УДК 531.36+534

І. Дронюк, М. Назаркевич
Національний університет "Львівська політехніка",
кафедра автоматизованих систем управління

РОЗРОБКА ПРОГРАМНОГО ПАКЕТА ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ КОЛИВНИХ СИСТЕМ

© *Дронюк І., Назаркевич М., 2005*

Описано математичні моделі точних розв'язків для деяких класів нелінійних систем диференційних рівнянь теорії другого порядку. Розглянуто системи загального вигляду, одержано точні розв'язки з узагальненим і функціональним розділенням змінних. Розглянуто комп'ютерне моделювання нелінійних автономних механічних систем.

Described mathematical models of exact decisions for some classes of the nonlinear systems of differential equalizations of theory of the second order. The systems of general view are examined. Got exact decisions with the generalized and functional division of variables. Considered computer design of the nonlinear off-line mechanical systems.

Вступ

Ми постійно спостерігаємо природні лінійні та нелінійні коливання – зміну пори року, дня і ночі, океанські припливи і відпливи, сонячну активність, геологічні процеси, землетруси та ін. Періодичність коливань, в яких існує весь світ, коливається від часток секунди до сотень мільйонів років.

Багато явищ можна виміряти: тривалість поділу живої клітини, частоту биття серця. Але для того, щоб знати, як народжується, живе чи помирає організм, необхідно порівнювати безліч даних, заснованих на спостереженні за коливаннями, котрі відтворюють одні і ті самі події через рівні проміжки часу.

Одночасно вивчення коливних процесів породжує питання стійкості системи.

До розв'язання нелінійних систем диференціальних рівнянь, що описують коливання, зводиться багато задач механіки, фізики, техніки. Отже, вивчення методів теорії нелінійних коливань диктується необхідністю розв'язання різноманітних прикладних задач.

Сьогодні розв'язання задач стійкості і коливань, описаних нелінійними системами, пов'язане з подоланням значних труднощів. Значно ускладнюється дослідження задач стійкості із зростанням числа змінних. Необхідність залучення до розгляду нелінійних форм високих порядків також призводить до ускладнення розв'язання задачі. Значні труднощі виникають під час розв'язування задач стійкості у різних резонансних ситуаціях.

АТЕВ-функції як математичний апарат для моделювання істотно нелінійних систем

У теорії коливань доволі складними є питання дослідження істотно нелінійних систем, отримання оцінок величини малого параметра, при якій існують обмежені коливання в системі.

Такі системи вимагають конкретного підходу до розгляду кожної із них і вони певною мірою розглядались тільки для автономних систем з одним ступенем вільності. Числові ж методи з використанням сучасної обчислювальної техніки дають змогу розв'язувати нелінійні рівняння. Цього було б достатньо для аналізу руху конкретно спроектованої системи. Проте для самого проектування складних систем, визначення їх оптимальної структури, вибору співвідношень між параметрами із заданими вимогами до їх руху цих методів явно недостатньо. Для розв'язання таких

задач просте числове інтегрування нераціональне, а іноді взагалі неможливе: вимагає аналізу великої кількості рівнянь, а також аналізу різного співвідношення між параметрами і т.д.

В останні десятиріччя для дослідження динамічних процесів істотно нелінійних коливних систем з одним ступенем вільності, рух яких описано за допомогою диференціальних рівнянь із степеневою нелінійністю, особливо ефективним виявилось застосування періодичних Ateb-функцій [2, 3, 4, 5]. Ateb-функції було запропоновано R. Rosenberg у 60-х рр. XX століття як обернення неповних Beta-функцій. У своїх дослідженнях П.М. Сеник у 70-х рр. XX століття розглядав Ateb-функції як розв'язання складної системи нелінійних рівнянь вигляду [3]:

$$\dot{x} + \beta\, y^m = 0, \qquad (1)$$

$$\dot{y} - \alpha x^n = 0$$

де α, β – деякі дійсні постійні, а

$$n = \frac{2v_1' + 1}{2v_1'' + 1}, \quad m = \frac{2v_2' + 1}{2v_2'' + 1}, \qquad (v_1', v_1'', v_2', v_2'' = 0, 1, 2, \ldots) \qquad (2)$$

При $\alpha > 0$, $\beta > 0$ система (1) описує коливальний рух, а при $\alpha > 0$, $\beta < 0$ – гіперболічний (аперіодичний) рух.

