УДК 519.2

М. Васильків, Я. Єлейко, Н. Притула, *М. Притула

Львівський національний університет імені Івана Франка

*Центр математичного моделювання ІППММ НАНУ імені Я.С. Підстригача

СТОХАСТИЧНИЙ ПІДХІД ДО РОЗРАХУНКУ ПАРАМЕТРІВ КРИТЕРІЮ ОЦІНКИ ОПТИМАЛЬНОСТІ ОБ'ЄДНАННЯ ПОТОКІВ КОРЕСПОНДЕНЦІЙ

Запропоновано підхід до знаходження параметрів нагромадження кореспонденцій та економії часу під час їх обслуговування.

In work the approach to a finding of parameters of accumulation of correspondence and economy of time of their service is offered

Вступ

Дослідження функціонування і розвитку систем, описаних мережевими структурами (транспортні, енергетичні, гідравлічні, інформаційні тощо), насамперед пов'язане із визначенням завантаження складових елементів структури – ребер і вершин мережі. Робота таких систем може бути представлена через переміщення необхідних кореспонденцій або груп кореспонденцій із заданого пункту відправлення до відповідного пункту призначення. При цьому кожна кореспонденція характеризується багатьма параметрами, визначеними для конкретних типів мереж і потоків на них. Одна із основних проблем, які при цьому виникають, є об'єднання кореспонденцій.

Постановка проблеми

Розглядувані в роботі задачі є частиною проблеми розрахунку оптимального плану формування потоків груп кореспонденцій. Основним критерієм для оцінки оптимальності плану формування груп кореспонденцій прийнято вважати експлуатаційні затрати. Їх, для зручності розрахунків, представляють у приведених кореспонденцій-годин. Виділення струменя потоку кореспонденцій в самостійне призначення залежить від часу нагромадження кореспонденцій на групу в початковій вершині і економії кореспонденцій-годин під час пропускання їх транзитом через інші вершини. Ці умови закладено в існуючі методики розрахунку плану формування. Тобто, для розрахунку необхідно знати: склад групи в кореспонденціях, параметр нагромадження та економію від пропускання через вершину без перероблення.

Оптимальний варіант об'єднання кореспонденцій знаходять, розглядаючи нерівності [1]

$$\sum_{i}^{k} cm_i > \sum_{i}^{k} N_i \sum_{j=2}^{n-1} T_{ek\,j}, \qquad \sum_{i}^{k} cm_i < \sum_{i}^{k} N_i \sum_{j=2}^{n-1} T_{ek\,j},$$

де cm_i – добова затрата часу на нагромадження кореспонденцій одного i-го призначення; m_i – кількість кореспонденцій в групі; c – параметр нагромадження; N_i – розмір середньодобового потоку i-го призначення кореспонденцій; $\sum_{j=2}^{n-1} T_{ek\,j}$ – сумарна приведена економія від проходження груп кореспонденцій без переробки попутних вершин; k – кількість призначень оптимального варіанта; $n-2$ – кількість попутних вершин; n – кількість вершин на заданому напрямку.

Важливо достатньо точно визначити параметр c, оскільки він істотно впливає на результат. Для цього потрібно вивчати процеси утворення груп кореспонденцій. Для визначення області значень параметрів нагромадження c використовують стохастичну залежність його від середньодобового потоку кореспонденцій. Найістотніше величина параметра нагромадження коливається за невеликих розмірів потоку. В окремі періоди величина c змінюється в декілька разів.

Параметр нагромадження для одногрупних кореспонденцій залежить від кількості їх призначень k [1]:

$$c = 12\left(1 - \frac{2}{k+A}\right),$$

де величина A враховує частоту надходження потоків кореспонденцій для переробки, кількість і тривалість перерв у процесі нагромадження тощо.

