\right)^1\right).$$

Застосувавши до правої частини співвідношення (19) і **C11**, отримаємо:

$$\vartheta_2(x)=\left(x^0+\bar{x}^3\right)^1+\left(x^1+\bar{x}^2\right)^1.$$

Приклад 11. Нехай $(x_1+1)\,\mathbf{mod}\ \mathbf{3}$ і $\neg x_2$ - функції відповідно тризначна і булева, які задані в **ДКТФ**. Приведемо $\vartheta_3\left(\chi_3\left((x_1+1)\,\mathbf{mod}\ \mathbf{3}\right)+\neg x_2\right)$ до **ДКТФ**.

Приведення будемо виконувати за структурою заданої формули. Тому

$$(x_1+1)\,\mathbf{mod}\ \mathbf{3}=\chi_1\left(x_1^0+\bar{x}_1^2\right)+\chi_2\left(x_1^1+\bar{x}_1^1\right)+\chi_0\left(x_1^2+\bar{x}_1^0\right),\quad \neg x_2=\left(x_2^0+\neg x_2^1\right)^1+\left(x_2^1+\neg x_2^0\right)^0.$$

Далі можна записати:

$$\chi_3\left((x_1+1)\,\mathbf{mod}\ \mathbf{3}\right)=\chi_3\left(\chi_1\left(x_1^0+\bar{x}_1^2\right)+\chi_2\left(x_1^1+\bar{x}_1^1\right)+\chi_0\left(x_1^2+\bar{x}_1^0\right)\right).$$

Приведемо останній вираз до **ДКТФ**:

$$\chi_3\left((x_1+1)\,\mathbf{mod}\ \mathbf{3}\right)=\chi_2\left(x_1^0+\bar{x}_1^2\right)+\chi_1\left(x_1^1+\bar{x}_1^1\right)+\chi_3\left(x_1^2+\bar{x}_1^0\right).$$

Тепер до результату додамо $\neg x_2$

$$\chi_3\left((x_1+1)\,\mathbf{mod}\ \mathbf{3}\right)+\neg x_2=\chi_2\left(x_1^0+\bar{x}_1^2\right)+\chi_1\left(x_1^1+\bar{x}_1^1\right)+\chi_3\left(x_1^2+\bar{x}_1^0\right)+\left(x_2^0+\neg x_2^1\right)^1+\left(x_2^1+\neg x_2^0\right)^0.$$

Згідно з співвідношенями (13) і (14) введемо x_1 в доданки, що не містять x_1 і x_2 в доданки, що не містять x_2, тобто:

$$\begin{aligned}\chi_3\left((x_1+1)\,\mathbf{mod}\ \mathbf{3}\right)+\neg x_2 &=\chi_2\left(x_1^0+\bar{x}_1^2+x_2^0+\neg x_2^1\right)+\chi_2\left(x_1^0+\bar{x}_1^2+x_2^1+\neg x_2^0\right)+\chi_1\left(x_1^1+\bar{x}_1^1+x_2^0+\neg x_2^1\right)+\\&+\chi_1\left(x_1^1+\bar{x}_1^1+x_2^1+\neg x_2^0\right)+\chi_3\left(x_1^2+\bar{x}_1^0+x_2^0+\neg x_2^1\right)+\chi_3\left(x_1^2+\bar{x}_1^0+x_2^1+\neg x_2^0\right)+\left(x_1^0+\bar{x}_1^2+x_2^0+\neg x_2^1\right)^1+\\&+\left(x_1^1+\bar{x}_1^1+x_2^0+\neg x_2^1\right)^1+\left(x_1^2+\bar{x}_1^0+x_2^0+\neg x_2^1\right)^1++\left(x_1^0+\bar{x}_1^2+x_2^1+\neg x_2^0\right)^0+\left(x_1^1+\bar{x}_1^1+x_2^1+\neg x_2^0\right)^0+\\&+\left(x_1^2+\bar{x}_1^0+x_2^1+\neg x_2^0\right)^0.\end{aligned}$$

До отриманого виразу застосуємо тотожності **C19**, **C11** і **C3**, зберігаючи формальний запис всіх точок відображення.

$$\begin{aligned}\chi_3\left((x_1+1)\,\mathbf{mod}\ \mathbf{3}\right)+\neg x_2 &=\left(x_1^0+\bar{x}_1^2+x_2^0+\neg x_2^1\right)^1+\chi_2\left(x_1^0+\bar{x}_1^2+x_2^1+\neg x_2^0\right)+\left(x_1^1+\bar{x}_1^1+x_2^0+\neg x_2^1\right)^1+\\&+\chi_1\left(x_1^1+\bar{x}_1^1+x_2^1+\neg x_2^0\right)+\left(x_1^2+\bar{x}_1^0+x_2^0+\neg x_2^1\right)^1+\chi_3\left(x_1^2+\bar{x}_1^0+x_2^1+\neg x_2^0\right).\end{aligned}$$

Після цього відповідно до заданої формули запишемо:

$$\begin{aligned}\vartheta_3\left(\chi_3\left((x_1+1)\,\mathbf{mod}\,\mathbf{3}\right)+\neg x_2\right) &=\vartheta_3\Big(\left(x_1^0+\bar{x}_1^2+x_2^0+\neg x_2^1\right)^1+\chi_2\left(x_1^0+\bar{x}_1^2+x_2^1+\neg x_2^0\right)+\left(x_1^1+\bar{x}_1^1+x_2^0+\neg x_2^1\right)^1+\\&+\chi_1\left(x_1^1+\bar{x}_1^1+x_2^1+\neg x_2^0\right)+\left(x_1^2+\bar{x}_1^0+x_2^0+\neg x_2^1\right)^1+\chi_3\left(x_1^2+\bar{x}_1^0+x_2^1+\neg x_2^0\right)\Big)\end{aligned}$$