Періодичні Ateb-функції $sa(n, m, \omega)$ і $ca(m, n, \omega)$ є оберненням відповідних інтегралів

$$\frac{n+1}{2} \int_0^{-1 \le v \le 1} \frac{d\bar{v}}{(1 - \bar{v}^{n+1})^{\frac{m}{m+1}}} = \omega \qquad -\frac{m+1}{2} \int_1^{-1 \le u \le 1} -\frac{d\bar{u}}{(1 - \bar{u}^{m+1})^{\frac{n}{n+1}}} = \omega \qquad (3)$$

де ω – незалежна змінна $(-\infty \le \omega \le \infty)$, а m і n – параметри, які визначаються формулами (2).

Ці ж функції можуть бути використані для побудови розв'язків істотно нелінійних диференціальних рівнянь.

У цій роботі розроблено систему моделювання гіперболічних (аперіодичних) *Ateb*-функцій.

Математичні моделі гіперболічних АТЕВ-функцій

Гіперболічні Ateb-функції $v = sha(n, m, \omega)$ і $u = cha(m, n, \omega)$ являють собою обернення відповідно інтегралів

$$\frac{n+1}{2} \int_0^{0 \le v \le \infty} \frac{d\bar{v}}{(1 + \bar{v}^{n+1})^{\frac{m}{m+1}}} = \omega \qquad \frac{m+1}{2} \int_1^{1 \le u \le \infty} \frac{d\bar{u}}{(\bar{u}^{m+1} - 1)^{\frac{n}{n+1}}} = \omega \qquad (4)$$

де ω – незалежна змінна $(-\infty \le \omega \le \infty)$, а m і n – параметри, визначені формулами (2).

Функції $sha(n, m, \omega)$ і $cha(m, n, \omega)$ відносно ω- $2\Pi'(m, n)$ – періодичні, де $2\Pi' = B(\frac{1}{n+1}, \frac{m}{m+1} - \frac{1}{n+1})$ – Beta-функція. Величина $\Pi'(m, n)$ для всіх значень m і n, які визначаються формулами (2), скінченна і неперервна, за виключенням значень, що задовольняють нерівність

$$\frac{m}{m+1} - \frac{1}{n+1} \le 0 \qquad (5)$$

за яких $\Pi'(m, n)$ перетворюється в безмежність.

Гіперболічні Ateb-функції задовольняють співвідношення [3]

$$[cha(m,n,\omega)]^{n+1} - [sha(n,m,\omega)]^{n+1} = 1 \tag{6}$$

Цікавим залишається питання табулювання цих функцій. Виходячи з (4), розглянемо функції

$$\hat{O}_1(w,v) = w - \frac{n+1}{2}\int_0^v \frac{d\bar{v}}{(1+\bar{v}^{n+1})^{\frac{m}{m+1}}} \tag{7}$$

$$\Phi_2(w,u) = w - w_0 - \frac{m+1}{2}\int_1^u \frac{d\bar{u}}{\bar{u}^{\frac{n(m+1)}{n+1}}\left(1-\frac{1}{\bar{u}^{m+1}}\right)^{\frac{n}{n+1}}}, \tag{8}$$

де

$$w_0 = \frac{n+1}{2}\int_0^1 \frac{d\bar{v}}{(1+\bar{v}^{n+1})^{\frac{m}{m+1}}} \tag{9}$$

Підінтегральні вирази в (7) та (8) розкладемо у степеневі ряди. Тоді функції $\hat{O}_1(w,v)$ та $\hat{O}_2(w,u)$ матимуть вигляд:

$$\hat{O}_1(w,v) = w - \frac{b}{2}v\left[1 - \frac{a}{1!(b+1)}v^b + \frac{a(a+1)}{2!(2b+1)}v^{2b} + \ldots + (-1)^k\frac{a(a+1)\ldots(a+k-1)}{k!(kb+1)}v^{kb} + \ldots\right], \tag{10}$$

$$\hat{O}_2(w,u) = w - \bar{w} + \frac{c}{2}\frac{1}{u^{cd-1}}\left[\frac{1}{cd-1} + \frac{d}{1![c(d+1)-1]}\frac{1}{u^c} + \ldots + \frac{d(d+1)\ldots(d+k-1)}{k![c(d+k)-1]}\frac{1}{u^{kc}} + \ldots\right] \tag{11}$$