Основна частина

Нехай $A_1, A_2, ..., A_n$ – повна сукупність попарно несумісних подій, що відповідають прогнозам щодо нарощення, незмінності чи зменшення кількості кореспонденцій, з відповідними ймовірностями $P(A_1), P(A_2), ..., P(A_n)$,. $\sum_{k=1}^{n} P(A_k) = 1$. У кожному з n випадків маємо певний коефіцієнт нагромадження – $c_{A_1}, c_{A_2}, ..., c_{A_n}$ відповідно. Тоді $\bar{c} = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) \cdot c_{A_k}$ – усереднений коефіцієнт нагромадження, $\sigma = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} P(A_k) \cdot c^2_{A_k} - \left(\sum_{k=1}^{n} P(A_k) \cdot c_{A_k}\right)^2}$ – міра ризику, $\frac{\sigma}{c}$ – кількість ризику на одиницю нагромадження.

Сформулюємо тепер задачу про прогнозування щодо нарощення чи зменшення кількості кореспонденцій, коли відомі величини $\bar{c}$ і $\frac{\sigma}{c}$. Іншими словами, є система: $\begin{cases} \frac{\sigma}{c} = a \\ \bar{c} = b \end{cases}$, де a і b – деякі відомі параметри. Введемо для зручності позначення $P(A_k) = p_k$, $c_{A_k} = c_k$, $k = (1,3)$

$$\sum_{k=1}^{3} p_k = 1 \tag{1}$$

$$\bar{c} = \sum_{k=1}^{3} p_k \cdot c_k = b \tag{2}$$

$$\begin{aligned} &\sigma^2 = a^2 b^2 \\ &\sigma^2 = \sum_{k=1}^{3} p_k \cdot c^2{}_k - \left(\sum_{k=1}^{3} p_k \cdot c_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{3} p_k \cdot c^2{}_k - b^2 \Rightarrow \sum_{k=1}^{3} p_k \cdot c^2{}_k = b^2\left(a^2 + 1\right) \end{aligned} \tag{3}$$

Отримали систему рівнянь:

$$\begin{cases} p_1 + p_2 + p_3 = 1 \\ p_1 c_1 + p_2 c_2 + p_3 c_3 = b \\ p_1 c_1^2 + p_2 c_2^2 + p_3 c_3^2 = b^2\left(a^2 + 1\right) \end{cases}$$

Як бачимо, визначник системи $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ c_1^2 & c_2^2 & c_3^2 \end{pmatrix}$ не дорівнює нулю при попарно не рівних c_i і $c_i \neq 1$. Звідси легко знайти p_i. Аналогічно розглядаємо ситуацію з більшою кількістю подій A_i. У цьому випадку ми зможемо подати p_i (i=1,..,3) через інші p_i (i>3).Тут p_i (i>3) будуть вільними змінними.

1. Розрахунок економії часу на одну кореспонденцію без переароблення

Економія часу на одну кореспонденцію під час проходження потоку кореспонденцій через вершину без перероблення дорівнює

$$t_{ек} = t_{пер} + t_{тр} - t_{н},$$

де $t_{пер}$ – простій транзитної кореспонденції з переробленням; $t_{тр}$ – простій транзитної кореспонденції без перероблення; $t_{н}$ – середній час нагромадження.

Простій транзитної кореспонденції з переробленням складається з часу виконання технологічних операцій (надходження, розформування і формування груп кореспонденцій та відправлення) $\sum t_{техн}^{пер}$, нагромадження $t_{н}$ і додаткових простоїв (міжопераційні перерви, простої в очікуванні відправлення) $\sum t_{доп}^{пер}$:

$$t_{пер} = \sum t_{техн}^{пер} + \sum t_{доп}^{пер} + t_{н}.$$

Простій транзитної кореспонденції без переробки – час на виконання технологічних операцій $t_{техн}^{тр}$ і простій в очікуванні відправлення $t_{доп}^{тр}$:

$$t_{тр} = t_{техн}^{тр} + t_{доп}^{тр}.$$

Отже, остаточно маємо:

$$t_{ек} = \left(\sum t_{техн}^{пер} + \sum t_{доп}^{пер}\right) - \left(t_{техн}^{тр} + t_{доп}^{тр}\right).$$

Вважаємо, що $\sum t_{техн}^{пер} = c_1$ та $t_{техн}^{тр} = c_2$ – деякі константи.

