Зауважимо, що максимальна кількість ремонтів для несправних модулів та систем визначається комплектацією запасних компонентів.

За заданих параметрів модель відмовостійкої системи у вигляді графа станів і переходів має 80 станів і 296 переходів, що і визначає розмірність системи диференціальних рівнянь Колмогорова–Чепмена.

За допомогою програмної моделі проведемо дослідження впливу зменшення кількості ремонтів на середнє значення часу роботи до катастрофічної відмови. Результати досліджень, наведені на рис. 2, показали, що зменшення кількості ремонтів з 4-х до 3-х при зафіксованих значеннях решти параметрів на надійність не впливає (при Srs = 4, $t_{роб}$ = 8642,6 год, а при Srs = 3, $t_{роб}$ = 8636,9). Якщо для системи, що проектується, технічними умовами обумовлено середнє значення часу роботи до катастрофічної відмови 8500 годин, то очевидно, що необхідно передбачити комплектацію запасних компонентів на два ремонти. Аналогічні дослідження проводяться і для інших параметрів відмовостійкої системи.

1. Волочій Б.Ю. Технологія моделювання алгоритмів поведінки інформаційних систем. – Львів, 2004. 2. Надежность технических систем: Справочник / Ю.К. Беляев, В.А. Богатырев, В.В. Болотин и др.; Под ред. И.А. Ушакова. – М., 1985. 3. Надежность и эфективность в технике: Справочник. Т.5: Проектный анализ надежности / Под ред. В.И. Патрушева и А.И. Рембезы. – М., 1988.

УДК 621.3

Я.М. Матвійчук

Національний університет "Львівська політехніка",
кафедра теоретичної радіотехніки та радіовимірювань

ОЦІНКА РОЗМІРНОСТІ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ ЧЕРЕЗ КОРЕЛЯЦІЙНУ РОЗМІРНІСТЬ ВИХІДНОГО СИГНАЛУ

Описано універсальний метод, що дає змогу отримати надійну оцінку розмірності нелінійної системи лише за одним скалярним вихідним сигналом, причому оцінка не залежить від того, який саме вихідний сигнал системи використано.

The universal method which allows to receive a reliable estimation of a nonlinear system dimension only by one scalar output signal is described. The estimation does not depends on what an output signal of the system is used.

Вступ

Під час побудови математичних моделей нелінійних динамічних систем дуже корисною є попередня оцінка розмірності системи. Така оцінка дає змогу уникнути надмірної складності моделі та пов'язаної з нею некоректності. Поширені методи оцінюють розмірність за характерними ознаками перехідного процесу, важко формалізуються та є ефективними для систем невисокого порядку, як правило, лінійних.

Основна частина

Нехай вихідний сигнал системи залежить від вектора змінних стану

$$x = (x_1, x_2, .., x_N). \quad (1)$$

Оскільки фазові змінні системи $x1, x2, .., xN$ переважно недоступні для прямого спостереження, то розглянемо поведінку системи у псевдофазовому просторі з координатами

$$y(t),\ dy(t)/dt,\ d2y(t)/dt2, ...,\ dM\text{-}1y(t)/dtM\text{-}1, \quad (2)$$

де y(t) – вихідний сигнал системи.

Дискретний аналог псевдофазового простору (2) має вигляд

$$y(t),\ y(t+\tau),\ y(t+2\tau), \dots,\ y(t+(M-1)\tau), \tag{3}$$

де крок τ можна оцінити за мінімумом автокореляційної функції [1]:

$$\min_{\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)\,y(t-\tau)\,dt\,. \tag{4}$$

Фазовий портрет системи у псевдофазовому просторі можна збудувати так. Нехай вихідний сигнал $y(t)$ задається послідовністю дискретних значень $\{y(k\tau)\}$ з постійним кроком τ, де k – натуральне число. Тоді псевдофазову траєкторію утворить послідовність точок y_k з координатами

$$y_k = (y(k\tau),\ y(k\tau+\tau),\ y(k\tau+2\tau),\ y(k\tau+3\tau), \dots,\ y(k\tau+(M-1)\tau)), \tag{5}$$

де M – розмірність псевдофазового простору.

Відомо, що топологічні властивості фазових портретів системи незмінні у просторі змінних стану (1) та у псевдофазових просторах (2) та (3), якщо розмірності останніх достатньо великі [1; 2]. Зв'язок між розмірністю фазового простору N і розмірністю псевдофазового простору M дають теореми, доведені Ф. Такенсом [2]. Основний для нас результат цих теорем виглядає так: псевдофазовий простір системи топологічно ідентичний до фазового, якщо $M=2N+1$.