де

$$a = \frac{m}{m+1}, \quad b = n+1, \quad c = m+1, \quad d = \frac{n}{n+1},$$

$$\bar{w} = w_0 + \frac{c}{2^{\frac{c(d+1)-1}{c}}}\left[\frac{1}{cd-1} + \frac{d}{1!2[c(d+1)-1]} + \ldots + \frac{d(d+1)}{2!2^2[c(d+2)-1]} + \ldots + \frac{d(d+1)\ldots(d+k-1)}{k!2^k[c(d+k)-1]} + \ldots\right] \tag{12}$$

Розклади у ряди (10) і (11) справедливі для всіх m і n, що мають вигляд (4), припускаючи, що (5) є нерівність. Ліва частина (5) не може бути цілим числом. Отже, в розкладах (11), (12) інших нулів у знаменнику немає.

Ряди (10) та (11) збігаються рівномірно в інтервалах $0 \le v \le 1$, $1 \le u \le \infty$ [2].

Тепер для кожного фіксованого значення w із інтервалу $0 \le w \le \omega_0$ шукаємо нулі функції $\hat{O}_1(w,v)$, тобто визначаємо $v = sha(n,m,w)$, а величину $u = cha(m,n,w)$ визначаємо із співвідношення (6). При $w \ge w_0$ (тоді $u \ge 2^{\frac{1}{c}}$)1) шукаємо нуль функції $\hat{O}_2(w,u)$, тобто визначаємо $u = cha(m,n,w)$ для фіксованого w, а величину $v = sha(n,m,w)$ визначаємо із співвідношення (6).

Розробка програмного пакета для комп'ютерного моделювання гіперболічних ATEB-функцій

За формулами(10), (11), (12) здійснене комп'ютерне моделювання поведінки гіперболічних Ateb-функцій (рис. 1, 2).

Моделювання здійснювалося з точністю 10^{-9}, отримано такі значення:

$^{w}u = ch\alpha(m,n,w)$	$v = sh\alpha(n,m,w)$
0,00	1,00000
	0,00000
1	1,00045
	0,01250
2	1,00137
	0,02501
3	1,00262
	0,03754
4	1,00414
	0,05008
5	1,00592
	0,06264
6	1,00793
	0,07523
7	1,01015
	0,08784
8	1,01258
	0,10048
9	1,01519
	0,11316
0,10	1,01798
	0,12586
1	1,02096
	0,13861
2	1,02409
	0,15139
3	1,02740
	0,16421
4	1,03086
	0,17707
5	1,03447
	0,18998
6	1,03824
	0,20294
7	1,04215
	0,21594
8	1,04621
	0,22899
9	1,05041
	0,24209
0,20	1,05475
	0,25525
1	1,05923
	0,26846
2	1,06384
	0,28173
3	1,06858
	0,29506
4	1,07345
	0,30845
5	1,07845
	0,32189
6	1,08358
	0,33541
7	1,08884
	0,34899
8	1,09422
	0,36263
9	1,09972
	0,37634
0,30	1,10534
	0,39012

$^{w}u = ch\alpha(m,n,w)$	$v = sh\alpha(n,m,w)$
1	1,11109
	0,40398
2	1,11695
	0,41790
3	1,12294
	0,43190
4	1,12904
	0,44598
5	1,13526
	0,46013
6	1,14159
	0,47436
7	1,14804
	0,48867
8	1,15460
	0,50306
9	1,16128
	0,51753
0,40	1,16808
	0,53209
1	1,17498
	0,54674
2	1,18199
	0,56147
3	1,18913
	0,57629
4	1,19636
	0,59120
5	1,20372
	0,60620
6	1,21118
	0,62129
7	1,21875
	0,63648
8	1,22643
	0,65176
9	1,23422
	0,66714
0,50	1,24212
	0,68261
1	1,25012
	0,69819
2	1,25824
	0,71387
3	1,26646
	0,72965
4	1,27479
	0,74553
5	1,28323
	0,76152
6	1,29178
	0,77761
7	1,30043
	0,79381
8	1,30919
	0,81012
9	1,31805
	0,82654
0,60	1.32703
	0.84307
1	1,33611
	0,85972