Вводимо такі випадкові величини: $\xi = \sum t_{доп}^{пер}$, $\eta = t_{доп}^{тр}$.

Розглянемо випадки:

1. Нехай ξ та η – ***випадкові величини з рівномірним розподілом*** на $[a,b]$ та $[c,d]$, $c < a$ відповідно. Знайдемо розподіл $\gamma = \xi - \eta$, використавши формулу для згортання щільностей([2]):

$$p_\gamma(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_\xi(z+x)\cdot p_\eta(x)dx = \int_c^d \frac{1}{c-d}\cdot p_\xi(z+x)dx =$$
$$= \int_{[z+c,z+d]\bigcap[a,b]} \frac{1}{d-c}\cdot\frac{1}{b-a}dx = \frac{\mu\left([z+c,z+d]\bigcap[a,b]\right)}{(d-c)(b-a)}$$

Для зручності будемо вважати , що

$$\left\|[a,b]\right\| > \left\|[c,d]\right\|, a < d.$$

Тоді $$\mu\left([z+c,z+d]\bigcap[a,b]\right) = \begin{cases} 0, z < a-d \\ z+d-a, z\in(a-d,a-c) \\ d-c, z\in(a-c,b-d) \\ -z+b-c, z\in(b-d,b-c) \\ 0, z > b-c \end{cases}$$

$$p_\gamma(z)=\begin{cases}0, z<a-d\\ \dfrac{z+d-a}{(d-c)(b-a)}, a-d<z<a-c\\ \dfrac{1}{b-a}, a-c<z<b-d\\ \dfrac{(-z+b-c)}{(d-c)(b-a)}, b-d<z<b-c\\ 0, z>b-c\end{cases}$$

$t_{ек}=\gamma+(c_1-c_2)=\gamma+const \;\; F_{t_{ек}}(z)=P\{t_{ек}<z\}=P\{\gamma+const<z\}=P\{\gamma<z-const\}=F_\gamma(z-const)$

$$\Rightarrow p_{t_{ек}}(z)=p_\gamma(z-const) \quad p_{t_{ек}}(z)=\begin{cases}0, z<a-d+const\\ \dfrac{(z-const+d-a)}{(d-c)(b-a)}, a-d+const<z<a-c+const\\ \dfrac{1}{(b-a)}, a-c+const<z<b-d+const\\ \dfrac{(-z+const+b-c)}{(d-c)(b-a)}, b-d+const<z<b-c+const\\ 0, z>b-c+const\end{cases}$$

Отже, $t_{ек}$ – випадкова величина зі щільністю $p_{t_{ек}}(z)$.

2. Нехай $\xi=\sum t_{техн}^{пер}$ та $\eta=t_{техн}^{тр}$ – ***випадкові величини з показниковим розподілом***: $\xi\sim\varepsilon(\alpha),\eta\sim\varepsilon(\beta)$

$\gamma=\xi-\eta$

Тоді [2]:

$$p_\gamma(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}p_\xi(z+x)p_\eta(x)dx=\int_0^{+\infty}p_\xi(z+x)\beta e^{-\beta x}dx=\begin{cases}\int_0^{+\infty}\alpha e^{-\alpha(z+x)}\beta e^{-\beta x}dx, z\ge 0\\ \int_{-z}^{+\infty}\alpha e^{-\alpha(z+x)}\beta e^{-\beta x}dx, z<0\end{cases}=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}\cdot e^{-\alpha z}, z\ge 0\\ \dfrac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}\cdot e^{\beta z}, z<0\end{cases}$$

$$t_{ек}=\gamma+(c_1-c_2)=\gamma+const$$

$$p_{t_{ек}}(z)=p_\gamma(z-const)=\begin{cases}\dfrac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}\cdot e^{-\alpha(z-const)}, z\ge const\\ \dfrac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}\cdot e^{\beta(z-const)}, z<const\end{cases}$$

Отже, $t_{ек}$ – випадкова величина зі щільністю $p_{t_{ек}}(z)$.