Оцінити розмірність системи можна за допомогою поняття фрактальної розмірності для заданої фазової траєкторії [1]. Є різні підходи до визначення фрактальної розмірності, що дають приблизно однакові результати. Скористаємось поняттям кореляційної розмірності d_m для заданої розмірності m псевдофазового простору [1]. Позначимо

$$s_{ij} = \|y_i - y_j\|$$

і визначимо кореляційну функцію так:

$$C(r) = \lim_{K\to\infty} 1/K^2\ (\textit{кількість пар точок, для яких } s_{ij} < r)\,,$$

де K – кількість точок на фазовій траєкторії.

На практиці для визначення $C(r)$ використовують формулу

$$C(r) = \lim_{K\to\infty} \frac{1}{K^2} \sum_{i=1}^{K} \sum_{\substack{j=1 \\ i\neq j}}^{K} H(r - s_{ij})\,,$$

де $H(s) = \begin{cases} 1, & s>0 \\ 0, & s<0 \end{cases}$, а K обмежене зверху $K_{\max}$.

Переважно $\lim\limits_{r\to 0} C(r) \approx r^{d_m}$, тому кореляційну розмірність d_m можна визначити за нахилом прямої у системі координат $(\ln C(r), \ln r)$:

$$d_m = \lim_{r\to 0} \frac{\ln C(r)}{\ln r}\,. \tag{6}$$

Такенс довів, що розмірність d_m зростає зі збільшенням m, доки не досягає верхньої межі при $m=M$ [2].

Отже, алгоритм оцінки розмірності системи за вихідним сигналом такий:

– визначити необхідний крок дискретизації за (4);

– збудувати на дискретних значеннях сигналу псевдофазові простори різної розмірності m (5);

– обчислити значення кореляційної розмірності d_m за (6) для низки значень розмірності m псевдофазового простору;

– визначити $m=M$, за якого d_m стає максимальним;

– оцінити розмірність системи N за формулою $N=(M-1)/2$.

Приклад застосування методу оцінки розмірності

Досліджено деякий генератор, описаний п'ятьма диференціальними рівняннями першого порядку [3]. Обчислена за алгоритмом залежність кореляційної розмірності d_m від розмірності псевдофазового простору m для вихідного сигналу генератора така:

m	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
d_m	0.960	0.963	1.036	1.062	1.096	1.145	1.145	1.143	1.140	1.164

Графік цієї залежності зображено на рис. 1.

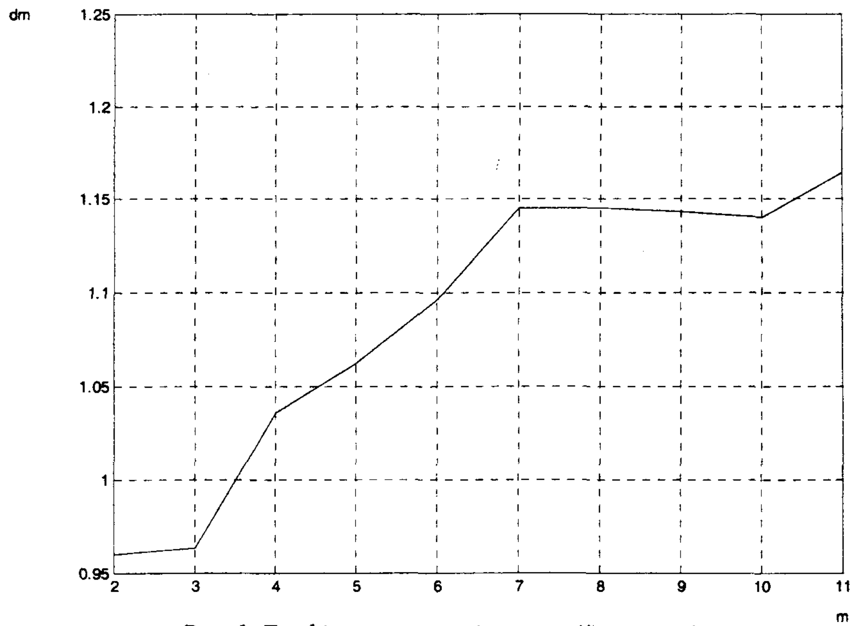

Рис. 1. Графік залежності кореляційної розмірності від розмірності псевдофазового простору

Як бачимо, кореляційна розмірність досягає локального максимуму, якщо розмірність псевдофазового простору m=7. За Такенсом [2] це відповідає системі третього порядку. Отже, модель генератора, описана системою диференціальних рівнянь п'ятого порядку, поводиться передусім як система третього порядку. Однак для m=11 значення d_m знову помітно зростає. Це означає, що передати всі тонкощі реакції системи можна лише моделлю п'ятого порядку. Такі висновки підтверджені безпосереднім математичним моделюванням генератора за вихідним сигналом [3].