$^{w}u = ch\alpha(m,n,w)$	$v = sh\alpha(n,m,w)$
2	1,34529
	0,87648
3	1,35458
	0,89335
4	1,36398
	0,91034
5	1,37349
	0,92745
6	1,38310
	0,94468
7	1,39282
	0,96203
8	1,40264
	0,97950
9	1,41257
	0,99709
0,70	1,42261
	1,01482
1	1,43275
	1,03266
2	1,44300
	1,05064
3	1,45335
	1,06874
4	1,46381
	1,08697
5	1,47438
	1,10533
6	1,48505
	1,12383
7	1,49583
	1,14246
8	1,50671
	1,16122
9	1,51770
	1,18013
0,80	1,52880
	1,19917
1	1,54001
	1,21835
2	1,55132
	1,23767
3	1,56274
	1,25713
4	1,57426
	1,27674
5	1,58589
	1,29649
6	1,59763
	1,31637
7	1,60948
	1,33643
8	1,62144
	1,35662
9	1,63350
	1,37697
0,90	1,64567
	1,39746
1	1,65794
	1,41811
2	1,67033
	1,43891

$^{w}u = ch\alpha(m,n,w)$	$v = sh\alpha(n,m,w)$
3	1,68282
	1,45986
4	1,69543
	1,48098
5	1,70814
	1,50225
6	1,72096
	1,52368
7	1,73389
	1,54528
8	1,74693
	1,56703
9	1,76007
	1,58895
1,00	1,77333
	1,61104
1	1,78670
	1,63328
2	1,80018
	1,65570
3	1,81376
	1,67829
4	1,82746
	1,70105
5	1,84127
	1,72398
6	1,85519
	1,74708
7	1,86923
	1 ,73§36
8	1,88337
	1,79381
9	1,89762
	1,81744
1,10	1,91199
	1,84125
1	1,92647
	1,86524
2	1,94106
	1,88941
3	1,95577
	1,91377
4	1,97059
	1,93831
5	1,98552
	1,96304
6	2,00056
	1,98795
7	2,01572
	2,01305
8	2,03100
	2,03834
9	2,04639
	2,06382
1.20	2,06189
	2,08950