Наведемо праву частину отриманого виразу до **ДКТФ**.

$$\begin{aligned}\vartheta_3\left(\chi_3\left((x_1+1)\,\mathbf{mod}\ \mathbf{3}\right)+\neg x_2\right) &=\left(x_1^0+\bar{x}_1^2+x_2^0+\neg x_2^1\right)^0+\left(x_1^0+\bar{x}_1^2+x_2^1+\neg x_2^0\right)^1+\left(x_1^1+\bar{x}_1^1+x_2^0+\neg x_2^1\right)^0+\\&+\left(x_1^1+\bar{x}_1^1+x_2^1+\neg x_2^0\right)^1+\left(x_1^2+\bar{x}_1^0+x_2^0+\neg x_2^1\right)^0+\left(x_1^2+\bar{x}_1^0+x_2^1+\neg x_2^0\right)^0.\end{aligned}$$

Нарешті, усунемо всі нейтральні доданки. Одержимо:

$$\vartheta_3\left(\chi_3\left((x_1+1)\,\mathbf{mod}\ \mathbf{3}\right)+\neg x_2\right)=\left(x_1^0+\bar{x}_1^2+x_2^1+\neg x_2^0\right)^1+\left(x_1^1+\bar{x}_1^1+x_2^1+\neg x_2^0\right)^1.$$

6. Про зворотні перетворення. *Зворотними перетвореннями* називатимемо приведення **ДКТФ** до будь-якої іншої формули, що дорівнює їй.

Нескладними міркуваннями можна впевнитися, що визначена система тотожностей відповідає також і всім умовам розв'язання задачі про тотожні перетворення, тобто за їхньою допомогою можна виконувати і зворотні перетворення.

Дійсно, розглянемо множину всіх рівних формул, що реалізують певну функцію. Візьмемо будь-яку формулу з цієї множини. Відповідно до операційного складу і структури вибраної формули приведемо її за допомогою знайденої системи тотожностей до **ДКТФ** – формули, яка, до речі, також належить розглядуваній множині за її означенням. Це приведення до **ДКТФ** є зворотним, проте простим лише тоді, коли відома послідовність тотожностей, що використана для приведення до **ДКТФ** вихідного виразу. Оскільки маємо саме таку ситуацію, то, очевидно, з урахуванням отриманої **ДКТФ**, але виконуючи перетворення за тими самими тотожностями в зворотній послідовності, отримаємо вихідну формулу. Зробимо те саме з усіма формулами розглядуваної множини. Кожне з цієї множини перетворень містить ланцюжок перетворень, виконуваних в зворотній послідовності, – від **ДКТФ** до вихідної формули. Цілком ясно, що в сукупності останні відображають конструкцію перетворень від **ДКТФ**, яка єдина і сама не перетворюється, до всіх формул, які дорівнюють їй. Цей уявний експеримент завершує доведення повноти в S_N-алгебрі (в сенсі задачі про тотожні перетворення) описаної системи тотожностей.

Висновки. Розглянутий підхід порівняно з класичним значно спрощує пошук розв'язання важливої задачі про тотожні перетворення формул, зокрема в S_N-алгебрі.

1. Кметь А.Б. Интегральная точковая логика. – Львов, 1998. 2. Куликов Л.Я. Алгебра и теория чисел. – М., 1979. 3. Kmet' À.B., On the representation of discrete function. Introduction to S_N-algebra, Proceedings of 5th Internationel conference on telecommunications in modern satellite, cable and broadcasting, p.p. 37-46, Nis, 2001. 4. Линдон Р.К. Тождества в конечных алгебрах / Под ред. А.А. Ляпунова и О.Б. Лупанова // Кибернетический сборник. – М., 1960. – №1. – С. 246–249.

УДК 621

О.М. Колодчак, А.О. Мельник
Національний університет "Львівська політехніка",
кафедра електронних обчислювальних машин

МОДИФІКОВАНИЙ ГЕНЕТИЧНИЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ ПОШУКУ ОПТИМАЛЬНИХ РІШЕНЬ ПРИ ПРОЕКТУВАННІ ЦИФРОВИХ СТРУКТУР

Запропоновано описання розробленого модифікованого генетичного алгоритму, що використовується у новому підході до пошуку оптимальних рішень при проектуванні цифрових структур підбиранням необхідних елементів бібліотеки.

It is proposed the description of modificated genetic algorithm that is used for optimal solutions in new approach during creation of the digital structures by selection needed elements from the library.

Вступ. Генетичні алгоритми в різних формах застосовуються у вирішенні багатьох наукових і технічних проблем. Генетичні алгоритми використовуються для створення обчислювальних структур, наприклад, автоматів чи мереж сортування. У машинному навчанні вони використовувалися при проектуванні нейронних мереж чи керуванні роботами. Їх також застосовують для моделювання розвитку в різних предметних галузях, включаючи біологічні (екологія, імунологія і популяційна генетика), соціальні (такі, як економіка і політичні системи) і когнітивні системи.

Тим не менше, можливо, найпопулярніша галузь застосування генетичних алгоритмів – оптимізація багатопараметричних функцій. Значна кількість реальних задач можуть бути сформульовані як пошук оптимального значення, де значення – складна функція, що залежить від деяких