УДК 681.142.2:519.6

Б.Є. Рицар

Національний університет "Львівська політехніка",
кафедра радіоелектронних пристроїв та систем

СПОСІБ ПОБУДОВИ КОН'ЮНКТЕРМОВОГО ПОЛЯ БУЛОВОЇ ФУНКЦІЇ

Запропоновано простий щодо реалізації спосіб побудови кон'юнктермового поля булової функції *n* змінних, який може бути використаний для пошуку простих кон'юнктермів у задачі мінімізації булових функцій.

A simple as to its realization means of conjuncterms field bilding of Boolean function of *n* variables has been suggested. This method can be used for search of simple conjuncterms in the minimization problem of Boolean functions.

Вступ

Визначальним етапом мінімізації булових функцій є пошук так званих простих кон'юнктермів (кон'юнктивних термів), множина яких використовується для покриття заданої функції, що остаточно формує шукану мінімальну форму. У класичних методах мінімізації [1; 2] – це доволі обтяжлива процедура комбінаторного характеру, яка внаслідок операції взаємно попарного склеювання заданих мінтермів викликає небажане явище – тавтологію кон'юнктермів.

У [3; 4] запропоновано розглядати числовий кон'юнктерм θ^r рангу r (тобто множину склеюваних числових мінтермів) булової функції $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ як теоретико-множинний елемент наперед сформованої множини кон'юнктермів усіх рангів r ($r = 0,1,2,...,n$), названу кон'юнктермовим полем, а саме: рангу n (підполя мінтермів θ^n), рангів $(n-1)$, $(n-2)$, …, 2, 1 (підполів імплікантів θ^{n-1}, θ^{n-2}, …, θ^2, θ^1) та рангу 0 (функції-константи $\mathbf{1}$ – θ^0). Такий підхід має очевидні переваги, оскільки зводиться лише до процедури зчитування з наперед побудованого кон'юнктермового поля простих кон'юнктермів заданої функції, що не важко реалізувати на комп'ютері. Проте процес генерування складових поля за допомогою матриць склеювань утворює тавтологію їх елементів, ускладнюючи зчитування діагональних векторів, що формують підполя кон'юнктермового поля. З іншого боку, такий спосіб побудови кон'юнктермового поля досить обтяжливий для комп'ютерної реалізації алгоритму мінімізації (порядок матриць склеювань залежить від кількості змінних).

Алгоритм побудови кон'юнктермового поля

У цій роботі пропонується ефективний (без зазначених вище недоліків) спосіб побудови кон'юнктермового поля булової функції $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, суть якого полягає у формуванні підполів $\mathbf{P}_n^{n-1}$, $\mathbf{P}_n^{n-2}$, ..., $\mathbf{P}_n^1$ за допомогою матриць L_n^r масок літералів $l \in \{0,1\}$ та простої щодо реалізації рекурентної процедури їх формування.

Для опису пропонованого способу введемо необхідні поняття й означення. Матриця L_n^r – це матриця-стовпець розмірності $C_n^{n-r} \times 1$, кількість масок літералів у якій визначається комбінаторно, як C_n^{n-r}, і відповідає кількості класів кон'юнктермів. Зазначені матриці, починаючи з рангу $r = n$, формують складові поля $\mathbf{P}_n$ за схемою

$$L_n^n \Rightarrow L_n^{n-1} \Rightarrow L_n^{n-2} \Rightarrow ... \Rightarrow L_n^1 \Rightarrow L_n^0, \tag{1}$$