Значення кореляційної розмірності обчислювали спеціальною PASCAL-програмою. На рис. 2 показано залежності ln(C(r)) від ln(r) для різних значень розмірності псевдофазового простору m.

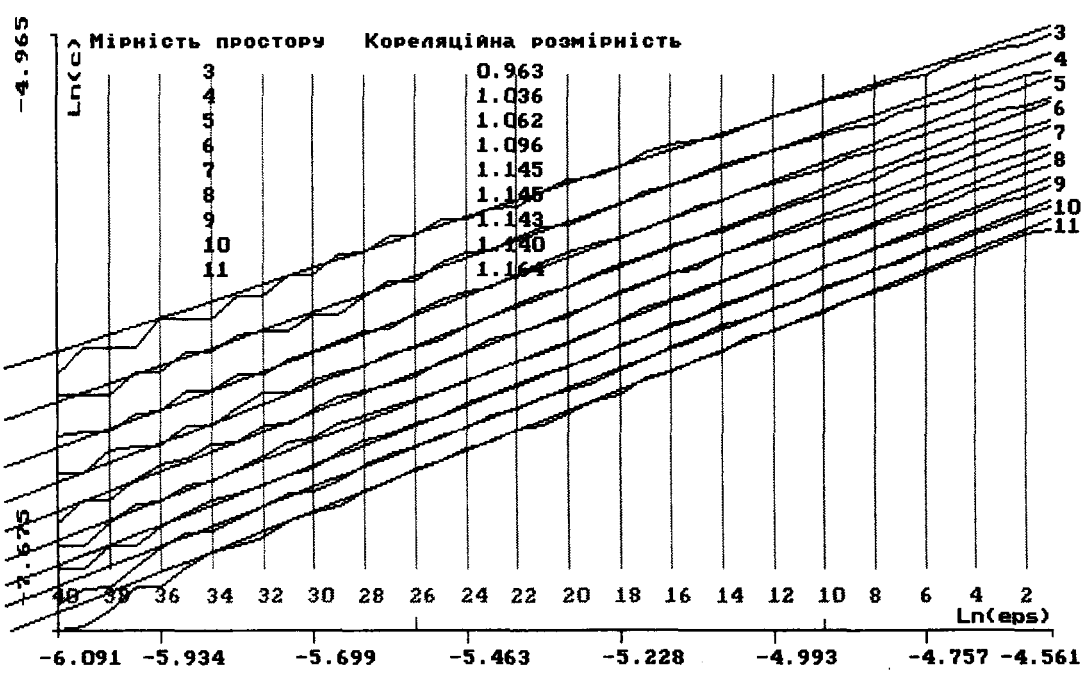

Рис. 2. Залежності ln(C(r)) від ln(r) для генератора

За цими залежностями побудовані середньо-квадратичні лінійні наближення та за нахилами відповідних прямих обчислені значення кореляційної розмірності, наведені вище.

Оскільки застосувати безпосередньо формулу (6) складно із-за зростання числових похибок при $r \to 0$, використано такий емпіричний прийом. На близьких до лінійних ділянках, виділених позначками на осі абсцис (рис. 2), обчислені значення кореляційних розмірностей як коефіцієнтів нахилу відповідних прямих апроксимації, визначених за методом найменших квадратів.

Висновки

Описаний метод успішно використано для обчислення кореляційних розмірностей та оцінки розмірності численних об'єктів моделювання. Зокрема, на тестових прикладах дивних атракторів з добре відомими значеннями розмірностей [1] перевірено правильність обрахунку кореляційних розмірностей.

1. Мун Ф. Хаотические колебания / Пер.с англ. – М., 1990. 2. Takens F. Detecting Strange Attractor in Turbulence // Lect. Notes in Math. – 1981. – Vol. 898. – P. 366–381. 3. Матвійчук Я.М. Математичне макромоделювання синхронного генератора: Зб. "Теоретична електротехніка", 1996. – Вип. 53. – С. 156 –161.