2. Розрахунок норми економії часу під час проходження кореспонденцій через вершину

Складовою частиною методики вибору оптимального плану організації потоків кореспонденцій є розрахунок економії(затрат) часу під час проходження потоку кореспонденцій без переоблення (з переобленням) через вершину.

Подамо розрахункову норму економії часу $t_{ек}^{p}$ у вигляді двох доданків:

$t_{ек1}^{p}$ – розрахункової норми економії часу для систем формування – розформування;

$t_{ек2}^{p}$ – розрахункової норми економії часу для системи відправлення.

Якщо ймовірнісні характеристики процесів істотно не змінюються, то збільшення потоку кореспонденцій призведе до збільшення затрат часу на

$$\Delta B_1 = t_{ек1}\left(N_{\min} + N_{доп}\right) - t_{ек1}^{*} N_{\min} \ , \tag{1}$$

де $t_{ек1}^{*}$ – середній час надходження кореспонденцій в системах формування – розформування для потоку кореспонденцій $N_{\min}$; $t_{ек1}$ – середній час надходження кореспонденцій в системах формування –розформування для потоку кореспонденцій $\left(N_{\min} + N_{доп}\right)$.

Питома затрата кореспонденцій-годин на одну кореспонденцію

$$t_{ек1}^{p} = t_{ек1} + \left(t_{ек1} - t_{ек1}^{*}\right)\frac{N_{\min}}{N_{доп}} \ . \tag{2}$$

Вважатимемо, що величина потоку кореспонденцій, що переробляється в вершинах, набуває значення з проміжку $\left[N_{\min}, N_{\max}\right]$, тобто $N_{доп}$ може змінюватися від 0 до $\left(N_{\max} - N_{\min}\right)$.

Вважатимемо, що величина $N_{доп}$ приблизно рівномірно розподілена на відрізку $\left[0, N_{\max} - N_{\min}\right]$, а $t_{ек1}$ – деяка функція f від $N_{доп}$, причому f – зростаюча (оскільки додатковий потік, що надійшов на переоблення, вплине на час надходження кореспонденцій у конкретних системах, загальмує рух потоків обов'язкового переоблення і, відповідно, спричинить додаткові затрати кореспонденцій-годин). Також будемо вважати, що f –гладка.

Введемо необхідні позначення:

$N_{доп} = \xi$, де ξ – випадкова величина, рівномірно розподілена на проміжку $\left[0, N_{\max} - N_{\min}\right]$;

$$\eta = \frac{N_{\min}}{\xi}, \ N_{\max} - N_{\min} = a \ ,$$

η набуває значень з проміжку $\left[\frac{N_{\min}}{a}, +\infty\right]$.

Нехай $y \in \left[\frac{N_{\min}}{a}, +\infty\right]$. Знайдемо щільність η у точці [3]:

$$p_{\eta}(y) = p_{\xi}\left(\frac{N_{\min}}{y}\right)\cdot\frac{N_{\min}}{y^2} = \frac{1}{a}\cdot\frac{N_{\min}}{y^2} \ . \tag{3}$$

Знайдемо розподіл $f(\xi) = \gamma$:

$$p_{\gamma}(y) = p_{\xi}\left(f^{-1}(y)\right)\cdot\left|\left(f^{-1}(y)\right)'\right| = \frac{1}{af'(y)}$$

при $y \in \left[f(0), f(a)\right] = \left[t_{ек1}^{*}, f(a)\right]$.