тобто за допомогою матриць масок літералів ($L_n^0 = [--...-]_{C_n^n \times 1} \equiv \mathbf{E}_2^n$):

$$[ll\cdots ll]_{C_n^0 \times 1} \Rightarrow \begin{bmatrix} ll\cdots l- \\ ll\cdots -l \\ \cdots\cdots\cdots \\ ll-\cdots ll \\ l-l\cdots ll \\ -ll\cdots ll \end{bmatrix}_{C_n^1 \times 1} \Rightarrow \begin{bmatrix} ll\cdots -- \\ \cdots\cdots\cdots \\ l--\cdots ll \\ -l-\cdots ll \\ --l\cdots ll \end{bmatrix}_{C_n^2 \times 1} \Rightarrow \ldots \Rightarrow \begin{bmatrix} l--\cdots -- \\ -l-\cdots -- \\ --l\cdots -- \\ \cdots\cdots\cdots \\ ---\cdots l- \\ ----\cdots -l \end{bmatrix}_{C_n^{n-1} \times 1} \Rightarrow [---\cdots -]_{C_n^n \times 1} \equiv \mathbf{E}_2^n,$$

де риска "–" показує розряд поглинутої змінної, а кількість літералів l у масці дорівнює рангу r.

Наприклад, для функції $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$ матриці масок літералів L_4^r ($r = 0,1,2,3,4$) складають ряд $L_4^4 \Rightarrow L_4^3 \Rightarrow L_4^2 \Rightarrow L_4^1 \Rightarrow L_4^0$: $[llll] \Rightarrow \begin{bmatrix} lll- \\ ll-l \\ l-ll \\ -lll \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} ll-- \\ l-l- \\ l--l \\ -ll- \\ -l-l \\ --ll \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} l--- \\ -l-- \\ --l- \\ ---l \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{E}_2^4$.

Отже, якщо замість l підставити усі можливі його значення (0 і 1), то для певної маски літералів рангу r одержимо 2^{n-r} псевдотрійкових чисел. Відповідно, якщо замість символу "–" підставити всі можливі його значення 0 і 1, то для певного кон'юнктерма рангу r одержимо 2^r числових (десяткових) мінтермів. Наприклад, для маски літералів $l-ll-$, що відповідає вектору $\mathbf{p}_{l-ll-}$ підполя $\mathbf{P}_5^3$ [3], одержимо 8 кон'юнктермів однакового класу, кожен з яких містить 4 склеюваних мінтерми: (0–00–), (0–01–), (0–10–), (0–11–), (1–00–), (1–01–), (1–10–), (1–11–). Очевидно, що підполя $\mathbf{P}_n^{n-1}$, $\mathbf{P}_n^{n-2}$, ..., $\mathbf{P}_n^1$ матимуть всього $\sum_{i=1}^{n-1} C_n^i$ масок літералів і відповідно $k_\theta = \sum_{i=1}^{n-1} 2^{n-i} C_n^i$ кон'юнктермів.

Маску літералів рангу r зображатимемо двійковим кодом, замінивши символ (–) на одиницю (1), а символ (l) – на нуль (0), як наприклад, $l-ll- \Rightarrow 01001$. Двійковий формат маски пришвидшуватиме алгоритм генерування і формування елементів підполів за рахунок використання булових операцій над двійковими числами. Зауважимо, що вага коду (тобто кількість одиниць у ньому) такої двійкової маски літералів показує $(n-r)$-клас кон'юнктерма.

За допомогою двійкової маски літералів визначаються дві множини чисел, наприклад A і B, з яких формуються шукані кон'юнктерми, а саме: множина r-чисел і множина $(n-r)$-чисел. Обидві множини формуються покроковою процедурою рекурентного онулення – почергової заміни на кожному кроці однієї 1 в 0 у коді певного базового числа, яке визначається на першому кроці процедури, аж до появи нульового коду $(00\cdots 0)$. Причому для множини r-чисел базовим числом є обернений код двійкової маски літералів, а для множини $(n-r)$-чисел – власний (прямий) код розглядуваної маски. В обох випадках базове число – це максимальний за значенням елемент утворюваної множини. На другому кроці процедури почергово формуються числа, утворювані онуленням одного одиночного біта базового числа, а на наступних кроках – шукані числа на підставі попередньо сформованих чисел аналогічно, аж до утворення на останньому кроці коду $(00\cdots 0)$. Отже, множина A потужності 2^r, складена з r-чисел, визначатиме кількість кон'юнктермів певного класу (для певної маски літералів), а множина B потужності 2^{n-r}, складена з $(n-r)$-чисел, визначатиме кількість мінтермів m_i у самому кон'юнктермі:

$$A = \{a_1, a_2, ..., a_{2^r}\}, \qquad B = \{b_1, b_2, ..., b_{2^{n-r}}\}, \tag{2), (3}$$

де a_i і b_j – відповідно r- і $(n-r)$-числа, утворені процедурою рекурентного онулення, причому базове r-число a_1 є оберненим кодом, а базове $(n-r)$-число b_1 – прямим кодом двійкової маски літералів.