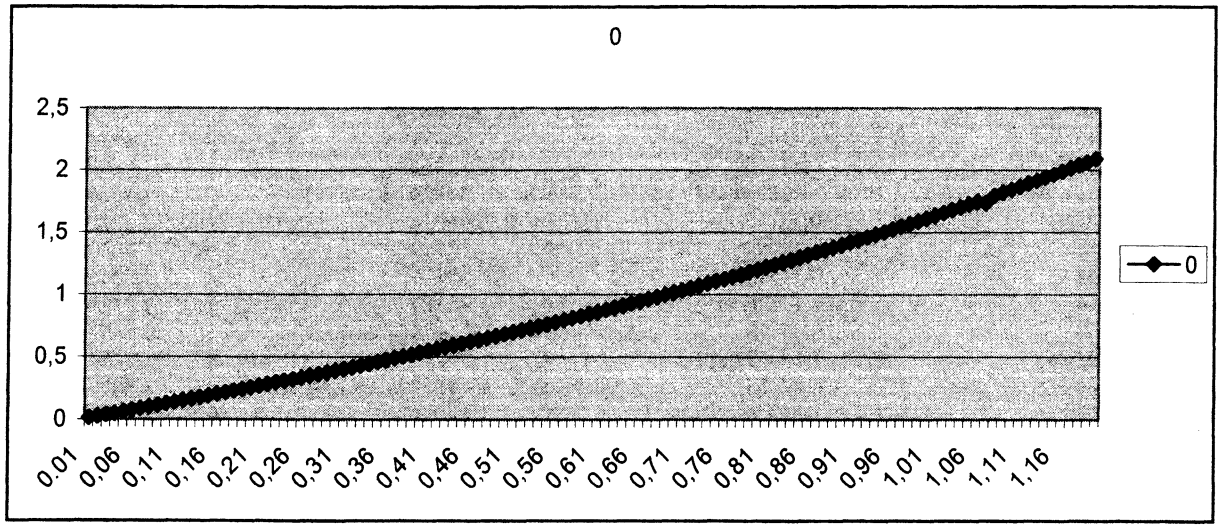

Рис. 1. Графік функції $v = sha(n, m, w)$

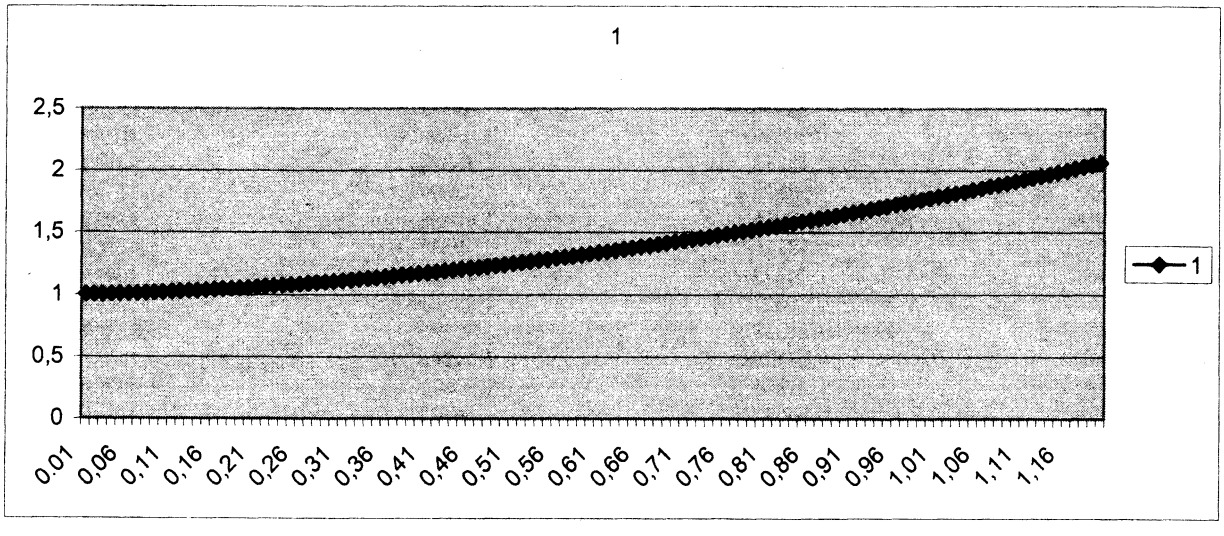

Рис. 2. Графік функції $u = cha(m, n, w)$

Відповідно зі створеними математичними моделями (4) та прийнятою технологією моделювання Ateb-функцій (10–12) розроблено програмний пакет для моделювання нелінійних коливних систем гіперболічних Ateb-функцій.

Висновок

Розроблений пакет дає змогу обчислювати і досліджувати розподіл переміщень та швидкостей стосовно нелінійних коливних систем, які задані у вигляді функцій виду (1) з одним ступенем вільності, а також оцінити статичні характеристики у контрольних точках.

1. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – 503 с. 2. Возний А.М. Застосування Ateb-функцій для побудови розв'язку одного класу істотно нелінійних диференціальних рівнянь // Доп. АН УРСР. Серія А. – 1970. – № 9,. – С. 971–974. 3. Сеник П. М. Обращение неполной Beta – функции // Укр. мат. журнал. – 1969. – Т. 21. – № 3. – С. 325–333. 4. Грицик В.В., Назаркевич М.А. Дослідження періодичних Ateb-функцій у математичному моделюванні // Мат-ли конференції "Інтелектуальні системи прийняття рішень та прикладні аспекти інформаційних технологій", 18 – 21 травня 2005, Євпаторія. – С. 142–145. 5. Nazarkevich M. Research of numeral transformations of Ateb-functions in the mathematical design // IV Sympozjum "Modelowanie i symulacja komputerowa w technice". – Lodz. Wyzsza szkola informatyki. 2005. – С. 161 – 163.