Тут враховано, що $t_{ек1} = f(\xi)$, причому $f(0) = t_{ек1}^{*}$.

З формули (2) випливає, що навіть за відомої щільності $f(\xi)$ важко знайти розподіл $t_{ек1}^{p}$, оскільки випадкові величини в сумі $t_{ек1}^{p}=t_{ек1}+\left(t_{ек1}-t_{ек1}^{*}\right)\dfrac{N_{\min}}{N_{доп}}$ є залежними. Тому зробимо деякі припущення щодо функції f.

Отже, вважатимемо, що $t_{ек1}=f(\xi)=t_{ек1}^{*}+k\xi^{\alpha}$, де $k>0$ – деяка стала, $\alpha\geq 1$. Тоді (2) набуде вигляду

$$t_{ек1}^{p}=t_{ек1}^{*}+k\xi^{\alpha}+k\xi^{\alpha-1}N_{\min} \tag{4}$$

Позначимо праву частину рівності (4) через $g(\xi)$. Очевидно, що g – зростаюча за ξ. Тому для випадкової величини $\omega=t_{ек1}^{p}$ маємо [3]:

$$p_{\omega}(y)=p_{\xi}\left(g^{-1}(y)\right)\cdot\left(g^{-1}(y)\right)'=\frac{p_{\xi}\left(g^{-1}(y)\right)}{g'(y)}.$$

Розглянемо деякі часткові випадки:

1) $\alpha=1$

З рівності (4) випливає $t_{ек1}^{p}=t_{ек1}^{*}+k\xi\ +kN_{\min}=c+k\xi$, де $c=t_{ек1}^{*}+kN_{\min}$.

Для $\omega=t_{ек1}^{p}$:

$$p_{\omega}(y)=p_{\xi}\left(\frac{y-c}{k}\right)\cdot\frac{1}{k}=\frac{1}{ak},$$

тобто питома затрата кореспонденцій-годин на одну кореспонденцію рівномірно розподілена на відрізку $[c,c+ka]==\left[t_{ек1}^{*}+kN_{\min},t_{ек1}^{*}+kN_{\min}+ka\right]$.

2) $\alpha=2$

З рівності (4) випливає

$$t_{ек1}^{p}=t_{ек1}^{*}+k\xi^{2}+kN_{\min}\xi \tag{5}$$

Розв'яжемо це рівняння відносно ξ. Зважаючи на невід'ємність $\xi=N_{доп}$, отримуємо

$$\xi=\frac{\sqrt{k^{2}N_{\min}^{2}+4k\left(t_{ек1}^{p}-t_{ек1}^{*}\right)}-kN_{\min}}{2k} \tag{6}$$

Для $\omega=t_{ек1}^{p}$

$$p_{\omega}(y)=p_{\xi}\left(g^{-1}(y)\right)\cdot\frac{1}{2k}\cdot\frac{1}{2\sqrt{k^{2}N_{\min}^{2}+4k\left(y-t_{ек1}^{*}\right)}}\cdot 4k=$$

$$=\frac{1}{a\sqrt{k^{2}N_{\min}^{2}+4k\left(y-t_{ек1}^{*}\right)}}$$

при $y\in\left[t_{ек1}^{*},t_{ек1}^{*}+kN_{\min}a+ka^{2}\right]$.

Висновки

Запропонований підхід до розрахунку параметрів, які входять до критерію оцінки оптимальності об'єднання потоків кореспонденцій, дасть можливість побудувати ефективні алгоритми побудови плану формування потоків кореспонденцій.

1. Акулиничев В.М. Организация вагонопотоков. – М.: Транспорт, 1979. 2. Гихман И.И., Скороход А.В., Ядренко М.И. Теория вероятностей и математическая статистика. – К.: Вища школа, 1988. 3. Уилкс С. Математическая статистика. – М.: Наука, 1967.