За допомогою елементів множин A (2) і B (3) кон'юнктерми θ_i^{n-r} можна розглядати як

$$\theta_1^{n-r} = a_1 \vee \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_{2^{n-r}} \end{Bmatrix} = ((a_1 \vee b_1), (a_1 \vee b_2), \ldots, (a_1 \vee b_{2^{n-r}})) = (m_{\alpha_1}, m_{\alpha_2}, \ldots, m_{\alpha_{2^{n-r}}}),$$

$$\theta_2^{n-r} = a_2 \vee \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_{2^{n-r}} \end{Bmatrix} = ((a_2 \vee b_1), (a_2 \vee b_2), \ldots, (a_2 \vee b_{2^{n-r}})) = (m_{\beta_1}, m_{\beta_2}, \ldots, m_{\beta_{2^{n-r}}}),$$

....

$$\theta_{2^r}^{n-r} = a_{2^r} \vee \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_{2^{n-r}} \end{Bmatrix} = ((a_{2^r} \vee b_1), (a_{2^r} \vee b_2), \ldots, (a_{2^r} \vee b_{2^{n-r}})) = (m_{\gamma_1}, m_{\gamma_2}, \ldots, m_{\gamma_{2^{n-r}}}),$$

де m_{α_i}, m_{β_i}, ..., m_{γ_i} – складові мінтерми відповідних кон'юнктермів θ_1^{n-r}, θ_2^{n-r}, ..., $\theta_{2^r}^{n-r}$.

Зауважимо, що десяткові кон'юнктерми θ_i^{n-r} одержуються аналогічно як псевдотрійкові, тільки замість операції диз'юнкції необхідно застосовувати арифметичне додавання десяткових r- і $(n-r)$-чисел.

В такий спосіб, за описаною методикою не важко одержати для певної маски літералів множину шуканих кон'юнктермів $(n-r)$-класу: $\{\theta_1^{n-r}, \theta_2^{n-r}, \ldots, \theta_{2^r}^{n-r}\}$.

Побудову кон'юнктермового поля $\mathbf{P}_n$ проілюструємо на прикладі формування множини кон'юнктермів 2-рангу класу $l-ll-$ підполя $\mathbf{P}_5^3$ функції $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$:

$$\{l-ll-\} \Rightarrow \{01001\} \Rightarrow \begin{cases} \{10110 \Rightarrow \begin{Bmatrix} 00110 \\ 10010 \\ 10100 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} 00010 \\ 10000 \\ 00100 \end{Bmatrix} \Rightarrow 00000\} \Rightarrow \\ \qquad \Rightarrow \{10110, 00110, 10010, 10100, 00010, 10000, 00100, 00000\}; \\ \{01001\} \Rightarrow \begin{Bmatrix} 00001 \\ 01000 \end{Bmatrix} \Rightarrow 00000\} \Rightarrow \{01001, 00001, 01000, 00000\}. \end{cases}$$

Отже, для заданої маски r-числа (верхній ряд) становитимуть таку, зокрема, упорядковану множину числових мінтермів

$$A = \{00000, 00010, 00100, 00110, 10000, 10010, 10100, 10110\} \equiv \{0,2,4,6,16,18,20,22\},$$

а $(n-r)$-числа (нижній ряд) – множину $B = \{00000, 00001, 01000, 01001\} \equiv \{0,1,8,9\}$. Звідси шукані кон'юнктерми для заданої маски літералів класу $l-ll-$ становитимуть множину:

$$\{l-ll-\} \Rightarrow \{\theta_1^3, \theta_2^3, \theta_3^3, \theta_4^3, \theta_5^3, \theta_6^3, \theta_7^3, \theta_8^3\} = \{(0,1,8,9), (2,3,10,11), (4,5,12,13), (6,7,14,15),$$
$$(16,17,24,25), (18,19,26,27), (20,21,28,29), (22,23,30,31)\},$$

де, наприклад, десятковий кон'юнктерм θ_5^3 визначається так: $\theta_5^3 = 16 + \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 8 \\ 9 \end{Bmatrix} = (16,17,24,25)$.

Щоб перейти від десяткового кон'юнктерма до його аналітичного відповідника, можна скористатися таким простим правилом: 1) записати у стовпчик двійкові коди найменшого й найбільшого числа десяткового кон'юнктерма та закреслити у них ті значення одноіменних розрядів, які відрізняються між собою; 2) записати псевдотрійковий код кон'юнктерма, переписавши значення незакреслених розрядів та замінивши значення закреслених розрядів символом поглинання "–"; 3) відповідно до заданого кортежу змінних записати аналітичний вираз кон'юнктерма, замінивши кожний i-тий розряд зі значеннями 0 і 1 псевдотрійкового коду на $\bar{x}_i$ і x_i, відповідно. Наприклад, аналітичний вираз десяткового кон'юнктерма (16,17,24,25) одержимо так: $(16,17,24,25) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1\cancel{0}00\cancel{0} \\ 1\cancel{1}00\cancel{1} \end{pmatrix} \Rightarrow (1-00-) \Rightarrow x_1\bar{x}_3\bar{x}_4$. Перейти від аналітичного запису кон'юнктерма до його десяткового відповідника як упорядкованої множини числових мінтермів можна шляхом заповнення символів "–" у псевдотрійковому коді значеннями 0 і 1, починаючи з найменшого, що ілюструє приклад: $\bar{x}_2x_3x_5 \Rightarrow (-01-1) \Rightarrow \begin{pmatrix} 00101 \\ 00111 \\ 10101 \\ 10111 \end{pmatrix} \Rightarrow (5,7,21,23)$.

Висновок

Запропонований простий щодо реалізації спосіб побудови кон'юнктермового поля можна успішно використовувати для пошуку множини простих кон'юнктермів у задачі мінімізації не лише повних, але й частинних булових функцій, а також функцій чи їх систем, заданих у класі ДНФ.

1. Quine W.V. The Problem of Simplifyinq Truth Functions //American Mathematical Monthly. – 1952. – 59. – P. 521–531. 2. McCluskey E.J. Minimization of Boolean Functions //Bell System Technical Journal. – 1956. – 35. – P. 1417–1444. 3. Рыцар Б.Е. Метод минимизации булевых функций // Проблемы управления и информатики. – 1997. – № 2. – С. 100–113. 4. Rytsar B. Minimization method of Boolean functions // Selected Papers on Optoelectronic and Hybryd Optical / Digital Systems for Image Processing. – Proc. SPIE. – 1997. – Vol. 3238. – P. 54–63.

УДК 62.507

В.В. Мінзюк

Національний університет "Львівська політехніка",
кафедра радіоелектронних пристроїв та систем

СПОСІБ СПРОЩЕННЯ ЗАДАЧІ ПОКРИТТЯ БУЛОВИХ ФУНКЦІЙ

Запропоновано спосіб спрощення задачі покриття булових функцій, що враховує взаємне розташування простих кон'юнктермів у логіковому просторі та виділяє на цій основі певний клас задач покриття, для яких відсутня проблема перебору.

In this paper technique of simplifying of Boolean functions covering problem is proposed. The technique consider prime conjuncterms arrangement in logic space and define on this base certain kind of covering problems, which have simple solution.

Вступ

Основна важкість мінімізації булових функцій, як однієї з основних складових логікового синтезу комбінаційних мереж, полягає у вирішенні проблеми мінімального покриття – знаходженні у множині всіх простих кон'юнктермів (кон'юнктивних термів) такої підмножини, кон'юнктерми якої разом міс-